

文章编号: 1000-0887(2001) 07_0682_09

双 I 型裂纹断裂动力学问题的非局部理论解*

周振功, 王彪

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 研究了非局部理论中双 I 型裂纹弹性波散射的动力学问题, 并利用富里叶变换使本问题的求解转换为三重积分方程的求解, 进而采用新方法和利用一维非局部积分核代替二维非局部积分核来确定裂纹尖端的应力状态, 这种方法就是 Schmidt 方法。所得结果比艾林根研究断裂静力学问题的结果准确和更加合理, 克服了艾林根研究断裂静力学问题时遇到的数学困难。与经典弹性解相比, 裂纹尖端不再出现物理意义下不合理的应力奇异性, 并能够解释宏观裂纹与微观裂纹的力学问题。

关键词: 非局部理论; Schmidt 方法; 三重积分方程

中图分类号: O345.21 文献标识码: A

引 言

非局部理论是六十年代末发展起来的一种新型连续介质力学理论, 这一理论主要由 Ede-len^[1], Eringen^[2], Green^[3] 等人创立起来的。根据这一理论, 认为物质域内任意一点的力学状态不仅与该点的一个无限小邻域有关, 而且与整个物质域的其他质点的力学状态有关。这一点与经典弹性理论是不同的, 经典弹性理论认为物质域内任意一点的力学状态仅与该点的一个无限小邻域有关, 这一点都体现在本构方程上有所不同。在文章[4, 5, 6, 7]中, 艾林根利用非局部理论分别研究 I、II、III 型裂纹问题, 所得结果表明裂纹尖端并不存在应力奇异性, 解决了长期存在于力学研究中的一个基本问题。这就使我们可以利用在物理意义上合理的最大应力假设来研究断裂问题, 并且非局部理论将有助于我们更好地对复合材料进行分析研究。然而, 艾林根在[4, 5, 6]中的结果并不准确, 在裂纹尖端出现不合理的应力振荡性^[4], 采用的迭代法对于大晶格参数情况, 迭代误差也较大。因此, 艾林根所采用的迭代法^[1]不适用于解决这种问题。而艾林根在文[5, 6, 7]中所采用的求解对偶积分方程的方法也不是合理的, 原因是文[5, 6, 7]中的第二类对偶积分方程的积分核是超奇异的。利用 Schmidt 方法^[8]可以克服这一困难, 近期本人利用这一方法研究了非局部理论中单裂纹的静态和动态问题^[9~13], 但对于双 I 型裂纹的动态问题还没有研究过。

由于以上的原因, 本文采用新的方法利用非局部理论研究断裂动力学中的双裂纹的弹性

* 收稿日期: 1999_12_14; 修订日期: 2001_02_13

基金项目: 国家优秀青年研究基金(19725209); 黑龙江省自然科学基金和黑龙江省博士后基金资助项目, 哈尔滨工业大学科学研究基金(HIT200030)

作者简介: 周振功(1963—), 河南人, 男, 教授, 博士。

波散射问题。在此之前还没有人利用非局部理论研究过断裂动力学问题。经过富里叶变换可以把问题的求解转化为对偶积分方程的求解。在求解对偶积分方程时,用雅可比多项式和 Schmidt^[8]方法把裂纹的表面位移展开成级数形式。这种方法与艾林根在文献[4, 5, 6, 7]中采用的方法完全不同,但能够克服艾林根在文献[4, 5, 6, 7]中遇到的数学问题,结果也比艾林根在文献[4, 5, 6, 7]中的结果准确合理,这也是本文的研究目的。如我们预料裂纹尖端应力不再有奇异性,显示了裂纹尖端应力场的本来面目。结果表明:裂纹尖端的应力场不仅与裂纹长度有关,而且与材料的原子晶格参数有关。而经典弹性力学解的应力强度因子仅与裂纹长度有关,与材料的性质无关。

1 非局部弹性动力学理论的基本方程

根据非局部理论,认为物质域内任意一点的力学状态不仅与该点的一个无限小领域有关,而且与整个物质域的其他质点的力学状态有关。这一点与晶格动力学的原子理论一致^[14]。对于均匀、各向同性的弹性物体,非局部弹性理论的线性方程为^[4]:

$$\tau_{kl, k} = \rho \dot{u}_l, \quad (1)$$

$$\tau_{kl}(X, t) = \int_V \alpha(|X' - X|) \sigma_{kl}(X', t) dV(X'), \quad (2)$$

这里

$$\sigma_{ij}(X, t) = \lambda u_{r, r}(X, t) \delta_{ij} + \mu [u_{i, j}(X, t) + u_{j, i}(X, t)] \quad (3)$$

这里应力本构方程(2)与经典弹性理论应力本构方程不同之处是应力本构方程(2)中某点的应力与物体中各点的应变都有关。 λ 和 μ 是拉梅常数, ρ 是材料密度。方程(2)中的积分是在表面积 ∂V 所包围的体积上进行的。 $\alpha(|X' - X|)$ 就是非局理论中的影响函数,它是距离 $|X' - X|$ 的函数,方程(3)是经典弹性理论中的虎克定理,把方程(2)代入到方程(1)中,利用格林-高斯定理可得:

$$\int_V \alpha(|X' - X|) [(\lambda + \mu) u'_{k, kl}(X', t) + \mu u'_{l, lk}(X', t)] dV(X') - \int_{\partial V} \alpha(|X' - X|) \sigma_{kl}(X', t) da_k(X') = \rho \dot{u}_l, \quad (4)$$

这里无限远处的积分为零。

2 裂纹模型

设一无限大弹性平板内有两个长度为 $1 - b$ 的共线裂纹, $2b$ 是两裂纹间距离,如图1所示(对于任意长度的两共线裂纹解可以通过本问题的解经一简单的变换而获得)。当裂纹受到一垂直于裂纹面的稳态弹性波入射时,根据[15]的讨论可得,裂纹面上的边界条件可写为(ω 是入射波的频率, τ_0 是入射波的幅值。下面对于时间简谐因子 $e^{-i\omega t}$ 将不做考虑):

$$\tau_{xx}(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad |x| > 1, |x| < b, \quad (5)$$

$$\tau_{xx}(x, 0, t) = 0, \quad \tau_{yy}(x, 0, t) = -\tau_0, \quad b \leq |x| \leq 1, \quad (6)$$

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = 0, \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (7)$$

3 三重积分方程

由边界条件可知,方程(4)可写成如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|x' - x|, |y' - y|) [(\lambda + \mu) u'_{k,kl}(x', y', t) + \mu'_{ij,kk}(x', y', t)] dx' dy' - 2\mu \left\{ \int_{-1}^b + \int_b^1 \right\} \alpha(|x' - x|, 0) \times \mathbf{[}e_{2j}(x', 0, t)\mathbf{]} dx' = -\rho\omega^2 u_j, \quad (8)$$

这里 $\mathbf{[}e_{2j}(x', 0, t)\mathbf{]} = e_{2j}(x', 0^+, t) - e_{2j}(x', 0^-, t)$ 是一应变间断。

$$e_{ij}(x, y, t) = 0.5[u_{k,j}(x, y, t) + u_{j,k}(x, y, t)] \cdot$$

根据文献[7]的讨论可得

$$\mathbf{[}e_{2j}(x, 0, t)\mathbf{]} = 0 \quad (\text{对任意 } x) \cdot \quad (9)$$

富里叶变换可以表示为

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{isx} ds \cdot \quad (11)$$

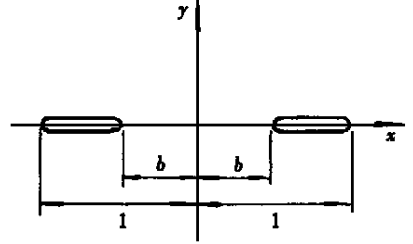


图1 裂纹的几何模型

为了问题的求解, 方程(8)对变量 x 经富里叶变换

后可写为如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|s|, |y' - y|) [\mu u'_{,yy} - (\lambda + 2\mu) s^2 u' - is(\lambda + \mu) v'_{,y}] dy' = -\rho\omega^2 u, \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(|s|, |y' - y|) [-is(\lambda + \mu) u'_{,y} + (\lambda + 2\mu) v'_{,yy} - s^2 \mu'] dy' = -\rho\omega^2 v \cdot \quad (13)$$

对于影响函数 α , 如文献[9, 11, 13, 16, 17] 中讨论可知, 在这里选取一维非局部理论核来代替二维非局部理论核, 从而使问题得以解决, 这种方法在讨论非局部理论弹性波的传播问题^[16] 时引用过, 现在设:

$$\alpha(|s|, |y' - y|) = \alpha_0(s) \delta(y' - y), \quad (14)$$

从方程(12), (13) 可得:

$$\alpha_0(s) [\mu u_{,yy} - (\lambda + 2\mu) s^2 u - is(\lambda + \mu) v_{,y}] = -\rho\omega^2 u, \quad (15)$$

$$\alpha_0(s) [-is(\lambda + \mu) u_{,y} + (\lambda + 2\mu) v_{,yy} - s^2 \mu'] = -\rho\omega^2 v \cdot \quad (16)$$

这里方程(15), (16)的解可写为如下形式 ($y \geq 0$)

$$u(x, y, t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s A_1(s) \sin(sx) \exp(-\gamma_1 y) ds - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_2 A_2(s) \sin(sx) \exp(-\gamma_2 y) ds, \quad (17)$$

$$v(x, y, t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_1 A_1(s) \cos(sx) \exp(-\gamma_1 y) ds - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s A_2(s) \cos(sx) \exp(-\gamma_2 y) ds, \quad (18)$$

这里 $\gamma_1^2 = s^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2 \alpha_0(s)}$, $\gamma_2^2 = s^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2 \alpha_0(s)}$, $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

定义函数 $A(s)$ 如以下形式

$$A_1(s) = -\frac{1}{2\gamma_1} [s^2 + \gamma_2^2] \alpha_0(s) A(s), \quad (19)$$

$$A_2(s) = s \alpha_0(s) A(s), \quad (20)$$

由于对称性, 这里仅考虑第一象限的问题就可以了。从而利用边界条件可以获得如下形式的方程:

$$\int_0^{\infty} A(s) \cos(sx) ds = 0 \quad (0 < x < b, x > 1), \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha_0^2(s) f(s) A(s) \cos(sx) ds = \frac{\pi \tau_0}{2\mu} \quad (b < x < 1), \quad (22)$$

方程(21)和(22)是三重积分方程。

$$f(s) = \frac{1}{2\nu_1} \left\{ [s^2 + \nu_2^2]^2 - 4s^2 \nu_1 \nu_2 \right\}. \quad (23)$$

4 三重积分方程的解

影响函数 α 依赖于特征长度 a/l , 这里 a 是内部特征长度, 即晶格参数。 l 是外部特征长度, 即裂纹长度。 这里与经典弹性理论的不同之处就是非局理论中的影响函数 $\alpha_0(s)$ 。 对于 $a = 0$ 时, $\alpha_0(s) = 1$, 进而方程(21) ~ (22) 将返回到经典弹性理论中的同样问题的三重积分方程。 为了求解三重积分方程, 当然三重积分方程(21) ~ (22) 可以变换为一个不连续核的第一类积分方程^[4], 这将是 不适定问题, 数值求解相当困难。 本文采用 Schmidt 方法来克服这一困难。 如文献[7, 17]中的讨论, 影响函数采用如下形式

$$\alpha_0 = x_0 \exp(-(\beta/a)^2(x' - x)^2), \quad (24)$$

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta/a, \quad (25)$$

这里 β 是一个常数 ($\beta = e_0 \sqrt{\pi}/l$, e_0 是一与材料有关的常数), a 是晶格参数。 从而可以获得:

$$\alpha_0(s) = \exp\left[-\frac{(sa)^2}{(2\beta)^2}\right], \quad (26)$$

当 $a \rightarrow 0$ 时 $\alpha_0(s) = 1$, 从而方程(21) ~ (22) 将返回到经典弹性理论中的著名方程。 这里利用 Schmidt 方法^[8] 来求解三重积分方程(21) ~ (22)。 位移 v 展开成如下级数形式:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(1/2, 1/2)} \left[\frac{x - \frac{1+b}{2}}{\frac{1-b}{2}} \right] \left[1 - \frac{\left[x - \frac{1+b}{2} \right]^2}{\left[\frac{1-b}{2} \right]^2} \right]^{1/2} \quad (\text{当 } b < x \leq 1, y = 0), \quad (27)$$

$$v = 0 \quad (\text{当 } x > 1, x < b, y = 0). \quad (28)$$

这里 a_n 是要确定的未知系数, $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ 是雅可比多项式^[18]。 (27) 经富里叶变换^[18] 后为

$$-\frac{\omega^2}{2c_2^2} A(s) = v(s, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n G_n(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right], \quad (29)$$

$$B_n = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}{n!}, \quad G_n(s) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos\left[s \frac{1+b}{2}\right] & (n = 0, 2, 4, 6, \dots), \\ (-1)^{n-1/2} \sin\left[s \frac{1+b}{2}\right] & (n = 1, 3, 5, 7, \dots), \end{cases} \quad (30)$$

这里 $\Gamma(x)$ 和 $J_n(x)$ 分别是伽马和贝赛尔函数。

把方程(29)分别代入到(21)和(22), 方程(21)将自动满足, 方程(22)将变为如下形式 ($b \leq x < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n \int_0^{\infty} \alpha_0^2(s) G_n(s) f(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left(s \frac{1-b}{2} \right) \cos(xs) ds = -\frac{\pi \tau_0 \omega^2}{4\mu c_2^2} \quad (31)$$

对于大的 s , 方程(31) 中的积分函数将是指数形式衰减, 从而方程(31) 的半无限积分可以利用菲龙方法^[19] 来数值求解, 方程(31) 现在可以利用 Schmidt 方法^[8] 来求解未知系数 a_n . 方程(31) 可以简写为如下形式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n E_n(x) = U(x) \quad (b < x < 1), \quad (32)$$

这里 $E_n(x)$ 和 $U(x)$ 是已知函数, a_n 是需求解的未知系数. 函数序列 $P_n(x)$ 满足如下正交条件并且由已知函数 $E_n(x)$ 构造出来:

$$\int_b^1 P_m(x) P_n(x) dx = N_n \delta_{mn}, \quad N_n = \int_b^1 P_n^2(x) dx, \quad (33)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{M_{in}}{M_{nn}} E_i(x), \quad (34)$$

这里 M_{ij} 是矩阵 D_n 的元素 d_{ij} 的余因子, 矩阵 D_n 定义为如下形式

$$D_n = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad d_{ij} = \int_b^1 E_i(x) E_j(x) dx. \quad (35)$$

利用方程(32) ~ (35) 可得

$$a_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{M_{nj}}{M_{jj}}, \quad (36)$$

$$q_j = \frac{1}{N_j} \int_b^1 U(x) P_j(x) dx. \quad (37)$$

5 数值计算和讨论

如果系数 a_n 已知, 从而应力场就可以获得. 而对于断裂力学来说, 重要的是确定沿裂纹线上的应力场 τ_{yy} . 沿裂纹线上的应力场 τ_{yy} 可以表示为:

$$\tau_{yy} = \frac{4\mu c_2^2}{\pi\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n \int_0^{\infty} \alpha_0^2 G_n(s) f(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left[s \frac{1-b}{2} \right] \cos(sx) ds, \quad (38)$$

对于 $a = 0$ 时, 在点 $x = b$ 和 1 , 将出现经典的应力奇异. 然而只要 $a \neq 0$, 方程(38) 中的无穷级数和半无限积分都是收敛的, 从而所表示的应力也是有限的. 从结果可知, 当 $b < x < 1$, $y = 0$ 时应力 τ_{yy}/τ_0 是非常趋近于单位 1 . 而对于 $x > 1$, 应力 τ_{yy}/τ_0 将从一个在 $x = l$ 处的有限值逐渐减小到 $x = \infty$ 处的零值. 由于 $a/[2\beta(1-b)] > 1/100$ 表示裂纹长度小于 $10^{-6} \text{ cm}^{[6]}$, 而这么小的裂纹代表的是与原子间断量级相同的裂纹, 这么小的裂纹并不是本文研究的目的, 本文研究的裂纹一般都大于这个量级. 对于 Lamé 常数为 $\lambda = 98 \times 10^9 (\text{N/m}^2)$, $\mu = 77 \times 10^9 (\text{N/m}^2)$, $\rho = 7.7 \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$ 情况, 给出了动应力的数值结果. 由于积分函数是指数衰减, 因此半无限积分可以利用菲龙和辛普生方法获得数值结果. 从文献[20] ~ [21] 可知, 如果选取方程(31) 中级数的前十项, Schmidt 方法就可以满足本文的精度, 本文的结果在图 2 ~ 11 中给出. 通过结果的分析, 可以得出如下结论:

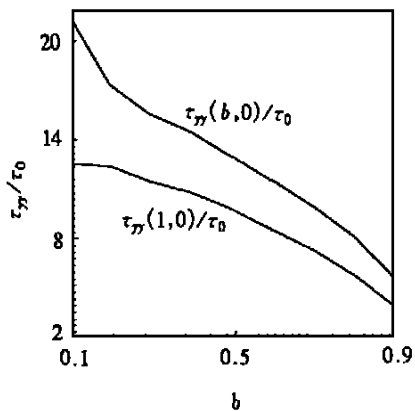


图 2 对于 $a/(2\beta) = 0.0005, \omega/c_2 = 0.2$ 时裂纹尖端附近应力变化情况

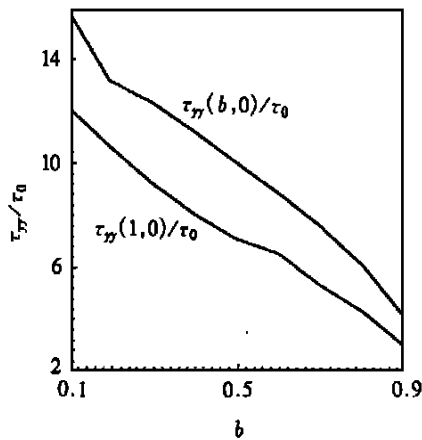


图 3 对于 $a/(2\beta) = 0.0008, \omega/c_2 = 1.0$ 时裂纹尖端附近应力变化情况

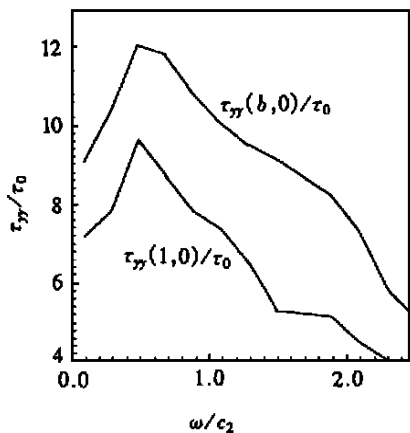


图 4 对于 $a/(2\beta) = 0.0008, b = 0.4$ 时裂纹尖端附近应力变化情况

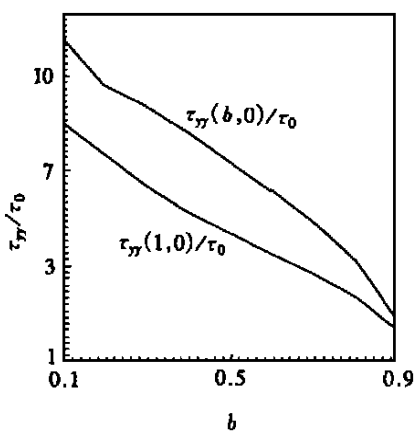


图 5 对于 $a/(2\beta) = 0.0015, \omega/c_2 = 1.0$ 时裂纹尖端附近应力变化情况

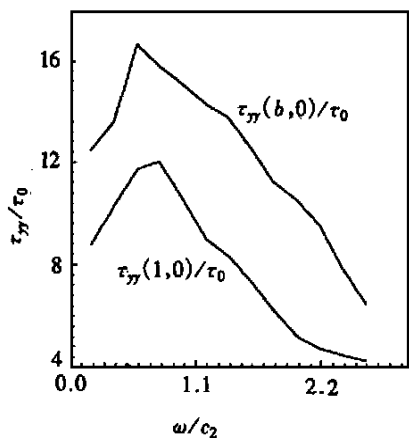


图 6 对于 $a/(2\beta) = 0.0005, b = 0.4$ 时裂纹尖端附近应力变化情况

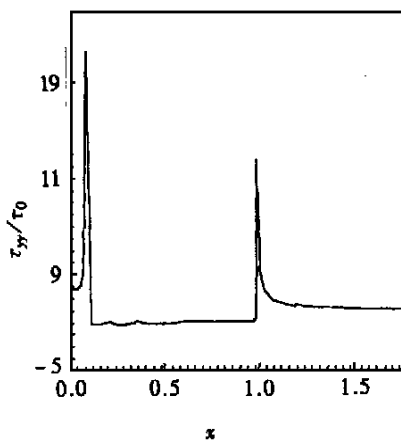


图 7 对于 $a/(2\beta) = 0.0005, \omega/c_2 = 0.2, b = 0.1$ 时裂纹尖端附近应力变化情况

i) 本文的研究方法能够克服艾林根在文献[4, 6, 7]中遇到的数学困难, 结果比艾林根在文献[7]中的结果要准确, 方法也比艾林根在[4, 6, 7]中的方法合理。

ii) 应力场在裂纹尖端不再有奇异性发生。应力场的最大值不是在裂纹尖端发生, 而是出现在稍微离裂纹尖端一段距离的地方, 这一结论与艾林根在文献[14]中的结论相符, 出现应力最大值的点与裂纹尖端的距离非常小, 与经典弹性理论解相比, 本文中的应力场当远离裂纹尖端时收敛于经典弹性理论解的应力场。

iii) 当晶格参数趋于零时, 裂纹尖端的应力将趋于奇异。这就是经典弹性理论解的应力二分之一奇异性。

iv) 如果 a/β 保持不变, 即材料的原子晶格参数不变, 裂纹尖端的应力集中将随着裂纹长度的增加而增加, 事实上实验表明小裂纹比大裂纹更具有阻抗裂纹断裂的能力。

v) 应力随频率的增加显非线性变化, 但不是随频率的增加都增加。

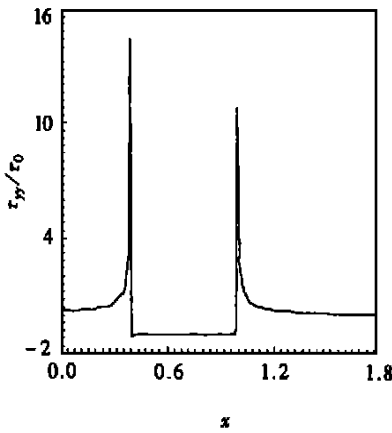


图 8 对于 $a/(2\beta) = 0.0005$,
 $\omega/c_2 = 0.2$, $b = 0.4$ 时
裂纹线上应力变化情况

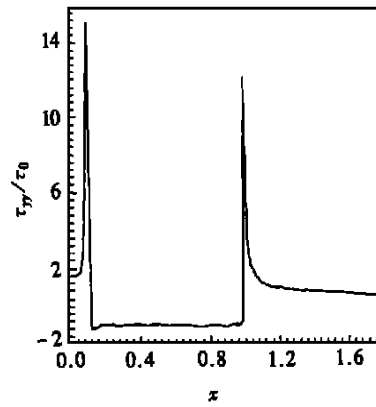


图 9 对于 $a/(2\beta) = 0.0008$,
 $\omega/c_2 = 1.0$, $b = 0.1$ 时
裂纹线上应力变化情况

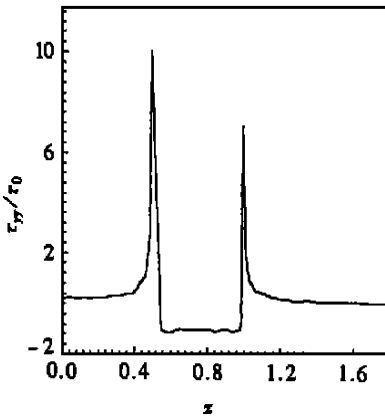


图 10 对于 $a/(2\beta) = 0.0008$,
 $\omega/c_2 = 1.0$, $b = 0.5$ 时
裂纹线上应力变化情况

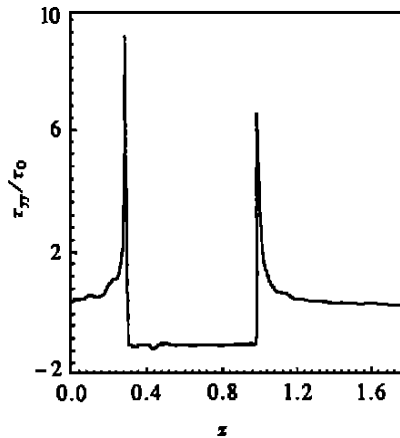


图 11 对于 $a/(2\beta) = 0.0015$,
 $\omega/c_2 = 1.0$, $b = 0.3$ 时
裂纹线上应力变化情况

vi) 本文的结果使宏观与微观断裂研究达到了统一•

vii) 右边裂纹左尖端的应力大于右尖端的应力, 对于右边裂纹来说, 裂纹线上的应力将随着两裂纹间的距离的增加而减小•

[参 考 文 献]

- [1] Edelen D G B. Non_local field theory[A]. In: Dringen A C, Ed. Continuum Physics [C]. Vol 4. New York: Academic Press, 1976, 75—294.
- [2] Eringen A C. Non_local polar field theory[A]. In: Eringen A C Ed. Continuum Physics [C] Vol 4. New York: Academic Press, 1976, 205—267.
- [3] Green A E, Rivlin R S. Multipolar continuum mechanics: functional theory I [J]. Proceedings of the Royal Society London, Series A, 1965, (284): 303.
- [4] Eringen A C, Speziale C G, Kim B S. Crack tip problem in non_local elasticity[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1977, 25(4): 339.
- [5] Eringen A C, Kim B S. Stress concentration at the tip of crack[J]. Mechanics Research Communications, 1974, 1(2): 233.
- [6] Eringen A C. Linear crack subject to shear[J]. International Journal of Fracture, 1978, 14(3): 367—379.
- [7] Eringen A C. Linear crack subject to anti_plane shear[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1979, 12(3): 211—219.
- [8] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics [M]. Vol 1. New York: McGraw_Hill, 1958.
- [9] ZHOU Zhen_gong, HAN Jie_cai, DU Shan_yi. Investigation of the scattering of harmonic elastic waves by a finite crack using the non_local theory[J]. Mechanics Research Communications, 1998, 25(5): 519—528.
- [10] ZHOU Zhen_gong, DU Shan_yi, HAN Jie_cai. Non_local theory solution for in_plane shear of through crack[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1998, 30(3): 185—194.
- [11] ZHOU Zhen_gong, WANG Biao, DU Shan_yi. Scattering of harmonic anti_plane shear waves by a finite crack by using the non_local theory[J]. International Journal of Fracture, 1998, 91(1): 13—22.
- [12] ZHOU Zhen_gong, HAN Jie_cai, DU Shan_yi. Investigation of a crack subjected to anti_plane shear by using the non_local theory[J]. International Journal of Solids and Structure, 1999, 36(26): 3891—3901.
- [13] ZHOU Zhen_gong, BAI Ya_ying, ZHANG Xian_wen. Scattering of harmonic shear waves by a finite crack by using the non_local theory[J]. International Journal of Engineering Science, 1999, 37(5): 609—620.
- [14] Eringen A C. On differential of non_local elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. Journal of Applied Physics, 1983, 54(4): 4703—4710.
- [15] Srivastava K N, Palaiya R M, Karaulia D S. Interaction of shear waves with two coplanar Griffith cracks situated in an infinitely long elastic strip[J]. International Journal of Fracture, 1983, 23(4): 3—14.
- [16] Nowinski J L. On non_local aspects of the propagation of love waves[J]. International Journal of Engineering Science, 1984, 22(5): 383—392.
- [17] Nowinski J L. On non_local theory of wave propagation in elastic plates[J]. ASME Journal Applied Mechanics, 1984, 51(4): 608—613.

- [18] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integral Series and Products [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [19] Amemiya A, Taguchi T. Numerical Analysis and Fortran [M]. Tokyo: Maruzen, 1969.
- [20] Itou S. Three dimensional waves propagation in a cracked elastic solid[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1978, **45**(2): 807—811.
- [21] Itou S. Three dimensional problem of a running crack[J]. International Journal of Engineering Science, 1979, **17**(2): 59—71.
- [22] Eringen A C. Interaction of a dislocation with a crack[J]. Journal of Applied Physics, 1983, **54**(5): 6811—6817.

Investigation of the Scattering of Harmonic Elastic Waves by Two Collinear Symmetric Cracks Using the Non_Local Theory

ZHOU Zhen_gong, WANG Biao

(Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China)

Abstract: The scattering of harmonic waves by two collinear symmetric cracks is studied using the non_local theory. A one_dimensional non_local kernel was used to replace a two_dimensional one for the dynamic problem to obtain the stress occurring at the crack tips. The Fourier transform was applied and a mixed boundary value problem was formulated. Then a set of triple integral equations was solved by using Schmidt's method. This method is more exact and more reasonable than Eringen's for solving this problem. Contrary to the classical elasticity solution, it is found that no stress singularity is present at the crack tip. The non_local dynamic elastic solutions yield a finite hoop stress at the crack tip, thus allowing for a fracture criterion based on the maximum dynamic stress hypothesis. The finite hoop stress at the crack tip depends on the crack length, the lattice parameter and the circular frequency of incident wave.

Key words: the non_local theory; Schmidt's method; the triple_integral equation