应用数学和力学,第22卷 第7期(2001年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 07_0691_04

任意二阶张量的特征张量及其特性分析*

黄永念

(北京大学 力学与工程科学系,湍流研究国家重点实验室,北京 100871)

(我刊编委来稿)

摘要: 黄永念曾对一个二阶张量引进了一个特征张量的概念,且利用它给出了一个常系数常微分方程组得显式解表达式• 最近发现这种特征张量是并矢形式• 利用这种并矢表示可以大大简化张量的运算工作•

关 键 词: 特征值; 特征张量; 并矢
中图分类号: O151.21 文献标识码: A

引 言

张量分析是研究物理问题非常有用的一个数学工具• 因为不仅物理问题中很多物理量本身就是张量,而且有时将物理量用张量形式表示出来,可以更好地反映问题的本质(如旋涡的结构)和便于作进一步的数学运算• 如文献[1]中讨论的常系数常微分方程解,如果用张量形式来表示的话,可以表示成一个显式解的形式• 又如文献[2]中讨论的各种旋涡解结构也是利用张量的形式表示出来的• 张量中最简单的是二阶张量• 有时也有人把标量称为零阶张量,把向量称为一阶张量,但真正的张量是从二阶开始的• 例如应力张量、应变张量等都是二阶张量• 为简单起见,本文只限于讨论二阶张量•

1 任意二阶张量的特征张量及其特征

给定一个二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$, 要求它有三个不同的特征值 e_1, e_2, e_3, 它们满足特征方程

$$|\boldsymbol{B}_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0• \tag{1}$$

定义 一个任意二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的特征张量为

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}=(\boldsymbol{B}_{ik}-e_2\delta_{ik})(\boldsymbol{B}_{kj}-e_3\delta_{kj}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)}=(\boldsymbol{B}_{ik}-e_3\delta_{ik})(\boldsymbol{B}_{kj}-e_1\delta_{kj}), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(3)}=(\boldsymbol{B}_{ik}-e_1\delta_{ik})(\boldsymbol{B}_{kj}-e_2\delta_{kj})• \tag{4}$$

根据 Cayley_Hamilton 定理

$$\boldsymbol{B}_{ij}^3-J_1\boldsymbol{B}_{ij}^2-J_2\boldsymbol{B}_{ij}-J_3\delta_{ij}=0, \tag{5}$$

即

$$(\boldsymbol{B}_{im}-e_1\delta_{im})(\boldsymbol{B}_{mn}-e_2\delta_{mn})(\boldsymbol{B}_{nj}-e_3\delta_{nj})=0• \tag{6}$$

我们不难发现, 特征张量具有以下特征:

---

* 收稿日期: 2000_03_17; 修订日期: 2001_03_12
基金项目: 九五攀登预选项目:“非线性科学”和“流体与空气动力学关键基础问题研究”
作者简介: 黄永念(1939—),男,上海人,教授,湍流研究国家重点实验室副主任.

$$\boldsymbol{H}_{ik}^{(p)}\boldsymbol{H}_{kj}^{(q)} = 0 \qquad (p \neq q), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(p)^2} = \boldsymbol{H}_{nn}^{(p)}\boldsymbol{H}_{ij}^{(p)} = (e_p - e_q)(e_p - e_r)\boldsymbol{H}_{ij}^{(p)} \qquad (p \neq q \neq r), \tag{8}$$

和 $$\boldsymbol{H}_{nn}^{(1)} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3),\ \boldsymbol{H}_{nn}^{(2)} = (e_2 - e_3)(e_2 - e_1),\ \boldsymbol{H}_{nn}^{(3)} = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2). \tag{9}$$

此外,我们还可以发现特征张量与任意一个向量相乘即可得到一个与相应特征值对应的特征向量. 这里我们定义 $\boldsymbol{l}_i^*$, $\boldsymbol{m}_i^*$, $\boldsymbol{n}_i^*$ 是分别与特征值 e_1, e_2, e_3 对应的左特征向量,它们满足方程

$$\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{l}_j^* = e_1\boldsymbol{l}_i^*,\ \boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{m}_j^* = e_2\boldsymbol{m}_i^*,\ \boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{n}_j^* = e_3\boldsymbol{n}_i^*, \tag{10}$$

和 $\boldsymbol{l}_i^{**}$, $\boldsymbol{m}_i^{**}$, $\boldsymbol{n}_i^{**}$ 是分别与特征值 e_1, e_2, e_3 对应的右特征向量,它们满足方程

$$\boldsymbol{l}_i^{**}\boldsymbol{B}_{ij} = e_1\boldsymbol{l}_j^{**},\ \boldsymbol{m}_i^{**}\boldsymbol{B}_{ij} = e_2\boldsymbol{m}_j^{**},\ \boldsymbol{n}_i^{**}\boldsymbol{B}_{ij} = e_3\boldsymbol{n}_j^{**}. \tag{11}$$

注意到

$$(\boldsymbol{B}_{ik} - e_1\delta_{ik})\boldsymbol{H}_{kj}^{(1)} = 0,\ \text{和}\ \boldsymbol{H}_{ik}^{(1)}(\boldsymbol{B}_{kj} - e_1\delta_{kj}) = 0, \tag{12}$$

即 $$\boldsymbol{B}_{ik}\boldsymbol{H}_{kj}^{(1)} = e_1\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}\ \text{和}\ \boldsymbol{H}_{ik}^{(1)}\boldsymbol{B}_{kj} = e_1\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}. \tag{13}$$

用任意一个向量 $\boldsymbol{x}_i$ 相乘,我们有

$$\boldsymbol{B}_{ik}(\boldsymbol{H}_{kj}^{(1)}\boldsymbol{x}_j) = e_1(\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}\boldsymbol{x}_j)\ \text{和}\ (\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{H}_{ik}^{(1)})\boldsymbol{B}_{kj} = e_1(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}). \tag{14}$$

这就证明了我们的断言.

例如分别令 $\boldsymbol{x}_i$ 为 $\boldsymbol{x}^{(1)} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$ 和 $\boldsymbol{x}^{(3)} = (0, 0, 1)$ 并分别与 $\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}$ 相乘,可得

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}\boldsymbol{x}_j^{(1)} = \boldsymbol{H}_{i1}^{(1)} = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{l}_i^*,\quad \boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}\boldsymbol{x}_j^{(2)} = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{l}_i^*,\quad \boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}\boldsymbol{x}_j^{(3)} = \boldsymbol{c}_3\boldsymbol{l}_i^*, \tag{15}$$

即 $$\boldsymbol{H}_{i1}^{(1)} = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{l}_i^*,\quad \boldsymbol{H}_{i2}^{(1)} = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{l}_i^*,\quad \boldsymbol{H}_{i3}^{(1)} = \boldsymbol{c}_3\boldsymbol{l}_i^*, \tag{16}$$

故 $\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)} = \boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{c}_j$ 是一种并矢形式. 所以我们有 $\boldsymbol{H}_{nn}^{(1)} = \boldsymbol{l}_n^*\boldsymbol{c}_n$. 而从前面可知

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)^2} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)} = \boldsymbol{l}_i^*(\boldsymbol{c}_n\boldsymbol{l}_n^*)\boldsymbol{c}_j = (\boldsymbol{c}_n\boldsymbol{l}_n^*)\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}. \tag{17}$$

由此可知 $\boldsymbol{H}_{nn}^{(1)} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$. 实际上 $\boldsymbol{c}_j$ 是与 e_1 对应的右特征向量,可以写成

$$\boldsymbol{c}_j = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\boldsymbol{l}_j^{**}.$$

根据特征张量的这些特性,我们就发现特征张量可以写成下面的并矢的形式

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{l}_j^{**}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)} = (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)\boldsymbol{m}_i^*\boldsymbol{m}_j^{**}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(3)} = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)\boldsymbol{n}_i^*\boldsymbol{n}_j^{**}, \tag{20}$$

并且有

$$\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{m}_i^{**} = \boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{n}_i^{**} = 0,\ \boldsymbol{m}_i^*\boldsymbol{l}_i^{**} = \boldsymbol{m}_i^*\boldsymbol{n}_i^{**} = 0,\ \boldsymbol{n}_i^*\boldsymbol{m}_i^{**} = \boldsymbol{n}_i^*\boldsymbol{l}_i^{**} = 0, \tag{21}$$

和 $$\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{l}_i^{**} = \boldsymbol{m}_i^*\boldsymbol{m}_i^{**} = \boldsymbol{n}_i^*\boldsymbol{n}_i^{**} = 1. \tag{22}$$

此外,根据特征张量得定义,我们可直接得到以下公式:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \frac{\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + \frac{\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)}}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} + \frac{\boldsymbol{H}_{ij}^{(3)}}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)},\\
\boldsymbol{B}_{ij} &= \frac{e_1\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + \frac{e_2\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)}}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} + \frac{e_3\boldsymbol{H}_{ij}^{(3)}}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)},\\
\boldsymbol{B}_{ij}^2 &= \frac{e_1^2\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)}}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} + \frac{e_2^2\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)}}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} + \frac{e_3^2\boldsymbol{H}_{ij}^{(3)}}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

代入特征张量的并矢形式,即可得

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ij} &= \boldsymbol{l}_i^{*}\boldsymbol{l}_j^{**} + \boldsymbol{m}_i^{*}\boldsymbol{m}_j^{**} + \boldsymbol{n}_i^{*}\boldsymbol{n}_j^{**}, \\ \boldsymbol{B}_{ij} &= e_1\boldsymbol{l}_i^{*}\boldsymbol{l}_j^{**} + e_2\boldsymbol{m}_i^{*}\boldsymbol{m}_j^{**} + e_3\boldsymbol{n}_i^{*}\boldsymbol{n}_j^{**}, \\ \boldsymbol{B}_{ij}^2 &= e_1^2\boldsymbol{l}_i^{*}\boldsymbol{l}_j^{**} + e_2^2\boldsymbol{m}_i^{*}\boldsymbol{m}_j^{**} + e_3^2\boldsymbol{n}_i^{*}\boldsymbol{n}_j^{**}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

由此可以发现任意一个二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 可以用它的特征张量或利用它的特征向量的并矢来分解, 这和一个向量可以分解为三个坐标分量一样•

2 讨 论

我们得知一个张量最本质最重要的是它的特征值, 特征向量和特征张量• 它们是最基本的不变量• 如果进一步考察的话, 我们发现根据定义, 特征张量分量的值是唯一确定的, 没有任何任意性• 但特征向量分量的值却不知唯一确定的, 它可以有一个常数因子的任意性, 它还可以有正负号的任意性, 因此特征张量更加本质一些•

如果二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的特征值有重根, 则上述某些结论就不适用了• 由于重根对应的特征张量是相同的, 所以独立的特征张量数目减少了• 二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 就不能只由特征张量来表示了• 例如在二重根 $e_1, e_2 = e_3$ 的情况中,

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)} = (\boldsymbol{B}_{ij} - e_2\delta_{ij})^2, \quad \boldsymbol{H}_{ij}^{(2)} = (\boldsymbol{B}_{ik} - e_1\delta_{ik})(\boldsymbol{B}_{kj} - e_2\delta_{kj}), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{B}_{ij} = \frac{\boldsymbol{H}_{ij}^{(1)} - \boldsymbol{H}_{ij}^{(2)}}{e_1 - e_2} + e_2\delta_{ij}. \tag{26}$$

一般说来, 任意二阶张量不一定存在三组特征向量, 故式(23)、(24) 不存在, 但如果二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 所有三组特征向量都存在的话, 则式(24) 成立, (23) 仍不成立• 但是如果二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 是对称二阶张量, 则很易证明对应重根的特征张量是零张量,

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)} = 0.$$

并且由于对称二阶张量必定存在有三个互相垂直的主轴方向, 所以我们仍然可以将对称二阶张量用主轴方向的单位向量的并矢来表示•

$$\boldsymbol{B}_{ij} = e_1\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j + e_2\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_j + e_2\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j. \tag{27}$$

此时特征向量的计算可通过重新定义特征张量的办法来得到• 因为根据定义我们有

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{(2)} = (\boldsymbol{B}_{ik} - e_1\delta_{ik})(\boldsymbol{B}_{kj} - e_2\delta_{kj}) = 0, \tag{28}$$

故可以定义特征张量

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{*(1)} = \boldsymbol{B}_{ij} - e_2\delta_{ij}, \quad \boldsymbol{H}_{ij}^{*(2)} = \boldsymbol{B}_{ij} - e_1\delta_{ij}. \tag{29}$$

不难证明

$$\boldsymbol{H}_{ij}^{*(1)} = (e_1 - e_2)\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j, \quad \boldsymbol{H}_{ij}^{*(2)} = (e_2 - e_1)(\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_j + \boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j). \tag{30}$$

先从特征张量 $\boldsymbol{H}_{ij}^{*(1)}$ 求出特征向量 $\boldsymbol{l}_i$, 然后任意选取一个垂直特征向量 $\boldsymbol{l}_i$ 的向量作为特征向量 $\boldsymbol{m}_i$, 最后利用右手法则得到特征向量 $\boldsymbol{n}_i$•

由此还可得到具有二重特征值的二阶张量 B_{ij} 的特征张量表示

$$\boldsymbol{B}_{ij} = \frac{e_1\boldsymbol{H}_{ij}^{*(1)}}{e_1 - e_2} + \frac{e_2\boldsymbol{H}_{ij}^{*(2)}}{e_2 - e_1}. \tag{31}$$

如果对称二阶张量 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 具有三重特征值 $e_1 = e_2 = e_3$, 则它一定可以写成

$$\boldsymbol{B}_{ij} = e_1\delta_{ij}. \tag{32}$$

在实际运算过程中由于左、右特征向量各自之间不是正交的, 因此用上面的表达式时并不一定方便• 我们也可以采用另一种表示方法• 把一个任意二阶张量分解为一个对称张量和一

个反对称张量两部分• 由于对称张量的左、右特征向量是相同的，而且它们之间是互相正交的• 因此我们可以利用它们来表示一个任意二阶张量• 虽然形式复杂一些，但计算起来却大为方便。我们令:

$$\boldsymbol{B}_{ij} = 2^{-1}(\boldsymbol{B}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ji}) + 2^{-1}(\boldsymbol{B}_{ij} - \boldsymbol{B}_{ji}) = \boldsymbol{P}_{ij} + \boldsymbol{W}_{ij} \cdot \tag{33}$$

其中对称张量 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 的特征值分别 e_1^*, e_2^*, e_3^* (假定互不相等)，其对应的单位特征向量为 $\boldsymbol{l}_i$, $\boldsymbol{m}_i$, $\boldsymbol{n}_i$• 反对称张量 $\boldsymbol{W}_{ij}$ 可用一个向量 ω_i 来表示:

$$\boldsymbol{W}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{34}$$

其中 $\omega_i = 2^{-1}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{B}_{jk}$• 它在特征向量组成的坐标系中可表示为：

$$\omega_i = \omega_1^*\boldsymbol{l}_i + \omega_2^*\boldsymbol{m}_i + \omega_3^*\boldsymbol{n}_i, \tag{35}$$

其中

$$\omega_1^* = 2^{-1}(\boldsymbol{m}_j\boldsymbol{n}_k - \boldsymbol{n}_j\boldsymbol{m}_k)\boldsymbol{B}_{jk},\quad \omega_2^* = 2^{-1}(\boldsymbol{n}_j\boldsymbol{l}_k - \boldsymbol{l}_j\boldsymbol{n}_k)\boldsymbol{B}_{jk},$$
$$\omega_3^* = 2^{-1}(\boldsymbol{l}_j\boldsymbol{m}_k - \boldsymbol{m}_j\boldsymbol{l}_k)\boldsymbol{B}_{jk} \cdot \tag{36}$$

因此任意一个二阶张量可以表示为:

$$\boldsymbol{B}_{ij} = e_1^*\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_j + e_2^*\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_j + e_3^*\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j + \omega_1^*(\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{n}_i\boldsymbol{m}_j) +$$
$$\omega_2^*(\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{l}_j - \boldsymbol{l}_i\boldsymbol{n}_j) + \omega_3^*(\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}_i\boldsymbol{l}_j) \cdot \tag{37}$$

由此可知任意一个二阶张量的最基本的独立标量不变量是 6 个量，即 e_1^*, e_2^*, e_3^* 和 ω_1^*, ω_2^*, ω_3^*• 所有其他标量不变量均是这 6 个标量的函数•

[参 考 文 献]

[1] 黄永念. 常系数线性常微分方程组的显式解[J]. 应用数学和力学, 1992, **13**(12): 1115—1120.

[2] HUANG Yong_nian, HU Xin. Superpositon about the 3D vortex solution of the fluid dynamic equation [A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceeding of the 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 479—484.

[3] Rutherford Aris. Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics [M]. Englewood Clills, N J, U S A: Prentice_Hall Inc, 1962.

[4] Gurevich G B. Foundations of the Theory of Algebraic Invariants [M]. Netherlands: P Noardhoff LTD_Groningen, 1964.

The Eigentensors of an Arbitrary Second Order Tensor and Their Quality Analyses

HUANG Yong_nian

(State Key Laboratory of Turbulence Research, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: A notation of the eigentensors of an arbitrary second order tensor had been introduced by HUANG Yong_nian(1992). By using this notation an explicit solution of homogeneous linear ordinary differential equations with constant coefficients had been given. Recently, it is found that these eigentensors are dyads. By using these dyads the tensor calculations can be simplified greatly.

Key words: eigenvalues; eigentensors; dyads