应用数学和力学,第 22 卷 第 6 期(2001 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001)06_0633_06

时滞 Hopfield 神经网络模型的全局吸引性和全局指数稳定性*

蒲志林[1,2], 徐道义[2]

(1. 四川师范大学 数学系,成都 610066; 2. 四川大学 数学系,成都 610064)

(林宗池推荐)

摘要: 对具有时滞的 Hopfield 神经网络模型,在非线性神经元激励函数是 Lipschitz 连续(而非已有的大部分文献中假设是 Sigmoid 函数)的条件下,通过构造适当的泛函,给出了这类模型全局吸引和平衡点全局指数稳定的易于验证的充分条件•

关 键 词: 神经网络; 全局吸引; 全局指数稳定
中图分类号: TN911.23; O332 文献标识码: A

引 言

Hopfield 神经网络模型(HNNS)是广泛使用的人工神经网络模型之一• 对于具有 n 个相互联接的人工神经元组成的连续的确定性的模型,可用如下非线性动力学方程描述[1,2]:

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j(t))+I_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)\bullet\tag{1}$$

其中,$n\geqslant 2$ 是网络中神经元的个数,$u_i(t)$ 代表第 i 个神经元在 t 时刻的状态,C_i、R_i、T_{ij} 及 I_i 是常数,且 $C_i>0$,$R_i>0$,$g_i(\bullet):R\to R$ 是非线性函数,称为神经元激励函数• 由于物理实现上电路元器件的影响,在系统动力学方程中自然要考虑时滞的影响• 文[3]中考虑了如下时滞模型:

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j(t-\tau_{ij}))+I_i\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

其中,$\tau_{ij}\geqslant 0$ 是常数• 文[4]中考虑了 $\tau_{ij}\equiv\tau$(常数)的情形•

对模型方程(2),考虑如下初始条件:

$$u_i(s)=\varphi_i(s),\qquad s\in[-\tau,0]\ (i=1,2,\cdots,n),\tag{3}$$

其中

$$\tau=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\tau_{ij},\qquad \varphi_i(\bullet)\in C([-\tau,0],\mathbf{R})\ (i=1,2,\cdots,n)\bullet$$

人工神经网络理论研究中的一个基本问题是网络模型系统动力学的全局渐近性态,如全局吸引性,全局指数稳定性等• 因为具有全局指数稳定性的 Hopfield 型连续神经网络对于实

* 收稿日期: 1999_11_23; 修订日期: 2000_05_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771059);四川省教委基金资助项目
作者简介: 蒲志林(1963—),男,四川人,副教授,博士,现工作单位:四川师范大学数学系.

时求解各种最优化问题[5]以及特殊的A/D转换器设计问题[5]是非常重要的• 另外,系统的全局吸引性也是一个重要的研究课题[6]• 已有不少工作研究这些问题,例如文[7~9]等• 我们注意到已有的这些工作都对非线性神经元激励函数 $g_i(\cdot)$ 作了较强的假设:

(i) $g_i(\cdot)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是Sigmoid函数,即

$$g_i(\cdot)\in C^1,\quad g_i'(x)>0,\qquad x\in\mathbf{R}$$

且

$$g_i'(0)=\min_{x\in\mathbf{R}}g_i'(x)>0\cdot$$

(ii) $g_i(x)$ 是有界的•

但是,Morita[10]最近指出:对某些重要的应用来说,采用非单调的非线性神经元激励函数可以显著地改变网络系统的一些特性•

本文将在对神经元激活函数 $g_i(\cdot)$ 作较弱的假设条件下给出上述神经网络模型全局吸引和全局指数稳定的易于验证的充分条件• 我们假设:

(H) $g_i(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是全局Lipschitz连续的且Lipschitz常数是 L_i, $i=1,2,\cdots,n$• 另外,存在常数 $M_i>0$,使得

$$|g_i(x)|\leqslant M_i,\qquad x\in\mathbf{R}\ (i=1,2,\cdots,n)\cdot$$

可以把系统(2)改写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-b_iu_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(u_j(t-\tau_{ij}))+J_i\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{4}$$

其中,

$$b_i=\frac{1}{C_iR_i},\quad a_{ij}=\frac{T_{ij}}{C_i},\quad J_i=\frac{I_i}{C_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\cdot$$

我们将给出模型系统(4)是全局吸引和全局指数稳定的易于检验的条件•

1 预备知识

设 $\varphi_i(\cdot)\in C([-\tau,0],R)$, $i=1,2,\cdots,n$,记

$$\Phi=(\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot),\cdots,\varphi_n(\cdot))^{\mathrm{T}}\cdot$$

对

$$\boldsymbol{U}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,$$

定义

$$\|\Phi-\boldsymbol{U}^*\|=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(s)-u^*|\cdot$$

定义1 称

$$\boldsymbol{U}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$$

是系统(4)的平衡点,如果

$$-b_iu_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(u_j^*)+J_i=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)\cdot$$

定义2 称系统(4)是全局吸引的,如果系统(4)的任意两个解 $\boldsymbol{U}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{V}(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t))^{\mathrm{T}}$ 都满足

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}|u_i(t)-v_i(t)|=0\cdot$$

定义 3 称系统(4) 的平衡点

$$U^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$$

是全局指数稳定的, 如果存在常数 $\delta > 0$ 及 $M \geqslant 1$ 使得, 对系统(4) 及初始条件(3) 的任意解 $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} | u_i(t) - u_i^* | \leqslant M \| \Phi - U^* \| \mathrm{e}^{-\delta t}.$$

另外, 对 Liapunov 函数 $V(\cdot)$, $\mathrm{D}^+ V$ 表示 $V(\cdot)$ 关于时间 t 沿(4) 的解轨线的右上 Dini 导数.

易证, 在本文所作的假设(H) 下, 系统(4) 必存在唯一的平衡点, 且(4) 连同初始条件(3) 的解在 $[0, +\infty)$ 上均有界.

2 全局吸引性和全局指数稳定性

定理 1 对系统(4), 假设(H) 成立. 如果

$$-b_j + L_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | < 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

则系统(4) 是全局吸引的.

定理 1 的证明将用到如下结果(即 Barbalat 引理).

引理 设函数 $f(\cdot): \mathbf{R}^+ := [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 一致连续且 $f(\cdot) \in L^1[0, +\infty)$, 则 $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

定理 1 的证明 设 $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$ 和 $V(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(4) 的任意两个解, 并记

$$f(t) := \sum_{i=1}^{n} | u_i(t) - v_i(t) |.$$

作函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(| u_i(t) - v_i(t) | + \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | L_j \int_{t-\tau_{ij}}^{t} | u_j(s) - v_j(s) | \mathrm{d}s \right),$$

则

$$\mathrm{D}^+ V(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(-b_j + L_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right) | u_j(t) - v_j(t) | \leqslant$$
$$L \sum_{j=1}^{n} | u_j(t) - v_j(t) | := -\beta f(t).$$

其中

$$L = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(-b_j + L_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right) < 0, \quad \beta := -L > 0.$$

任意取定 $T > 0$, 则对任意 $t > T$, 在 $[T, t]$ 上积分可得

$$V(t) - V(T) \leqslant -\beta \int_T^t f(s) \mathrm{d}s,$$

于是

$$\beta \int_T^t f(s) \mathrm{d}s \leqslant V(T) - V(t) \leqslant V(T) < +\infty,$$

所以

$$\int_T^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s < +\infty,$$

此即

$$f(\cdot) \in L^1[0, +\infty)\cdot$$

另外由于 $U(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$ 和 $V(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是解，故 $f(t)$ 有界且其右上 Dini 导数 $D^+ f$ 有界，于是 $f(t)$ 一致连续，由 Barbalat 引理知

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} | u_j(t) - v_j(t) | = 0,$$

从而系统是全局吸引的•

下面证明系统平衡点

$$U^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*) \in \mathbf{R}^n$$

是全局指数稳定的•

定理 2 对系统(4)，假设(H)成立• 如果

$$-b_j + L_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | < 0,$$

则系统(4)的平衡点 U^* 是全局指数稳定的•

证明 首先，如果 U^* 是系统(4)的平衡点，则有

$$\frac{\mathrm{d}(u_i(t) - u_i^*)}{\mathrm{d}t} = -b_i(u_i(t) - u_i^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[g_j(u_j(t)) - g_j(u_j^*)] \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)\cdot$$

根据已知条件，可以选取正数 $\delta > 0$ 充分小，使得

$$-b_j + \delta < 0,$$

且

$$-b_j + \delta + L_j \mathrm{e}^{\delta\tau} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)\cdot$$

作泛函

$$V(U)(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[| u_i(t) - u_i^* | \mathrm{e}^{\delta t} + \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | L_j \int_{t-\tau_{ij}}^{t} | u_j(s) - u_j^* | \mathrm{e}^{\delta(s+\tau_{ij})} \mathrm{d}s \right],$$

计算 V 沿(4)的解轨线的右上 Dini 导数，并估计得

$$\begin{aligned} D^+ V(U(t)) \leqslant & \sum_{i=1}^{n} \Big[-b_i | u_i(t) - u_i^* | \mathrm{e}^{\delta t} + \delta | u_i(t) - u_i^* | \mathrm{e}^{\delta t} + \\ & \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | | g_j(u_j(t-\tau_{ij})) - g_j(u_j^*) | \mathrm{e}^{\delta t} + \\ & \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | L_j | u_j(t) - u_j^* | \mathrm{e}^{\delta(t+\tau_{ij})} - \\ & \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | L_j | u_j(t-\tau_{ij}) - u_j^* | \mathrm{e}^{\delta t} \Big] \leqslant \\ & \sum_{i=1}^{n} \Big[(-b_i + \delta) | u_i(t) - u_i^* | \mathrm{e}^{\delta t} + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\delta\tau}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j|u_j(t)-u_j^*|\mathrm{e}^{\delta t}\Big] = \\
&\mathrm{e}^{\delta t}\sum_{j=1}^{n}\Big(-b_j+\delta+L_j\mathrm{e}^{\delta\tau}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\Big)|u_j(t)-u_j^*| \leqslant \\
&\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big(-b_j+\delta+L_j\mathrm{e}^{\delta\tau}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big)|u_j(t)-u_j^*| \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

从而对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\delta\tau}\sum_{j=1}^{n}|u_j(t)-u_j^*| \leqslant V(\boldsymbol{U})(t) \leqslant V(\boldsymbol{U})(0) = \\
&\quad\sum_{i=1}^{n}|u_i(0)-u_j^*| + \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j\int_{-\tau_{ij}}^{0}|u_j(s)-u_j^*|\mathrm{e}^{\delta(s+\tau_{ij})}\mathrm{d}s \leqslant \\
&\quad[1+L\tau\mathrm{e}^{\delta\tau}]\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(s)-u_j^*| := M\|\Phi-\boldsymbol{U}^*\|,
\end{aligned}
$$

其中,

$$
L := \max_{1\leqslant j\leqslant n}L_j\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,
$$

$$
M := 1+L\tau\mathrm{e}^{\delta\tau} > 1.
$$

从而

$$
\sum_{j=1}^{n}|u_j(t)-u_j^*| \leqslant M\|\Phi-\boldsymbol{U}^*\|\mathrm{e}^{-\delta\tau}, \qquad t\geqslant 0.
$$

因此系统(4)的平衡点 $\boldsymbol{U}^*$ 是全局指数稳定的.

[参 考 文 献]

[1] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two_stage neurons[J]. Proc Nat Acad Sci, 1984, **81**(10): 3088—3092.

[2] 张立明. 人工神经网络的模型及其应用[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1993.

[3] Goplasam K, He X. Stability in asymmetric hopfield nets with transmission delays[J]. Phys D, 1994, **76**(4): 344—358.

[4] Makucus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural networks with asymmetric connection weights[J]. Phys Rev A, 1989, **39**(1): 347—359.

[5] Tank D, Hopfield J J. Simple neural optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming network[J]. IEEE Trans Circuits Systems, 1986, **33**(5): 533—541.

[6] Van Den Driessche P, Zou X. Global attractivity in delayed hopfield neural networks models[J]. SIAM J Appl Math, 1998, **58**(6): 1878—1890.

[7] Matsuoka K. Stability conditions for nonlinear continuous networks with asymmetric connection weights[J]. Netural Neworks, 1992, **5**(3): 495—500.

[8] 梁学斌, 吴立德. Hopfield型神经网络的全局指数稳定性及其应用[J]. 中国科学(A辑), 1995, **25**(5): 523—532.

[9] 梁学斌, 吴立德. 关于Hopfield型神经网络的全局指数稳定性[J]. 科学通报, 1996, **41**(15): 1434—1438.

[10] Morita M. Associative memory with non_monotone dynamics[J]. Neural Networks, 1993, **6**(1): 115—126.

Global Attractivity and Global Exponential Stability for Delayed Hopfield Neural Network Models

PU Zhi_lin[1,2], XU Dao_yi[2]

(1. Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China;

2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: Some global properties such as global attractivity and global exponential stability for delayed Hopfield neural networks model, under the weaker assumptions on nonlinear activation functions, are concerned. By constructing suitable Liapunov function, some simpler criteria for global attractivity and global exponential stability for Hopfield continuous neural networks with time delays are presented.

Key words; neural networks; global attractivity; global exponential stability