应用数学和力学, 第 22 卷 第 6 期(2001 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2001)06_0602_07

一维反应扩散方程中的行波波速及行波解*

周天寿, 张锁春

(中国科学院 数学与系统科学研究院, 应用数学研究所, 北京 100080)

(戴世强推荐)

摘要: 通过 Painlev 分析, 详细研究了一类一维化学反应扩散方程中的行波解及波速. 分别给出了当歼灭项的指数大于创造项的指数及创造项的指数大于歼灭项的指数时, 这两种情形下的波速及行波解的显式表示. 此外, 还给出了一类常见激励介质中的波速及平面波解在薄的边界层内的公式.

关 键 词: Painlev 分析; 行波; 激励介质

中图分类号: O33; O322 文献标识码: A

引 言

非线性反应扩散方程中的行波波速及行波解一直是数学及理论物理工作者十分关注的一类问题. [1~6]中的作者们处理了一类反应扩散方程, 并找到了一些特殊的行波解.

最近, J. E. Herrera 等在[7]中, 概括了前几位作者的数学模型, 提出并研究了更广泛的一类反应扩散方程:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(n^{\delta}\frac{\partial n}{\partial x}\right)+n^{p}-\lambda n^{k},\tag{1}$$

$-\infty<x<+\infty$, $t\geqslant 0$, 其中 δ, p 和 k 是实常数, 且 $p\neq k$, $\lambda>0$ 是参数. 他们给出了一些特别解及产生松驰的参数条件. 获得了当歼灭项的指数(p)大于创造项的指数(k)时, 有不稳定的平衡解存在; 相反地, 当歼灭项的指数小于创造项的指数时, 有行波解存在, 而且支持一个非零的波速值. 但他们只是定性和数值地进行了分析, 没有具体给出(除特别情形外)行波波速及行波解.

为了研究(1)的行波解, 令 $z=x-ct$(这里 c 为波速), 则(1)变为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(n^{\delta}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\right)+c\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}+n^{p}-\lambda n^{k}=0.\tag{2}$$

在[7]中, 作者研究了几种特殊情形: ①当 $\delta=0$, $p=1$, $k>p$ 时, 获得了两种可能的波速, 并分别给出了他们所对应的行波显式解; ②当 $\delta=1$, $p=2$, $k=4$ 时, 数值地分析了(1)的行波解或(2)的解, 指出: 波速 $c^{*}=1/\sqrt{3}$ 是一临界值, 当 $0\leqslant c<c^{*}$ 时, 数值地发现有一在零点连续$(z\geqslant 0)$, 而有无限倾斜的尖前廓存在; 当 $c>c^{*}$ 时, 行波近似于"衰减的结".

本文通过对(2)进行 Painlev 分析(参考[8]), 精确地给出了行波的波速, 并研究了两种典

* 收稿日期: 1999_09_20; 修订日期: 2001_02_27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19901034)
作者简介: 周天寿(1962—), 男, 江西新建人, 副教授, 博士, 在国内外核心刊物上发表论文 20 余篇.

型情形: ① $k-\delta=3, p=2$, 特别地对 $\delta=1, k=4, p=2$, 我们给出了波速值及行波解的精确表达式; ② $k-\delta=2, p=2$, 特别地对 $\delta=1, k=3, p=2$, 求出了波速值并给出了行波解的级数表示•

用同样的方法, 可以处理更广泛一类反应扩散方程:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(n)\frac{\partial n}{\partial x}\right)+P(n), \tag{3}$$

这里 $Q(n)$, $P(n)$ 分别为 n 的多项式•

作为上述方法的一个应用, 我们给出了一类常见的激励介质[9] 中行波波速及行波解在薄的边界层内的显式表示, 获得了与[10] 相一致的结果•

1　创造项占主导: 两种典型情形的行波

此时 $k>p$• 首先我们决定(2) 具有什么样的极指数• 为此令: $n=A(z-z_0)^{\alpha}$ (z_0 为一常数, 它是行波的位置参量, 不影响行波的具体形式, 因此以下我们设 $z_0=0$), 那么由 Painlev 分析知道: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(n^{\delta}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\right)$ 必须与 n^k 相平衡• 于是我们得到:

$$\alpha=\frac{-2}{k-\delta-1},\quad n^{k-\delta-1}=\alpha[\alpha(\delta+1)-1]• \tag{4}$$

一般地要求 α 为负整数, 否则的话, 须对(2) 进行一般的 Painlev 分析, 并要研究其一般的 B¾cklund 变换, 结果会发现有两种典型情形: 一种是 $k-\delta=3$, 此时 $\alpha=-1$; 另一种是 $k-\delta=2$, 此时 $\alpha=-2$• 对其它的 k、δ, 除去形式上有所不同外, 相应的行波的定性性质是相似的• 因此, 以下我们仅考虑这两种情形• 此外, 不失一般性, 令 $\lambda=1$•

1. $k-\delta=3$ 的情形

若 k、δ 为非整数, 则在进行 Painlev 分析时, 会发现其形式特别复杂• 为方便, 同时也为了与[7] 中的数值结果相对比, 我们仅研究 $\delta=1, k=4, p=2$• 此时由于极指数 $\alpha=-1$, 因此可设(2) 的行波解具有形式:

$$n=\frac{A}{z}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k, \tag{5}$$

其中 $A^2=3$, a_k ($k=0, 1, \ldots$) 为待定常数• 把它代入(2), 并分别平衡 z 的各次幂的系数, 立即会发现: $a_{2k}=0$ ($k=0, 1, 2, \ldots$)• 另外, 还可获得:

$$a_1=\frac{1}{4A^2}(A-c),\quad a_3=\frac{7A+29c}{10A\cdot 12^2}(A-c)• \tag{6}$$

当平衡到 z 的 2 次幂时, 可获得关于波速 c 的方程式:

$$c(A+3c)(A-c)=0, \tag{7}$$

我们仅考虑 $c\neq 0$ 的情形• 于是由(7) 可解得两种可能的波速: 一是

$$c_1=A=\sqrt{3}, \tag{8}$$

此时易知: $a_k=0$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$), 但 a_5 是任意常数, 并且

$$a_7=-\frac{7}{18}a_5,\quad a_9=\frac{7}{88}a_5,\quad a_{11}=\frac{1}{21A}\left(\frac{7}{8}A+27a_5\right)a_5,\ \ldots•$$

于是行波解具有形式:

$$n=\frac{\sqrt{3}}{z}+a_5 z^5\phi(z), \tag{9}$$

其中 a_5 为任意常数, $\phi(z)=1-7z^2/18+7z^4/88+\cdots$ 是偶函数• 特别地, 若取 $a_5=0$, 则得

到一种特殊的行波解:

$$n = \frac{\sqrt{3}}{z}\cdot \tag{9'}$$

另一种波速为:

$$c_2 = -\frac{A}{3}\cdot \tag{10}$$

为了保证波向前传播,我们取 $A=-\sqrt{3}$,则: $c_2 = 1/\sqrt{3}$• 由此我们可决定 n 的展开式中 z 的各次幂的系数,但不易获得相应行波解的显式表示• 尽管这样,由于此时 n 中只包含 z 的偶数次项,并观察其系数规律,我们可假设: $n = B[(1+ae^{\alpha z})/(1+be^{\alpha})]$,其中 a、b、α、B 为待定系数• 把它代入(2)后,可获得:

$$\begin{cases} 3\alpha^2 = \dfrac{B^2}{b^2}(b-a)^2,\quad \alpha^2(7a-5b) = \dfrac{4aB^2}{b^2}(b-a)^2,\quad \dfrac{B^2}{b^2}a^2 = \dfrac{B^4}{b^4}a^4, \\ \dfrac{B^2\alpha^2(b-a)}{b^2}(2b-5a) + \dfrac{B\alpha c_2(b-a)}{b} + \\ \qquad \dfrac{B^2}{b^2}(b-a)^2 - 6\dfrac{B^4}{b^4}a^2(b-a)^2 = 0\cdot \end{cases} \tag{11}$$

从(11)可解得: $\alpha = 2/\sqrt{3}$, $a=-b$, $B=1$; 或 $\alpha=-2/\sqrt{3}$, $a=-b$, $B=-1$• 因此相应于波速 $c_2 = 1/\sqrt{3}$ 的行波解具有形式:

$$n = B\cdot\frac{e^{z/\sqrt{3}} + ae^{-z/\sqrt{3}}}{e^{z/\sqrt{3}} - ae^{-z/\sqrt{3}}}, \tag{12}$$

其中 a 为任意常数, $B=1$ 或 -1, 若取 $a=-1$, $B=-1$, 则所得的结果与[7]相同•

有了行波的波速及行波解的具体形式,当然,行波如何传播就一目了然了•

2. $k-\delta=2$ 的情形

同 $k-\delta=3$ 的情形,为处理简便,仅考虑 $\delta=1$, $k=3$, $p=2$• 此时 $\alpha=-2$, 于是可设行波解具有形式:

$$n = \frac{A}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \tag{13}$$

把它代入(2),并平衡 z 的各次幂,立即知: $a_{-1}=0$• 此外,分别有:

$$\left.\begin{aligned} &A = 10,\quad a_0 = \frac{5}{12},\quad a_1 = -\frac{c}{14},\quad a_2 = \frac{1}{96}, \\ &a_3 = \frac{-c}{60\cdot 14},\quad a_4 = \frac{13}{8\cdot 11\cdot 12^3}, \\ &a_5 = \frac{c}{240\cdot 24},\quad a_6 = \frac{1}{180}\left(\frac{-c^2}{112} + \frac{1}{1\,536}\right)\cdot \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

当平衡到 z 的 4 次幂时,可获得关于波速 c 的方程式:

$$-\frac{19}{5}c^2 + 5 = 0, \tag{15}$$

或 $c = 5/\sqrt{19}$• 对于 $k>8$, 我们可获得关于行波解系数的类推关系式:

$$A[(k-2)(k-3)-3A]a_k + c(k-3)a_{k-3} + 2Aa_{k-2} +$$
$$2\sum_{i+j=k-4}\varepsilon_{ij}a_ia_j + 2\sum_{i+j=k-3} ij\,\varepsilon_{ij}a_ia_j + 2\sum_{\substack{i+j=k-2\\ j\geqslant 2}} j(j-2)\varepsilon_{ij}a_ia_j -$$

$$6A\sum_{i+j=k-6}\varepsilon_{ij}a_ia_j-3\sum_{i+j+l=k-4}\varepsilon_{ijl}a_ia_ja_l=0, \tag{16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ijl}&=\begin{cases}0 & i<0\text{ 或 }j<0\text{ 或 }l<0,\\ 1/3 & i=j=l,\\ 1 & \text{其它};\end{cases}\\ \varepsilon_{ij}&=\begin{cases}0 & i<0\text{ 或 }j<0,\\ 1 & i\neq j,\\ 1/2 & i=j.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

而 $n=A/z^2+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$ 即为行波的级数表示(其中 a_8 为任意常数)•

2 歼灭项占主导: 行波波速及行波解

此时 $p>k$• 同上一节, 为方便并不失一般性, 这里我们仅考虑两种典型情形: ①$p-\delta=3$, 此时通过Painlev 分析发现, 行波解不存在; ②$p-\delta=2$, 为简单起见, 让 $\delta=1$, $k=2$, $\lambda=1$, 则 $p=3$• 类似于上节的讨论, 可获得极指数 $\alpha=-2$• 于是可设行波解具有形式:

$$n=\frac{A}{z^2}+\frac{b_{-1}}{z}+\sum_{k=0}^{+\infty}b_kz^k. \tag{18}$$

把它代入(2), 并平衡 z 的各次幂的系数, 可知

$$\begin{cases}A=10,\quad b_{-1}=0,\\ b_0=\dfrac{5}{12},\quad b_1=-\dfrac{c}{14},\quad b_2=-\dfrac{1}{96},\quad b_3=-\dfrac{c}{840},\\ 280b_4=\dfrac{43}{196}c^2-\dfrac{5\cdot 263}{144},\quad 240b_5=\dfrac{17c}{840},\\ 180b_6=\dfrac{5c^2}{784}-\dfrac{1}{256}.\end{cases} \tag{19}$$

特别地, 当比较到 z 的 4 次幂时, 可获得关于波速 c 的方程式:

$$\frac{89}{49}c^2-\frac{41}{288}=0 \tag{20}$$

或 $c=(7/12)\sqrt{41/178}$• 当 $k>8$ 时, 相应的系数有下列类推关系式:

$$\begin{aligned}&A[(k-2)(k-3)+3A]+c(k-3)b_{k-3}-2Ab_{k-2}-\\ &\quad 2\sum_{i+j=k-4}\varepsilon_{ij}b_ib_j+2\sum_{i+j=k-3}ij\,\varepsilon_{ij}\,b_ib_j+2\sum_{\substack{i+j=k-2\\ j\geqslant 2}}j(j-2)\varepsilon_{ij}b_ib_j+\\ &\quad 6A\sum_{i+j=k-6}\varepsilon_{ij}b_ib_j+3\sum_{i+j+l=k-4}\varepsilon_{ijl}b_ib_jb_l=0,\end{aligned} \tag{21}$$

这里 ε_{ij} 和 ε_{ijl} 同(17)•

相应的行波解具有形式:

$$n=\frac{A}{z^2}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k,$$

其中 b_8 为任意常数, 其它系数由(19) 和(21) 决定•

对这种情形的行波, 它的定性性质相似于下列情形的行波的定性性质: $k=3$, $\delta=1$, $p=2$•

3 一类典型激励介质的行波或平面波

一般的激励介质可用下列两个化学浓度的抛物型方程组来描述:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta u + f(u, v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2 \Delta v + \varepsilon g(u, v), \end{cases} \tag{22}$$

其中 D_1、D_2 为扩散系数, ε为小参数: $0 < \varepsilon \ll 1$, Δ 为拉普拉斯符号, 空间变量可为1、2、3 维•

考虑(22) 的平面波• 为此设 $z = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} - ct$(其中 $\boldsymbol{n}$ 为单位常向量, c 为波速)• 代入(22)得:

$$\begin{cases} D_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + c \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + f(u, v) = 0, \\ D_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + c \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} + \varepsilon g(u, v) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

由于 $0 < \varepsilon \ll 1$, 及 v 是有界的, 因此由(23) 的第二式可知: 在薄的边界层内, $v = v_0 + O(\varepsilon)$• 把它代入(23) 的第一式, 并略去 ε 的小阶项后(并假设 $D_1 = 1$), 可得 :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + c \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + f(u, v_0) = 0 \tag{24}$$

一般地$f(u, v)$ 关于 u 是三次函数(这是因为我们所考虑的是激励介质), 因此可设$f(u, v_0)$ 具有形式:

$$f(u, v_0) = au + bu^2 + du^3, \tag{25}$$

其中 a、b、$d < 0$ 为仅与 v_0 有关的常数(这里, 通过平移变换, 我们略去了$f(u, v_0)$ 的常数项)•

令 $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}z = w$, 则(24) 变为:

$$\begin{cases} u' = w, \\ w' = -au - bu^2 - du^3 - cw \end{cases} \tag{26}$$

考虑 w 的特解形式:

$$w = \alpha u^p + \beta u^q,$$

把它代入(26), 得:

$$\alpha^2 p u^{2p-1} + \alpha\beta(p+q) u^{p+q-1} + \beta^2 q u^{2q-1} + c\alpha u^p + c\beta u^q + au + bu^2 + du^3 = 0 \tag{27}$$

由此解得: $p = 1$, $q = 2$, 此时

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{d}{3}\sqrt{\dfrac{2}{-d}} - \dfrac{c}{3}, \quad \beta = \pm\sqrt{\dfrac{-d}{3}}, \\ c = \dfrac{-b\sqrt{-1/2d} \pm 3\sqrt{(4ad - b^2)/2d}}{2} \end{cases} \tag{28}$$

此外, 由 $u' = w = \alpha u + \beta u^2$, 解得:

$$u = \frac{\alpha}{\beta} \frac{c_{11} \mathrm{e}^{\alpha(z - z_0)}}{1 - c_{11} \mathrm{e}^{\alpha(z - z_0)}}, \tag{29}$$

其中 c_{11} 为任意常数, z_0 为波的位置参量•

我们曾在[10] 中, 获得了关于波速 c 的代数方程:

$$8y^3 + \frac{6}{d}\left(-\frac{b^2}{d} + 3a\right) y + \frac{1}{d^2}\left(-9ab + \frac{2b^3}{d}\right) = 0, \tag{30}$$

其中 $y = -c/da_{-1}$, $a_{-1} = \sqrt{-2/d}$• 经过直接验证(28)中的两种波速均满足(30)• 此外, 我们还可获得第三种可能的波速:

$$c = b\sqrt{\frac{1}{-2d}}, \tag{31}$$

它相应的平面波不具有(29)的形式, 但有如下形式的级数解:

$$u = \frac{A}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k• \tag{32}$$

特别地, 我们可给出 Keener 在[11]中所提及的激励介质模型(即FHN模型)的波速及平面波解的表达式• 由于

$$f(u, v_0) = -A(u-u_0)(u-u_1)(u-u_2), \tag{33}$$

其中 $A > 0,\ u_0 < u_1 < u_2$• 令 $H = u - u_0$, 则:

$$F(H) \equiv f(u, v_0) = -AH(H+u_0-u_1)(H+u_0-u_2),$$

令:

$$a = A(u_1-u_0)(u_2-u_1),\quad b = A(u_0+u_2-2u_1), d = -A,$$

代入前面所得的波速公式即得:

$$c_1 = \sqrt{\frac{A}{2}}(u_1+u_2-2u_0), \tag{34}$$

它所对应的平面波解为:

$$u = \frac{\alpha}{\beta}\frac{c_{22}e^{\alpha(z-z_0)}}{1-c_{22}e^{\alpha(z-z_0)}}, \tag{35}$$

其中

$$\alpha = -\sqrt{\frac{A}{3}}\left[\sqrt{2}(u_0+u_2-2u_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1+u_2-2u_0)\right],\quad \beta = \sqrt{\frac{A}{2}}•$$

同时还可得另一种波速:

$$c_2 = \sqrt{\frac{A}{2}}(u_0+u_2-2u_1),$$

相应地只能给出平面波解的级数表示, 更详细的推导请参考[10]•

[参 考 文 献]

[1] Larsen E W, Pomraning G C. Asymptotic analysis of nonlinear Marshak waves[J]. SIAM J Appl Math, 1980, **39**: 201—212.

[2] Knerr B F. The porous medium equation in one dimension[J]. Trans Amer Math Soc, 1977, **234**: 381—415.

[3] Kath W L, Waiting and propagating fronts in nonlinear diffusion[J]. Physica D, 1984, **12**: 375—381.

[4] Wilhelmsson H. Simultaneous diffusion and reaction processes in plasma dynamics[J]. Phys Rev A, 1988, **38**: 1482—1489.

[5] Kaliappan P. An exact solution for traveling waves of $u_t = Du_{xx} + u - u^k$ [J]. Physica D, 1984, **11**: 368—374.

[6] Wilhelmsson H. Solution of reaction_diffusion equation describing dynamic evolution towards explosive localized states[J]. Phys Rev A, 1988, **38**: 2667—2670.

[7] Herrera J E, Minzoni A, Ondarza R. Reaction_diffusion equations in one dimension: particular solutions and relaxation[J]. Physica D, 1992, **57**: 249—266.

[8] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlev property for partial differential equations[J]. J Math Phys, 1983, **24**: 522—526.

[9] Lugoil E, Winfree A T. Simulation of wave_propagation in three dimensions using FORTRAN on the CY-BER205[J]. J Comput Chem, 1988, **91**: 689—701.

[10] Zhou T S, Zhang S C. Analytic representation of traveling wave solution and dispersive relation in Tyson's model[J]. Commun Theoret Phys, 2000, **33**: 147—150.

[11] Keener J P. A geometric theory for spiral wave in excitable media[J]. SIAM J Appl Math, 1986, **46**: 1039—1056.

Traveling Wave Speed and Solution in Reaction_ Diffusion Equation in One Dimension

ZHOU Tian_shou, ZHANG Suo_chun

(Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

Abstract: By Painlev analysis, traveling wave speed and solution of reaction_diffusion equations for the concentration of one species in one spatial dimension are in detail investigated. When the exponent of the creation term is larger than the one of the annihilation term, two typical cases are studied, one with the exact traveling wave solutions, yielding the values of speeds, the other with the series expansion solution, also yielding the value of speed. Conversely, when the exponent of creation term is smaller than the one of the annihilation term, two typical cases are also studied, but only for one of them, there is a series development solution, yielding the value of speed, and for the other, traveling wave solution cannot exist. Besides, the formula of calculating speeds and solutions of planar wave within the thin boundary layer are given for a class of typical excitable media.

Key words: Painlev analysis; traveling wave; excitable media