应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 05_0477_06

Brusselator 反应扩散模型的 Auto_Darboux 变换和精确解*

闫振亚, 张鸿庆

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 首先用改进的齐次平衡法, 获得了 Brusselator 反应扩散模型的 Auto_Darboux 变换(ADT)• 基于这个 ADT, 若干精确解被得到, 其中包括一些作者的已知结果• 然后, 通过用一系列变换, 这个模型约化为一个非线性反应扩散方程• 再采用 sine_consine 方法, 获得了更多的精确解, 其中包括新的孤子解•

关 键 词: Brusselator 反应模型; Darboux 变换; 精确解; 孤子解
中图分类号: O175. 29 文献标识码: A

引 言

Brusselator 反应扩散模型在生物和化学中具有重要的作用• 自从 Prigogine 和 Lefever 于 1968 年提出这个反应模型以来, 人们已经非常关注它并且用不同的方法研究了它的很多的性质[1~5]•

$$Ku_{xx} - u_t + u^2 v - Bu = 0, \tag{1a}$$
$$Kv_{xx} - v_t - u^2 v + Bu = 0, \tag{1b}$$

其中 B 为常数, K 为扩散系数, 函数 $u(x, t)$ 及 $v(x, t)$ 表示浓缩• 系统(1) 描述一个生化模型•

本文安排如下: 在第 1 节, 借助于 MATHEMATICA, 通过用改进的齐次平衡法[6, 7]我们得到了系统(1) Auto_Darboux 变换以及一些新的精确解• 在第 2 节, 首先用一系列变换, 系统(1) 约化为一个非线性发展方程, 然后采用 sine_cosine 法[8~ 10]及吴消元法[11], 又获得了系统(1) 的精确解, 其中包含 Ndayirinde 的结论[4]• 第四部分给出一些结论•

1 Auto_Darboux 变换和精确解

根据改进的齐次平衡法的思想[6, 7], 我们假设系统(1) 有如下形式的解

$$u(x, t) = f'\phi_x + u_1, \quad v(x, t) = g'\phi_x + v_1, \tag{2}$$

---

* 收稿日期: 1999_11_01; 修订日期: 2000_12_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572022); 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1998030600) ; 教育部博士点基金资助项目(98014119)
作者简介: 闫振亚(1974—) , 男, 河南上蔡人, 博士.

其中$f = f(\phi)$, $g = g(\phi)$, $\phi = \phi(x, t)$, $u_1 = u_1(x, t)$, $v_1 = v_1(x, t)$ 为待定的函数• 借助于 MATHEMATICA, 将方程(2) 代入系统(1), 得

$$\begin{aligned} Ku_{xx} - u_t - Bu + u^2 v = {} & (Kf''' + f'^2 g')\phi_x^3 + (3K\phi_x\phi_{xx} f'' + 2\phi_x^2 u_1 f' g' + \phi_x^2 v_1 f'^2) + \\ & (K\phi_{xxx} f' - B\phi_x f' - \phi_{xt} f' + \phi_x u_1^2 g' + 2\phi_x u_1 v_1 f') + \\ & (Ku_{1xx} - u_{1t} + u_1^2 v_1 - Bu_1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} Kv_{xx} - v_t + Bu - u^2 v = {} & (Kg''' - f'^2 g')\phi_x^3 + (3K\phi_x\phi_{xx} g'' - \\ & \phi_x\phi_t g'' - 2\phi_x^2 u_1 f' g' - \phi_x^2 v_1 f'^2 + (K\phi_{xxx} g' + B\phi_x f' - \phi_{xt} g' - \\ & \phi_x u_1^2 g' - 2\phi_x u_1 v_1 f') + (Kv_{1xx} - v_{1t} + Bu_1 - u_1^2 v_1) = 0 \cdot \end{aligned} \tag{4}$$

令上两个方程中 ϕ_x^3 的系数分别为零, 我们有

$$Kf''' + f'^2 g' = 0, \quad Kg''' - f'^2 g' = 0 \cdot \tag{5}$$

其有如下的特解

$$f(\phi) = \sqrt{2K} \ln\phi, \quad g(\phi) = - \sqrt{2K} \ln\phi \qquad (K > 0) \cdot \tag{6}$$

因此, 我们容易得到如下的关系

$$f'^2 = - \sqrt{2K} f'', \quad g' = - f', \quad f'^2 = \sqrt{2K} g'', \quad f' g' = \sqrt{2K} f'' = - \sqrt{2K} g'' \cdot \tag{7}$$

将(5) 式及(7) 式分别代入(3) 式和(4), 得

$$\begin{aligned} Ku_{xx} - u_t - Bu + u^2 v = {} & (3K\phi_x\phi_{xx} - \phi_x\phi_t + 2\sqrt{2K}\phi_x^2 u_1 - \sqrt{2K}\phi_x^2 v_1) f'' + \\ & (K\phi_{xxx} - B\phi_x - \phi_{xt} - \phi_x u_1^2 + 2\phi_x u_1 v_1) f' + \\ & (Ku_{1xx} - Bu_1 - u_{1t} + u_1^2 v_1) f^0 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Kv_{xx} - v_t + Bu - u^2 v = {} & (3K\phi_x\phi_{xx} - \phi_x\phi_t + 2\sqrt{2K}\phi_x^2 u_1 - \sqrt{2K}\phi_x^2 v_1) g'' + \\ & (K\phi_{xxx} - B\phi_x - \phi_x\phi_t - \phi_x u_1^2 + 2\phi_x u_1 v_1) g' + (Kv_{1xx} + Bu_1 - u_1^2 v_1 - v_1 t) g^0 = 0 \cdot \end{aligned} \tag{9}$$

设(8) 式中f'', f', f^0 的系数及(9) 式中 g'', g', g^0 的系数为零, 产生一个关于 $\phi(x, t)$, $u_1(x, t)$, $v_1(x, t)$ 的偏微分方程组

$$3K\phi_{xx} - \phi_t + 2\sqrt{2K}\phi_x u_1 - \sqrt{2K}\phi_x v_1 = 0, \tag{10a}$$

$$K\phi_{xxx} - B\phi_x - \phi_{xt} - \phi_x u_1^2 + 2\phi_x u_1 v_1 = 0, \tag{10b}$$

$$Ku_{1xx} - u_{1t} - Bu_1 + u_1^2 v_1 = 0, \tag{10c}$$

$$Kv_{1xx} - v_{1t} + Bu_1 - u_1^2 v_1 = 0 \cdot \tag{10d}$$

根据(10c) 及(10d), 我们知 u_1, v_1 为系统(1) 的解, 将(6) 代入(2) 式, 得到一个系统(1) 的 Auto_Darboux 变换

$$u(x, t) = \sqrt{2K} \frac{\partial}{\partial x} \ln\phi + u_1, \quad v(x, t) = - \sqrt{2K} \frac{\partial}{\partial x} \ln\phi + v_1, \tag{11}$$

其中 ϕ, u_1, v_1 由方程(10a) ~ (10d) 确定• 这个 Auto_Darboux 变换与 Chacdhury 的结论[12] 是一样的• 但是这儿我们用一个不同的方法•

现在我们用上面获得的 Auto_Darboux 变换来考虑系统(1) 的精确解• 分一些情况如下:

情况 i 当 $u_1 = 0$, $v_1 = a$ (a 为一任意的常数), 根据相容条件 $\phi_{xt} = \phi_{tx}$, 从(10a) 及(10b) 式, 获得一个关于 $\phi(x, t)$ 的常微分方程

$$2K\phi_{xxx} - a\sqrt{2K}\phi_{xx} + B\phi_x = 0, \tag{12}$$

其特征方程为

$$2K\lambda^3 - a\sqrt{2K}\lambda^2 + B\lambda = 0 \cdot \tag{13}$$

情况 ia) 当 $a^2-4B>0$, 方程(13) 的三个根为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4B}}{2\sqrt{2K}},\quad \lambda_3=\frac{a-\sqrt{a^2-4B}}{2\sqrt{2K}}.$$

因此, 方程(12) 有如下的通解

$$\phi(x,t)=a_1(t)+a_2(t)\exp[\lambda_2 x]+a_3(t)\exp[\lambda_3 x].\tag{14}$$

其中 $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ 为待定的函数. 将(14) 代入(10a), 得

$$a_1'(t)+[a_2'(t)-b_2a_2(t)]\exp(\lambda_2 x)+[a_3'(t)-b_3a_3(t)]\exp(\lambda_3 x)=0.\tag{15}$$

其中 $b_2=(a^2-6B+a\sqrt{a-4B})/4$, $b_3=(a^2-6B-a\sqrt{a^2-4B})/4$. 根据 1, $\exp(\lambda_2 x)$, $\exp(\lambda_3 x)$ 是线性无关的, 我们从方程(15) 得到如下的方程

$$a_1'(t)=0,\quad a_2'(t)-b_2a_2(t)=0,\quad a_3'(t)-b_3a_3(t)=0\tag{16}$$

其有通解如下

$$a_1(t)=c_1,\quad a_2(t)=c_2\exp(b_2t),\quad a_3(t)=c_3\exp(b_3t),\tag{17}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意的常数. 结合(11), (12) 及(14), 获得系统(1) 的双孤子解

$$u(x,t)=\sqrt{2K}\,\frac{c_2\lambda_2\exp(\lambda_2x+b_2t)+c_3\lambda_3\exp(\lambda_3x+b_3t)}{c_1+c_2\exp(\lambda_2x+b_2t)+c_3\exp(\lambda_3x+b_3t)},$$

$$v(x,t)=-u(x,t)+a.$$

Ndayirinde 的结论为该解的特例[4].

情况 ib) 当 $a^2=4B$ 时, 我们得到系统(1) 的另一精确解

$$u(x,t)=\frac{(\pm\sqrt{B}c_2+B\sqrt{2K}t+c_3\sqrt{2K}\pm\sqrt{B}c_3x)\exp\left(\pm\sqrt{\dfrac{B}{2K}}x-\dfrac{B}{2}t\right)}{c_1+(c_2+\sqrt{2K}Bt+c_3x)\exp\left(\pm\sqrt{\dfrac{B}{2K}}x-\dfrac{B}{2}t\right)},$$

$$v(x,t)=-u(x,t)\pm2\sqrt{2B}.$$

情况 ii 设 $u_1=a$, $v_1=B/a$(a 为任意的常数且不为零), 根据相容条件 $\phi_{xt}=\phi_{tx}$, 从(10a) 及(10b) 式, 获得另一关于 $\phi(x,t)$ 的常微分方程

$$2K\phi_{xxx}+\left(2a\sqrt{2K}-\sqrt{2K}\frac{B}{a}\right)\phi_{xx}+(a^2-B)\phi_x=0\tag{18}$$

其特征方程为

$$2K\lambda^3+\left(2a\sqrt{2K}-\frac{B\sqrt{2K}}{a}\right)\lambda^2+(a^2-B)\lambda=0.\tag{19}$$

有一些情况须进一步的讨论:

情况 iia) 当 $a^2-B\neq0$. 与情况 i 同理, 又获得了系统(1) 的精确解

$$u(x,t)=\frac{-ac_2\exp\left[-\dfrac{a}{\sqrt{2K}}x+\left(B-\dfrac{1}{2}a^2\right)t\right]+c_3\dfrac{B-a^2}{a}\exp\left(\dfrac{B-a^2}{a\sqrt{2K}}x+\dfrac{B^2-a^4}{2a^2}t\right)}{c_1+c_2\exp\left[-\dfrac{a}{2K}x+\left(B-\dfrac{1}{2}a^2\right)t\right]+c_3\exp\left(\dfrac{B-a^2}{a\sqrt{2K}}x+\dfrac{B^2-a^4}{2a^2}t\right)}+a,$$

$$v(x,t)=-u(x,t)+a+\frac{B}{a},$$

其中

c_1, c_2, c_3 为任意的常数.

情况 iib) 当 $a^2-B=0$ 时, 系统(1) 另一精确解为

$$u(x,t)=\frac{c_2\sqrt{2K}-c_3\sqrt{B}\exp\left(-\sqrt{\frac{B}{2K}}x-\frac{B}{2}t\right)}{c_1+c_2\sqrt{2KB}t+c_2x+c_3\exp\left(-\sqrt{\frac{B}{2K}}x-\frac{B}{2}t\right)}\pm\sqrt{B},$$

$$v(x,t)=\frac{-c_2\sqrt{2K}+c_3\sqrt{B}\exp\left(-\sqrt{\frac{B}{2K}}x-\frac{B}{2}t\right)}{c_1+c_2\sqrt{2KB}t+c_2x+c_3\exp\left(-\sqrt{\frac{B}{2K}}x-\frac{B}{2}t\right)}\pm\sqrt{B},$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意的常数• 注意: Chacdhury 的结论[12]为此解的特例•

2 系统(1)新的孤波解

对给定的系统(1), 我们做如下的变换

$$u=w,\quad v=-w,\quad x=\pm y,\quad t=t\text{•} \tag{20}$$

将(20)分别代入(1a)及(1b)中, 则系统(1)约化为一个关于 $w(y,t)$ 的非线性反应扩散方程

$$Kw_{yy}-w_t-Bw-w^3=0\text{•} \tag{21}$$

下面我们考虑方程(21), 令

$$w=\phi(\xi),\quad \xi=D(y-\lambda t+c)\text{•} \tag{22}$$

其中 D, λ 为待定的常灵敏, c 为任意的常数• 将(22)代入(21), 得

$$KD^2\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}+D\lambda\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}-B\phi-\phi^3=0, \tag{23}$$

根据 sime_cosine 法[8, 9, 10]的思想, 我们假设方程(23)有如下形式的解

$$\phi(\xi)=A_0+B_i\sin\omega+A_1\cos\omega, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\xi}=\sin\omega\text{•} \tag{25}$$

借助于MATHEMATICA, 将(24)及(25)代入(23)并且收集所有的 $\sin^n\omega\cos^m\omega(n=0,1;m=0,1,2,3)$ 项, 得

$$\begin{aligned}KD^2\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}&+D\lambda\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}-B\phi-\phi^3=KD^2(-B_1\sin\omega-2A_1\cos\omega+\\&2B_1\sin\omega\cos^2\omega+2A_1\cos^2\omega+D\lambda(-A_1+B_1\sin\omega\cos\omega+A_1\cos^2\omega)-\\&B(A_0+B_1\sin\omega+A_1\cos\omega)-(3A_0B_1^2+A_0^3+3A_1B_1^2\cos\omega+3A_1A_0^2\cos\omega-\\&3A_0B_1^2\cos^2\omega+3A_0A_1^2\cos^2\omega+A_1^3\cos^3\omega-3A_1B_1^2\cos^3\omega)-\\&(B_1^3+3B_1A_0^2-6A_0A_1B_1\cos\omega+3A_1^2B_1\cos^2\omega-B_1^3\cos^2\omega)\sin\omega=0\text{•}\end{aligned}$$

设上述方程中 $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\cos^2\omega$, $\sin\omega\cos^2\omega$, $\cos^3\omega$ 的系数及常数项为零, 得到一个关于 $A_0, A_1, B_1, D, \lambda$• 代数多项式方程系统

$$BA_0+3A_0B_1^2+A_0^3+D\lambda A_1=0, \tag{26a}$$

$$KD^2B_1+BB_1+B_1^3+3A_0^2B_1=0, \tag{26b}$$

$$2KD^2A_1+BA_1+3A_1B_1^2+3A_1A_0^2=0, \tag{26c}$$

$$6A_0A_1B_1-D\lambda B_1=0, \tag{26d}$$

$$3A_0B_1^2-3A_0A_1^2+D\lambda A_1=0, \tag{26e}$$

$$2KD^2B_1+B_1^3-3A_1^2B_1=0, \tag{26f}$$

$$2KD^2A_1 - A_1^3 + 3A_1B_1^2 = 0• \tag{26g}$$

通过分离变量技巧, 方程(25)的解表示为

$$\sin\omega = \frac{2B\exp(\pm\xi)}{C^2\exp(\pm 2\xi) + 1} = \operatorname{sech}\xi \tag{27}$$

或

$$\cos\omega = \frac{1 - C^2\exp(\pm 2\xi)}{1 + C^2\exp(\pm 2\xi)} = \mp\tanh\xi, \tag{28}$$

其中 $C = 1$ 为积分常数• 通过用吴消元法[11] 解方程组(26a) ~ (26g), 并且结合(20) ~ (24), (27) 及(28), 推得系统(1) 如下的六组精确解

情况 1　当 $A_0 = A_1 = \lambda = 0, D^2 = \frac{B}{K}, B_1^2 = -2B$ 时, 系统(1) 的钟型孤波解为

$$u(x, t) = B_1\operatorname{sech}D(\pm x + c), \quad v(x, t) = -B_1\operatorname{sech}D(\pm x + c)•$$

情况 2　当 $A_0 = B_1 = \lambda = 0, D^2 = -\frac{B}{2K}, A_1^2 = -B$ 时, 系统(1) 的扭型孤波解为

$$u(x, t) = A_1\tanh D(\pm x + c), v(x, t) = -A_1\tanh D(\pm x + c)•$$

情况 3　当 $A_0 = \lambda = 0, A_1^2 + B_1^2 = 0, D^2 = -2B/K, A_1^2 = -B$ 时, 系统(1) 的新的孤波解为

$$u(x, t) = A_1(\tanh\xi \pm \mathrm{i}\operatorname{sech}\xi) = A_1\exp\left\{\pm\mathrm{i}\arcsin\operatorname{sech}[D(\pm x + c)]\right\}•$$

$$v(x, t) = -u(x, t)•$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$•

情况 4　当 $B_1 = 0, D^2 = -\frac{B}{8K}, A_1^2 = A_0 = -\frac{B}{4}, \lambda = \frac{3A_0A_1}{D}$ 系统(1) 的另一扭型孤波解为

$$u(x, t) = A_0 + A_1\tanh D(\pm x - \lambda t + c), v(x, t) = -u(x, t)•$$

情况 5　当 $B_1 = 0, D^2 = \frac{B}{10K}, A_1^2 = \frac{B}{5}, A_0^2 = -\frac{2B}{5}, \lambda = \frac{3A_0A_1}{D}$• 系统另一扭型孤波解为

$$u(x, t) = A_0 + A_1\tanh D(\pm x - \lambda t + c), v(x, t) = -u(x, t)•$$

情况 6　当 $A_1^2 + B_1^2 = 0, A_0^2 = A_1^2 = -\frac{B}{4}, D^2 = -\frac{B}{2K}, \lambda = \frac{6A_0A_1}{D}$• 系统(1) 的新的孤波解为

$$u(x, t) = A_0 + A_1(\tanh\xi \pm \mathrm{i}\operatorname{sech}\xi) = A_0 + A_1\exp\left\{\pm\mathrm{i}\arcsin\operatorname{sech}[D(\pm x - \lambda t + c)]\right\},$$

$$v(x, t) = -u(x, t)•$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$•

3 结　　论

总之, 我们获得了系统(1)很多形式的精确解, 其中包含以前没有出现的解• 这些解对于解释一些物理现象或许是有实际的价值• 因此, 改进的齐次平衡法及 sine_csine 法为两种较好方法用于解系统(1)• 它们也可以用其它的方程, 如(2+ 1)_维 KdV 方程, 耦合 KdV 方程, KdV_Burgers 方程, Boussinesq 方程, BBM 方程, 广义 KdV 方程以及变系数非线性发展方程等•

[参 考 文 献]

[1] Lefever R, Herschkowitz_Kaufman M, Turner J M. The steady_state solutions of the Brusselator model[J]. Phys Lett A, 1977, **60**(3): 389—396.

[2] Vani P K, Ramanufam G A, Kaliappan P. Painleve analysis and particular of a coupled nonlinear reaction diffusion system[J]. J Phys A: Math Gen, 1993, **26**(3): L97—L100.

[3] Pickering A. A new truncation in Painleve analysis[J]. J Phys A: Math Gen, 1993, **26**(20): 4395—4406.

[4] Ndayirinde I, Malfliet W. New special solutions of the 'Brusselator' reaction model[J]. J Phys A: Math Gen, 1997, **30**(14): 5151—5158.

[5] Larsen A L, Weiss approach to a pair of coupled nonlinear reaction_diffusion equations[J]. Phys Lett A, 1993, **179**(2): 284—290.

[6] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法[J]. 物理学报, 1998, **47**(7): 1254—1260.

[7] YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing. Backlund transformation and exact solutions for (2+1)_dimensional KPP equation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 1999, **4**(2): 146—150.

[8] YAN C C. A simple transformation for nonlinear waves[J]. Phys Lett A, 1996, **224**(1): 77—84.

[9] YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing. Explicit exact solutions for the variant Boussinesq equation in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 1999, **252**(3): 291—297.

[10] 闫振亚, 张鸿庆, 范恩贵. 一类非线性演化方程新的显式精确解[J]. 物理学报, 1999, **48**(1): 1—5.

[11] Wu W. On zeros of algebra equations[J]. Kexue Tongbao, 1986, **31**(1): 1—5.

[12] Chacdhury S R. Painleve analysis and special solutions of two families of reaction_diffusion equations [J]. Phys Lett A, 1991, **159**(6): 311—317.

Auto_Darboux Transformation and Exact Solutions of the Brusselator Reaction Diffusion

YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: Firstly, using the improved homogeneous balance method, an auto_Darboux transformation (ADT) for the Brusselator reaction diffusion model is found. Based on the ADT, several exact solutions are obtained which contain some authors' results known. Secondly, by using a series of transformations, the model is reduced into a nonlinear reaction diffusion equation and then through using sine_cosine method, more exact solutions are found which contain soliton solutions.

Key words: Brusselator reaction model; Darboux transformation; homogeneous balance method; sine_cosine method; exact solution