

文章编号: 1000-0887(2001) 06-0579-08

# 粘弹性动力问题中的一种新的 时域递进算法\*

杨海天, 高强, 郭杏林, 邬瑞锋

(工业装备结构分析国家重点实验室, 大连理工大学 工程力学系, 大连 116024)

(本刊编委邬瑞锋来稿)

**摘要:** 提出一种新的求解粘弹性动力问题的时域递进技术, 在离散时段内将各物理量展开, 导出有限元形式的递推计算格式。对不同的时间步长, 可做自适应计算, 以保证计算精度。数值验证给出了令人满意的结果。

**关键词:** 粘弹性; 动力问题; 有限元

**中图分类号:** O345; O322      **文献标识码:** A

## 引 言

工程中的一大类材料具有粘弹性性质, 如混凝土、岩土、高聚物、ER/MR 材料等等[Christensen1982, 陶宝祺 1999]<sup>[1,2]</sup>。粘弹性问题的动力分析, 都涉及时域相关的解[Christensen 1982<sup>[1]</sup>, 杨海天等 1991<sup>[3]</sup>, 1993<sup>[4]</sup>]。由于实际问题的复杂性, 即使在空间采用有限元等方法离散, 在时域的系统方程, 仍需借助有限差分等手段进行数值求解。

时域的数值求解, 不仅要考虑收敛性、稳定性和相容性等[Lewis 1996<sup>[5]</sup>, 张宝琳等 1994<sup>[6]</sup>], 还要考虑计算精度, 计算步长的改变不应影响计算精度[YANG Hai\_tian, 1999]<sup>[7]</sup>。

本文将各物理量在离散的时段内展开, 建立解析意义下的递推控制方程, 给出相应的有限元求解格式, 对不同步长, 可进行自适应计算。所给算例与解析解进行了比较, 得到了令人满意的结果。

## 1 粘弹性动力问题的控制方程

粘弹性动力问题的控制方程可写为[Christensen 1982]<sup>[1]</sup>

平衡方程

$$\sigma_{j,j} + B_i = \rho(x) \partial^2 u_i / \partial t^2 \quad x \in \Omega, 0 \leq t \leq \infty; \quad (1)$$

应变位移关系

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2; \quad (2)$$

\* 收稿日期: 1999\_12\_03; 修订日期: 2000\_12\_05

基金项目: 教育部归国人员启动基金资助项目(1998\_679)

作者简介: 杨海天(1956—), 男, 浙江人, 教授, 博士, 博士生导师, 系/国家重点实验室副主任;  
邬瑞锋(1928—), 男, 上海人, 教授, 博士, 博士生导师。

边界条件

$$u_i = u_i \quad (\text{位移边界条件}) x \in \Gamma_u, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i = p_i \quad (\text{应力边界条件}) x \in \Gamma_\sigma; \quad (4)$$

其中,  $\sigma_{ij}$  和  $\varepsilon_{ij}$  分别代表应力和应变张量,  $B_i$  是体积力向量,  $\rho(x)$  是密度,  $u_i$  是位移向量,  $n_j$  代表边界上的方向余弦向量,  $u_i$  和  $p_i$  是  $u_i$  和  $p_i$  在边界上的给定值.  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$  代表所论域  $\Omega$  的边界,  $x$  是坐标向量,  $t$  代表时间.

粘弹性的本构关系为<sup>[1]</sup>

$$D_{ijlm} \sum_{k=0}^M q_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varepsilon_m = \sum_{s=0}^N \rho_s \frac{\partial^s}{\partial t^s} \sigma_{ij}, \quad (5)$$

其中  $q_k$  和  $\rho_s$  为已知系数,  $D_{ijlm}$  为常数张量.

## 2 递推形式的控制方程

为更精确地描写各物理量的变化, 将它们在离散时段内按参量  $s$  展开.  $s$  定义为

$$s = (t - t_0)/T, \quad (6)$$

这里  $t_0$  是任意时间起点,  $T$  代表时段长. 对  $t$  和  $s$  的导数转换关系为

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{ds}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2}{ds^2}, \quad (8)$$

式(1)~(4)中的变量可展为

$$\varepsilon_{ij} = \sum \varepsilon_{ij}^m s^m, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = \sum \sigma_{ij}^m s^m, \quad (10)$$

$$B_i = \sum B_i^m s^m, \quad (11)$$

$$u_i = \sum u_i^m s^m, \quad (12)$$

$$u_i = \sum u_i^m s^m, \quad (13)$$

$$p_i = \sum p_i^m s^m, \quad (14)$$

这里  $\varepsilon_{ij}^m$ 、 $\sigma_{ij}^m$  代表应力和应变张量的展开系数,  $B_i^m$ 、 $p_i^m$ 、 $u_i^m$  和  $u_i^m$  分别是体积力、面力和位移的展开系数.

将式(9)~(14)代入式(1)~(4)可得

$$\sigma_{ij,j}^m + B_i^m = \rho(m+1)(m+2)u_i^{m+2}/T^2 \quad x \in \Omega, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{ij}^m = (u_{i,j}^m + u_{j,i}^m)/2, \quad (16)$$

$$u_i^m = u_i^m \quad x \in \Gamma_u, \quad (17)$$

$$\sigma_{ij}^m n_j = p_i^m \quad x \in \Gamma_\sigma. \quad (18)$$

## 3 有限元递推计算格式

对式(15)应用加权技术可得[徐次达 1987]<sup>[8]</sup>

$$\int_{\Omega} \left[ \sigma_{ij,j}^m + B_i^m - \frac{\rho(m+1)(m+2)}{T^2} u_i^{m+2} \right] u_i^* dv + \int_{\Gamma_u} (u_i^m - u_i^m) p_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} (p_i^m - p_i^m) u_i^* d\Gamma = 0, \quad (19)$$

这里  $u_i^*$  和  $p_i^*$  代表权函数。

式(19)分部积分后为

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)(m+2)}{T^2} \int_{\Omega} u_i^{m+2} \rho u_i^* dv &= \int_{\Gamma_o} p_i^m u_i^* d\Gamma + \\ &\int_{\Omega} (B_i^m u_i^* - \sigma_{ij}^m u_{i,j}^*) dv + \int_{\Gamma_u} p_i^m u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_i^m - u_i^m) p_i^* d\Gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

在有限单元级, 将  $u_i^k$  用其单元节点值表示为

$$u_i^k = N u_i^k, \quad (21)$$

这里  $N$  代表形函数矩阵,  $u_i^k$  为  $u_i^k$  的单元节点向量。

单元级总的节点向量定义为

$$(u^k)^T = ((u_1^k)^T, (u_2^k)^T, (u_3^k)^T). \quad (22)$$

权函数也可按类似方式定义

$$u_i^* = N u_i^*, \quad (23)$$

$$(u^*)^T = ((u_1^*)^T, (u_2^*)^T, (u_3^*)^T), \quad (24)$$

这里  $u_i^*$  和  $u^*$  分别代表  $u_i^*$  的节点向量和节点总向量。

将式(21)~(24)代入式(20)并令

$$u_i^k = u_i^k \quad x \in \Gamma_u$$

$$\text{及} \quad u_i^* = 0 \quad x \in \Gamma_u,$$

可得

$$\frac{(k+1)(k+2)}{T^2} [M] \{u\}^{k+2} = \{p\}^k + \{B\}^k - \sum_{e=1} \int_{\Omega_e} N' \{\sigma\}^k dv, \quad (25)$$

其中

$$[M] = \sum_{e=1} \int_{\Omega_e} N^T \rho N dv, \quad (26)$$

$$\{p\}^k = \sum \int N^T \{p^k\} d\Gamma, \quad (27)$$

$$\{B\}^k = \sum \int N^T \{B^k\} d\Gamma, \quad (28)$$

$N'$  代表  $N$  的导数阵。

由式(5)及(9)~(10)得

$$\sigma_{ij}^k = D_{jilm} \sum_{n=0}^k c_{k,k-n} \epsilon_{lm}^{k-n}, \quad (29)$$

$c_{k,k-n}$  为已知系数。

将式(16)及式(29)代入式(25)可得

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)(k+2)}{T^2} [M] \{u\}^{k+2} = \\ \{p\}^k + \{B\}^k - \left[ \sum_{e=1} \int_{\Omega_e} (N')^T D (N') dv \right] \sum_{n=0}^k c_{k,k-n} \{u\}^{k-n}, \end{aligned} \quad (30)$$

这里  $\{u\}^k$ 、 $\{p\}^k$  和  $\{B\}^k$  分别代表全局节点位移系数向量、全局等效面力和体力系数向量,  $D$  为  $D_{jilm}$  对应的矩阵。

在第一时段, 初值条件为

$$u_i = u_i^0 \quad t = 0, \quad (31)$$

$$\partial u_i / \partial t = u_i^1 \quad t = 0 \quad (32)$$

在其它时段,前一时段的终值将给出后一时段的初值。

利用式(30)及初值条件,粘弹性动力响应可逐步递推求解。对给定的精度要求,展开阶数将随时间步长大小的变化做自适应调整。

## 4 数 例

例1 考虑一无质粘弹性杆上质量块的运动,其位移  $u$  的运动方程为  $M\dot{u} + A\sigma = P$ , 位移应变关系为  $\varepsilon = u/L$ 。

根据杆的不同粘弹性本构模型,对位移进行了计算,并与解析解进行了比较,结果列于表2、4、6。

### 1. Kelvin 模型

$$\sigma = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}$$

表1 Kelvin模型计算参数

$M/\text{kg}$	$A/\text{m}^2$	$L/\text{m}$	$q_0$	$q_1$
100	0.02	2	60 000	50 000

表2 Kelvin模型计算结果

	$t/\text{s}$	本方法 $u/\text{m}$	解析法 $u/\text{m}$
步长 $T = 0.1 \text{ s}$ $P = \exp(t)$ $u(0) = 0$ $\dot{u}'(0) = 0$	0.1	4.391 882E-05	0.000 043 918 818 40
	0.2	1.554 646E-04	0.000 155 464 585 47
	0.3	3.119 344E-04	0.000 311 934 386 44
	0.4	4.984 096E-04	0.000 498 409 580 37
	0.5	7.054 951E-04	0.000 705 495 002 30
步长 $T = 0.2 \text{ s}$ $P = \sin(t)$ $u(0) = 0$ $\dot{u}'(0) = 0.02$	0.2	2.440 599E-03	0.002 440 603 243 41
	0.4	3.028 516E-03	0.003 028 513 827 82
	0.6	2.894 302 E-03	0.002 894 300 085 09
	0.8	2.557 295E-03	0.002 557 293 290 35
	1.0	2.233 016E-03	0.002 233 014 639 87

### 2 线性模型

$$\sigma + P_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}$$

表3 线性模型计算参数

$M/\text{kg}$	$A/\text{m}^2$	$L/\text{m}$	$P_1$	$q_0$	$q_1$
100	0.02	2	0.166 666 6	10 000	18 333.333

表 4 线性模型计算结果

	$t/s$	本方法 $u/m$	解析法 $u/m$
步长 $T = 0.1$ s	0.1	1.446 573E-01	0.144 657 269 711 67
$P = \exp(t)$	0.2	1.791 981E-01	0.179 198 035 939 98
$u(0) = 0.1$	0.3	2.046 850E-01	0.204 684 867 978 81
$\dot{u}(0) = 0.5$	0.4	2.223 175E-01	0.222 317 282 021 72
$\ddot{u}(0) = -1.09$	0.5	2.333 102E-01	0.233 309 836 593 59
步长 $T = 0.2$ s	0.2	1.791 981E-01	0.179 198 035 939 98
$P = \exp(t)$	0.4	2.223 175E-01	0.222 317 282 021 72
$u(0) = 0.1$	0.6	2.388 193E-01	0.238 818 667 977 41
$\dot{u}(0) = 0.5$	0.8	2.374 960E-01	0.237 494 838 749 61
$\ddot{u}(0) = -1.09$	1.0	2.253 625E-01	0.225 360 819 719 95
步长 $T = 0.2$ s	0.2	1.789 902E-01	0.178 990 188 663 74
$P = 0$	0.4	2.214 838E-01	0.221 483 552 668 71
$u(0) = 0.1$	0.6	2.369 689E-01	0.236 968 248 266 12
$\dot{u}(0) = 0.5$	0.8	2.342 697E-01	0.234 268 528 511 31
$\ddot{u}(0) = -1.1$	1.0	2.204 150E-01	0.220 413 221 798 09

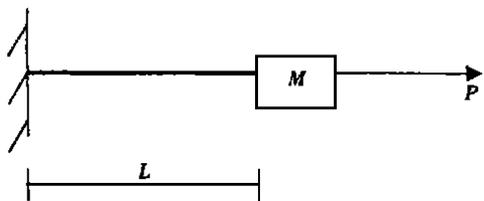


图 1 无质粘弹性杆上的质量块

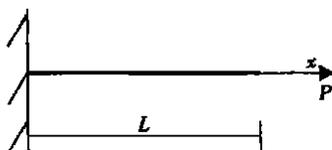
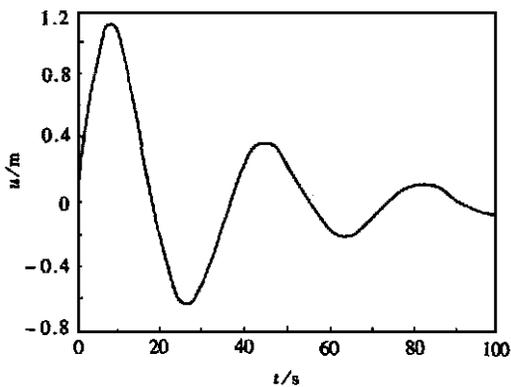
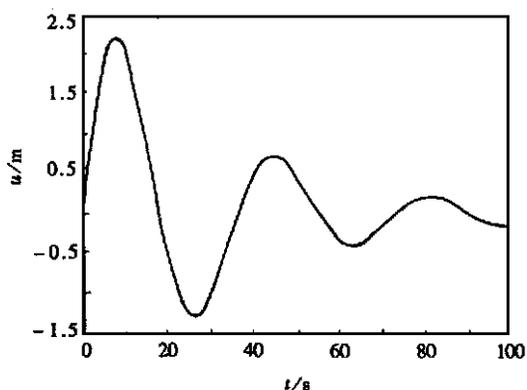


图 2 纵向振动的粘弹性杆

图 3  $x = 0.3$  m 处位移随时间  $t$  的变化图 4  $x = 0.6$  m 处位移随时间  $t$  的变化

3 ScsIt 模型

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \ddot{\epsilon} + q_2 \dot{\epsilon}$$

表 5 ScsIt 模型计算参数

$M/\text{kg}$	$A/\text{m}^2$	$L/\text{m}$	$p_1$	$q_1$	$q_2$
5	0.1	2	1	600	400

表 6 ScsIt 模型计算结果

	$t/\text{s}$	本方法 $u/\text{m}$	解析法 $u/\text{m}$
步长 $T = 0.1 \text{ s}$			
$T = 0.2 \text{ s}$	0.1	4.198 523E-2	4.198 523E-2
$T = 0.3 \text{ s}$	0.2	7.130 594E-2	7.130 594E-2
$P = \exp(t)$	0.4	1.067 238E-1	1.067 238E-1
$u(0) = 0$	0.6	1.264 064E-1	1.264 063E-1
$\dot{u}'(0) = 0.5$	0.9	1.476 399E-1	1.476 399E-1
$\ddot{u}''(0) = -1.8$	1.2	1.721 290E-1	1.721 290E-1
步长 $T = 0.1 \text{ s}$			
$T = 0.2 \text{ s}$	0.1	4.107 662E-2	4.107 661E-2
$T = 0.3 \text{ s}$	0.2	6.797 613E-2	6.797 613E-2
$P = 0$	0.4	9.526 750E-2	9.526 750E-2
$u(0) = 0$	0.6	1.035 323E-1	1.035 322E-1
$\dot{u}'(0) = 0.5$	0.9	1.022 562E-1	1.022 562E-1
$\ddot{u}''(0) = -2$	1.2	9.690 493E-2	9.690 491E-2

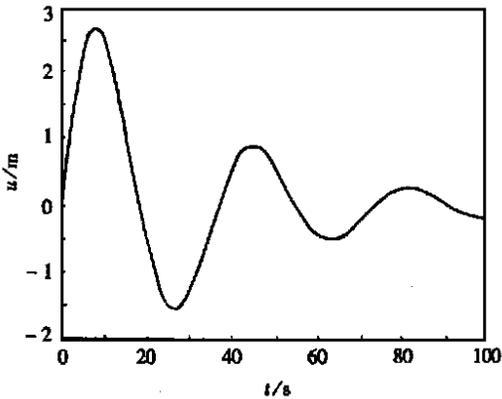


图 5  $x = 0.9 \text{ m}$  处位移随时间  $t$  的变化

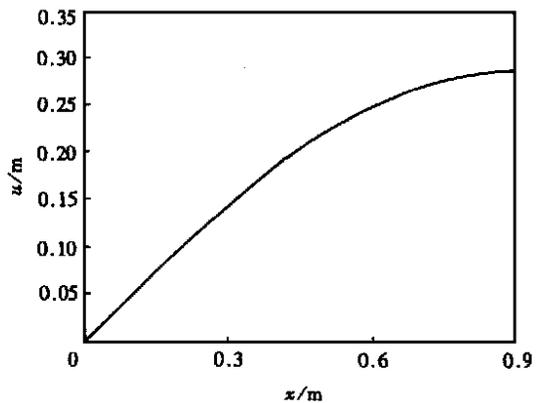


图 6  $t = 80 \text{ s}$  时位移沿杆的变化

例 2 考虑一杆的水平振动,如图 2 所示。  $L = 0.9 \text{ m}$ , 截面积  $A = 0.1 \text{ m}^2$ , 采用 Kelvin 模型,  $q_0 = 1.0, q_1 = 2.0$ 。 计算结果见图 3 至图 7。 在图 3 至图 6 的计算中, 采用了 15 个相同长度的线性单元。

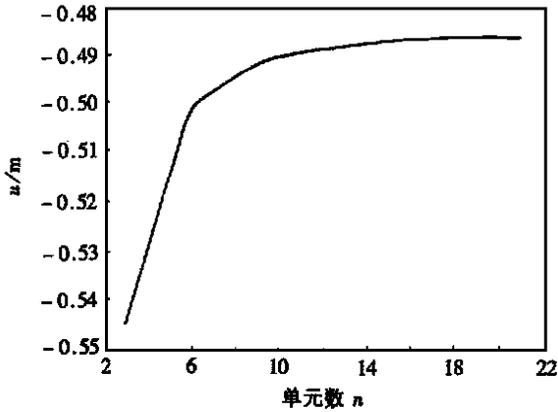


图7  $t = 20\text{ s}$ 时,  $x = 0.6\text{ m}$ 处  
计算位移随单元数的变化

## 5 结 论

对粘弹性动力问题的求解,本文提出了一种新的时域递进技术,其特点在于

1. 建立了离散时段内的递推系统方程,各物理量在时段内可被更精确地描述,并可对不同的时间步长进行自适应计算,以提高计算精度。
2. 递推控制方程的有限元求解,可处理复杂的边界形状和条件。
3. 本文算法带来的另一个好处,是对非线性问题可避免迭代求解[YANG Hai\_tian, 1999]<sup>[7]</sup>。

本文从不同的角度,对所提算法进行了数值比较和验证,得到了令人满意的结果。这无疑将鼓励作者将此方法进一步完善、改进,并应用于其它非线性动力问题的求解。

### [参 考 文 献]

- [1] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity [M]. New York: Academic Press, 1982.
- [2] 陶宝祺. 智能材料结构[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [3] 杨海天, 邬瑞锋, 沙德松. 粘弹性杆系结构的稳态动力分析[J]. 地震工程与工程振动, 1991, 11(1): 64—75.
- [4] 杨海天, 邬瑞锋, 杨春秋. 粘弹性结构自由振动分析[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(1): 30—35.
- [5] Lewis R W, Morgan K, Thomas H R, et al. The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis [M]. New York: Wiley, 1996.
- [6] 张宝琳, 袁国兴, 刘兴平, 等. 偏微分方程并行有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [7] YANG Hai\_tian. A new approach of time stepping for solving transfer problems[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, 15: 325—334.
- [8] 徐次达. 固体力学加权残值法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987.

## A New Algorithm of Time Stepping in Dynamic Viscoelastic Problems

YANG Hai\_tian, GAO Qiang, GUO Xing\_lin, WU Rui\_feng

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

**Abstract:** A new scheme of time stepping for solving the dynamic viscoelastic problems are presented. By expanding variables at a discretised time interval, FEM based recurrent formulae are derived. A self\_adaptive algorithm for different sizes of time steps can be carried out to improve computing accuracy. Numerical validation shows satisfactory performance.

**Key words:** viscoelasticity; dynamic problem; finite element