应用数学和力学, 第 22 卷 第 5 期(2001 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 05_0499_05

完备和紧度量空间中的不动点

M. 特尔西

(土耳其崔克亚大学 文理科学学院 数学系, 爱迪仁 22030)

(钱伟长推荐)

摘要: 利用实函数性质, 建立了两类度量空间中的几个不动点定理, 推广了 Fisher 的有关定理

关 键 词: 不动点; 完备度量空间; 紧度量空间

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

文献[1]证明了如下不动点定理:

定理 1 设 (X, d) 和 $(Y, \ \ )$ 为完备度量空间, T 为 X 到 Y 的映射, S 为 Y 到 X 的映射并满足下列不等式:

对任意 x X 和 y Y 有

$$
\begin{aligned}
&(Tx, TSy) \quad c\max\{d(x, Sy), \ (y, Tx), \ (y, TSy)\},\\
&d(Sy, STx) \quad c\max\{\ (y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)\},
\end{aligned}
$$

其中 0 $c < 1$, 则 ST 有唯一不动点 z X, TS 有唯一不动点 w Y, 且 $Tz = w$, $Sw = z$

本文中, $\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集合

$\mathscr{F}$表示实函数 $f: \mathbf{R}_+^3$ $\mathbf{R}_+$ 的集合, 满足

) 对每一坐标变量, f 是上半连续的;

) 对所有 u, v 0, 无论 u $f(v, 0, u)$ 或 u $f(v, u, 0)$, 均存在一实常数 0 $c < 1$ 使 u cv

1 完备度量空间中的不动点

推广定理 1 得

定理 2 设 (X, d) 和 $(Y, \ \ )$ 为完备度量空间, T 为 X 到 Y 的映射, S 为 Y 到 X 的映射并满足下列不等式:

对任意 x X 和 y Y,

$$(Tx, TSy) \quad f(d(x, Sy), \ (y, Tx), \ (y, TSy)), \tag{1}$$

$$d(Sy, STx) \quad g(\ (y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)), \tag{2}$$

其中 f, g $\mathscr{F}$, 则 ST 有唯一不动点 z X, TS 有唯一不动点 w Y, 且 $Tz = w$, $Sw = z$

收稿日期: 2000_04_05
本文原文为英文, 吴承平译, 杨砚校.

证明 设 x 为 X 中任一点, 分别定义 X 中序列 $\{x_n\}$ 和 Y 中序列 $\{y_n\}$ 为

$$x_n = (ST)^n x, \quad y_n = T(ST)^{n-1} x \qquad (n = 1, 2, \quad)$$

若对所有 n, $x_n \quad x_{n+1}$ 且 $y_n \quad y_{n+1}$, 或对某些 n, $x_n = x_{n+1}$ 且 $y_n = y_{n+1}$, 则可取 $z = x_n$ 及 $w = y_n$

现令 $c = \max\{a, b\}$, 其中 a、b 分别为对于 f 和 g 的实常数且满足条件)

应用不等式(1) 并利用性质), 有

$$\begin{aligned}(y_n, y_{n+1}) &= (Tx_{n-1}, TSy_n) \\ & \quad f(d(x_{n-1}, x_n), 0, (y_n, y_{n+1})),\end{aligned}$$

即

$$(y_n, y_{n+1}) \quad cd(x_{n-1}, x_n) \tag{3}$$

类似地, 应用不等式(2) 并利用性质( ), 有

$$\begin{aligned}d(x_n, x_{n+1}) &= d(Sy_n, STx_n) \\ & \quad g((y_n, y_{n+1}), 0, d(x_n, x_{n+1})),\end{aligned}$$

即

$$d(x_n, x_{n+1}) \quad c (y_n, y_{n+1}) \tag{4}$$

由(3) 和(4) 有

$$d(x_n, x_{n+1}) \quad c (y_n, y_{n+1}) \quad c^2 d(x_{n-1}, x_n)$$

因此利用归纳法可得

$$d(x_n, x_{n+1}) \quad c (y_n, y_{n+1}) \quad c^{2n} d(x, x_1) \qquad (n = 1, 2, \quad)$$

由于 $c < 1$, 因此 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 为 Cauchy 序列其极限为 $z \quad X$ 和 $w \quad Y$

利用不等式(1), 有

$$\begin{aligned}(Tz, y_n) &= (Tz, TSy_{n-1}) \\ & \quad f(d(z, x_{n-1}), (y_{n-1}, Tz), (y_{n-1}, y_n))\end{aligned}$$

令 n 趋于无穷大并利用), 可得

$$(Tz, w) \quad f(0, (w, Tz), 0),$$

再利用) 可得出 $w = Tz$

利用不等式(2), 有

$$\begin{aligned}d(Sw, x_n) &= d(Sw, STx_{n-1}) \\ & \quad g((w, y_n), d(x_{n-1}, Sw), d(x_{n-1}, x_n))\end{aligned}$$

令 n 趋于无穷大并利用), 可得

$$d(Sw, z) \quad g(0, d(z, Sw), 0),$$

再利用) 可得出 $z = Sw$

因此 $STz = Sw = z$, $TSw = Tz = w$, 且使 ST 有一不动点 z, TS 有一不动点 w

现证唯一性, 令 ST 和 TS 分别有另一不动点 z 和 w 则根据不等式(1) 和性质), 有

$$\begin{aligned}(w, w\ ) &= (TSw, TSw\ ) = (Tz, TSw\ ) \\ & \quad f(d(z, Sw\ ), (w\ , w), 0) \\ & \quad f(d(Sw, Sw\ ), (w\ , w), 0),\end{aligned}$$

因此又有

$$(w, w\ ) \quad cd(Sw, Sw\ ) \tag{5}$$

同样, 根据不等式(2) 和性质), 有

$$d(Sw, Sw\ ) = d(STSw, STSw\ )$$
$$g(\ \ (TSw, TSw\ ), d(Sw\ , Sw), 0)$$
$$g(\ \ (w, w\ ), d(Sw\ , Sw), 0),$$

即

$$d(Sw, Sw\ ) \quad c\ (w, w\ ) \tag{6}$$

由不等式(5) 和(6), 有

$$(w, w\ ) \quad cd(Sw, Sw\ ) \quad c^2\ (w, w\ ),$$

因为 $c < 1$, 因而 $w = w$ TS 的不动点 w 必唯一

$TSz = z$ 意味着 $TSTz = Tz$, 从而 $Tz = w$ 因此

$$z = STz = Sw = STz = z,$$

这就证明了 z 是 ST 的唯一不动点, 定理证毕

注 令 $f(u, v, w) = g(u, v, w) = c\max\{u, v, w\}$ $(0 \quad c < 1)$, 则可看出定理 1 是定理 2 的结论

推论 1 设 (X, d) 和 $(Y,\ \ )$ 为完备度量空间, T 为 X 到 Y 的映射, S 为 Y 到 X 的映射并满足下列条件之一:

对所有 $x \quad X, y \quad Y$,

$$(Tx, TSy) \quad c\max\{d(x, Sy),\ \ (y, Tx),\ \ (y, TSy)\},$$
$$d(Sy, STx) \quad e\max\{\ \ (y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)\},$$

其中 $0 \quad c, e < 1$;

$$(Tx, TSy)^q \quad d(x, Sy)^q + \ \ (y, Tx)^q + \ \ (y, TSy)^q,$$
$$d(Sy, STx)^r \quad k\ (y, Tx)^r + ld(x, Sy)^r + md(x, STxy)^r,$$

其中 $q, r > 0$, 、、、k、l、m 为非负实数, 且 $+ \ + \ < 1$, $k + l + m < 1$;

$$(Tx, TSy) \quad c\max\{d(x, Sy),\ \ (y, Tx),\ \ (y, TSy)\},$$
$$d(Sy, STx)^r \quad k\ (y, Tx)^r + ld(x, Sy)^r + md(x, STx)^r,$$

其中 $r > 0$, $0 \quad c < 1$, k、l、m 为非负实数, 且 $k + l + m < 1$ 则 ST 有唯一不动点 $z \quad X$, TS 有唯一不动点 $w \quad Y$ 从而 $Tz = w$, $Sw = z$

证明 定义映射 $f, g: \mathbf{R}_+^3 \quad \mathbf{R}_+$,

$$f(u, v, w) = c\max\{u, v, w\}, \quad g(u, v, w) = e\max\{u, v, w\},$$

其中 $0 \quad c, e < 1$, 又定义映射 $h, j: \mathbf{R}_+^3 \quad \mathbf{R}_+$,

$$h(u, v, w) = (\ u^q + \ v^q + \ w^q)^{1/q}, j(u, v, w) = (ku^r + lv^r + mw^r)^{1/r},$$

其中 $q, r > 0$, 、、、k、l、m 为非负实数, 且 $+ \ + \ < 1$, $k + l + m < 1$, 则 $f, g, h, j \quad \mathscr{F}$ 证毕

当 $(X, d) = (Y,\ \ )$, $S = T$ 时, 由定理 2 可直接得出如下推论:

推论 2 设 (X, d) 为完备度量空间, T 为 X 的自映射并满足如下不等式:

对所有 $x, y \quad X$,

$$d(Tx, T^2y) \quad f(d(x, Ty), d(y, Tx), d(y, T^2y)),$$

其中 $f \quad \mathscr{F}$, 则 T 有唯一不动点 $z \quad X$

2 紧度量空间中的不动点

令 $\mathscr{F}^*$ 为满足如下条件的所有函数 $f: \mathbf{R}_+^3 \quad \mathbf{R}_+$:

$)^*$ 若对所有 $u, v \quad 0, u < f(v, 0, u)$ 或 $u < f(v, u, 0)$, 则 $u < \quad v$

现证紧度量空间中的不动点定理

定理 3 设 (X, d) 和 $(Y, \quad)$ 为紧度量空间, T 为 X 到 Y 的连续映射, S 为 Y 到 X 的连续映射且满足下列不等式:

对所有 $x \quad X, y \quad Y, x \quad Sy$,

$$(Tx, TSy) < f(d(x, Sy), \quad (y, Tx), \quad (y, TSy)), \tag{7}$$

其中 $f \quad \mathscr{F}^*$;

对所有 $x \quad X, y \quad Y, y \quad Tx$,

$$d(Sy, STx) < \quad g(\quad (y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)), \tag{8}$$

其中 $g \quad \mathscr{F}^*$;

则 ST 有唯一不动点 $z \quad X$, TS 有唯一不动点 $w \quad Y$, 且 $Tz = \quad w$, $Sw = \quad z$

证明 由 $(x) = \quad d(x, STx)$ 定义的函数 $: X \quad R_+$ 在 X 上连续 由于 X 是紧的, 则存在一点 $u \quad X$, 使

$$(u) = \quad d(u, STu) = \quad \min\left\{d(x. STx); x \quad X\right\}$$

若令 $Tu \quad TSTu$, 则 $u \quad STu$

因为 $Tu \quad TSTu$, 由不等式(8) 和条件 $)^*$ 有

$$d(STu, STSTu) g(\quad (Tu, TSTu), 0, d(STu, STSTu)),$$

且

$$d(STu, STSTu) < \quad (Tu, TSTu) \tag{9}$$

又因为 $u \quad STu$, 由不等式(7) 和条件 $)^*$ 有

$$(Tu, TSTu) < f(d(u, STu), 0, \quad (Tu, TSTu)),$$

且

$$(Tu, TSTu) < \quad d(u, STu) \tag{10}$$

由不等式(9) 和(10) 可推得

$$(STu) = \quad d(STu, STSTu) < \quad d(u, STu) = \quad (u),$$

矛盾 因此 $TSTu = \quad Tu$ 若设 $Tu = \quad w$ 及 $Sw = \quad z$, 则有

$$ST(STu) = \quad S(TSTu) = \quad STu = \quad Sw = \quad z, w = \quad Tu = \quad TS(Tu) = \quad T(STu) = \quad Tz$$

因此, $Sw = \quad z$ 为 ST 的一个不动点, $Tz = \quad w$ 为 TS 的一个不动点

现证唯一性, 设 ST 有另一不动点 z , 由于 $Tz \quad Tz$, 由不等式(8) 和条件 $)^*$, 有

$$d(z, z \ ) = \quad d(STz, STz \ ) < \quad g(\quad (Tz, Tz \ ), d(z \ , z), 0),$$

即

$$d(z, z \ ) < \quad (Tz, Tz \ ) \tag{11}$$

因为 $z = \quad z \quad = \quad STz$, 进而由不等式(7) 和条件 $)^*$ 有

$$(Tz, Tz \ ) = \quad (Tz, TSTz \ ) < f(d(z, z \ ), \quad (Tz \ , Tz), 0),$$

即

$$(Tz, Tz \ ) < \quad d(z, z \ ) \tag{12}$$

由(11)和(12)又可得出

$$d(z, z\ ) < \quad (Tz, Tz\ ) < d(z, z\ ),$$

矛盾,因此不动点 z 只能是唯一的

类似地, w 是 TS 的唯一不动点 证毕

由定理 3,我们可得出如下推论:

推论 3 设 (X, d) 和 $(Y, \ )$ 为紧度量空间, T 为 X 到 Y 的连续映射, S 为 Y 到 X 的连续映射并满足下列不等式:

对所有 $x \quad X, y \quad Y, x \quad Sy$ 有

$$(Tx, TSy) < \max\{d(x, Sy), \ (y, Tx), \ (y, TSy)\},$$

且对所有 $x \quad X, y \quad Y, y \quad Tx$ 有

$$d(Sy, STx) < \max\{\ (y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)\}$$

则 ST 有唯一不动点 $z \quad X$, TS 有唯一不动点 $w \quad Y$, 且 $Tz = w$, $Sw = z$

推论 4 设 (X, d) 为紧度量空间, T 为 X 的连续自射映且满足下列不等式:

对所有 $x, y \quad X, x \quad Ty$, 有

$$d(Tx, T^2y) < f(d(x, Ty), d(y, Tx), d(y, T^2y)),$$

其中 $f \quad \mathscr{F}^*$, 则 T 有唯一不动点 $z \quad X$

推论 3、4 的证明请参见 Fisher 的[1]

[参 考 文 献]

[1] Fisher B. Fixed point on two metric spaces[J]. Glasnik Matematicki, 1981, **16**(36): 333 337.

Fixed Points on Two Complete and Compact Metric Spaces

M. Telci

(Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science,

Trakya University, 22030 Ediren, Turkey)

Abstract: By using functions, some related fixed point theorems on two metric spaces are established. These results generalize some theorems of Fisher.

Key words: fixed point; complete metric space; compact metric space