应用数学和力学, 第 22 卷 第 5 期(2001 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 05_0529_05

独立的无界随机变量和的概率不等式

张涤新[1], 王志诚[2]

(1 广东商学院 统计学系, 广州 510320;
2 北京大学 光华管理学院金融系, 北京 100871)

(周焕文推荐)

摘要: 研究了在概率空间(, T, P) 上, 独立的无界随机变量和尾部概率不等式, 提出了一种用切割原始概率空间(, T, P) 的新型方法去处理独立的无界随机变量和 给出了独立的无界随机变量和的指数型概率不等式 作为结果的应用, 一些有趣的例子被给出 这些例子表明: 文中提出的方法和结果对研究独立的无界随机变量和的大样本性质是十分有用的

关 键 词: 概率指数不等式; 无界随机变量; 收敛
中图分类号: O212 7 文献标识码: A

引 言

让$\{Y_n\}$是概率空间(, T, P) 中独立的随机变量序列, 并且让 $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ Bennett (1962)[1]和 Hoeffding(1963)[2]分别研究了独立随机变量和, 在 Y_i 有界的条件下, 得到了一些重要的概率不等式 著名的Bernstein 不等式(参见 Uspensky(1937) [3]) 就是 Bennett(1962) 的结果的特殊情况, 参见 Pollard(1984) [4] 的附录B Hoeffding 不等式和 Bernstein 不等式是概率论和统计学中两个非常重要的结果, 并且被广泛地应用在非参数统计、经验过程、大样本理论等方面, 参见 Dudley(1984) [5], Pollard(1984) [4], Shorack 和 Wellner(1986) [6] 等人的著作 不幸的是, Hoeffding 不等式和 Bernstein 不等式被随机变量 $Y_i(1 \le i \le n)$ 有界的条件所限制 为了讨论无界随机变量和的尾部概率的性质, 一个极大的困难是对无界随机变量的处理 对无界的随机变量研究, 一种传统的方法是对无界的随机变量进行截断 它是概率论和统计学中的一个基本的工具, 参见 Chow(1988) [7], Kolmogorov 的三级数定理就是一个很好的例子 在这篇文章里, 我们提出使用截断原理概率空间(, T, P) 的方法去研究独立的无界随机变量和 利用这种方法, 我们讨论了独立的无界随机变量和的尾部概率的性质, 得到了一些重要的指数型概率不等式 本文的主要思想和方法如下:

) 通过对原始的概率空间施行截断, 我们构造了一个新的概率子空间;
) 在这个概率子空间上, 建立独立的无界随机变量和的指数型概率不等式;
) 让上述概率子空间无限地逼近原始的概率空间, 利用我们在概率子空间上建立的指

收稿日期: 2000_01_20; 修订日期: 2001_01_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19661001); 广东省自然科学基金资助项目(199989)
作者简介: 张涤新(1954), 男, 江西樟树市人, 教授, 博士.

数型概率不等式,导出独立的无界随机变量和在原始的概率空间上的收敛性质。

作为本文结果的应用,一些例子被给出。这些例子表明:本文的方法和结果对研究独立的无界随机变量和的大样本性质是十分有效的。本文由如下内容组成:第1节中介绍了本文的主要结果(定理1和定理2),给出了独立的无界随机变量和的概率不等式。第2节致力于对本文主要结果的特殊应用,一些例子被给出。第1节中所列结果的技术性证明被放在第3节。

1 独立的无界随机变量和的尾部概率指数不等式

Hoeffding(1963)[2]给出了独立的有界随机变量和的重要概率不等式。在此,我们陈述他的结论如下:

定理(Hoeffding(1963)[2]) 假设 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是拥有零均值的独立随机变量序列,且 $a_i \le Y_i \le b_i, 1 \le i \le n$。对任意的 $\varepsilon \ge 0$,

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| \ge \varepsilon\right) \le 2\exp\left\{-2\varepsilon^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right\} \tag{1}$$

对于独立的无界随机变量和,我们有如下概率不等式:

定理1 假定 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是i.i.d.随机变量且满足 $EY_1^2 < \infty$。那么,对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta \in (0, 1/2)$,存在一个整数 $N > 0$ 的一个可测的集合 $S \subset T$, $P(S) > 1-\delta$,如果 $n \ge \max\left\{N, 16E(Y_1^2)/\varepsilon^2\right\}$,那么,

$$P_S\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| \ge \varepsilon\right) \le 8\exp\left\{-n\varepsilon^2/(33EY_1^2)\right\}, \tag{2}$$

这里, $P_S(\cdot) = P(\cdot \cap S)/(P(S))$。

定理2 让 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是独立随机变量序列。假定对任意的 $n \ge 1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) \le \sigma < \infty \quad 且 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i^2 - EY_i^2) \to 0 \quad (\text{a.s.}),$$

那么,对任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $\delta \in (0, 1/2)$,必存在一个整数 $N > 0$ 和一个可测的集合 $S \subset T$ 且 $P(S) > 1-\delta$,如果 $n \ge \max\left\{N, 16\sigma/\varepsilon^2\right\}$,则

$$P_S\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i)\right| > \varepsilon\right) < 8\exp\left\{-n\varepsilon^2/(33\sigma)\right\}, \tag{3}$$

这里, $P_S(\cdot) = P(\cdot \cap S)/P(S)$。

2 主要结果的应用

定理1和定理2的证明被放在第3节,在此,我们将给出定理1和定理2的应用。下面的例子说明:定理1和定理2的结果对研究独立的无界随机变量和是十分有用的。由于下面的例子是定理1和定理2的直接结果,因此,我们将它们写成如下推论。

推论1 在定理1的条件下,存在 $L > 0$,使得

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| \le L\left[\frac{\log n}{n}\right]^{-1/2} (\text{a.s.}) \tag{4}$$

证明 由定理1和Borel_Cantelli引理,存在 $L > 0$,对任意的 $\delta \in (0, 1/2)$,存在 $S \subset T$ 且 $P(S) \ge 1-\delta$,使得

$$P_S\left(\limsup_{n \to \infty}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/2}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| \le L\right) = 1$$

于是,

$$P\left(\lim_{n}\sup\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/2}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| \quad L\right)$$

$$P(S)P_S\left(\lim_{n}\sup\left(\frac{n}{\log n}\right)^{1/2}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| \quad L\right) \quad 1-$$

在上式中令 $\quad 0$, (4) 式成立

推论 2　在定理 2 的条件下, 存在 $L > 0$, 使得

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i)\right| \quad L\left(\frac{n}{\log n}\right)^{-1/2}(\text{a. s.}) \tag{5}$$

证明　由定理 2, 推论 2 的证明与推论 1 完全相似

Kolmogorov 得到了一个重要的关于独立的无界随机变量和的强大数定律, 在此, 我们将给出独立的无界随机变量和的强一致收敛速度　我们首先陈述 Kolmogorov 的结果如下:

定理(Kolmogorov, 参见 Stout(1974, [8] , p165))　假定 $\{Y_n\}$ 是独立随机变量序列　如果

$$\sum_{k=1} \mathrm{Var}(Y_k)/k^2 < \quad ,$$

那么

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - EY_k)\right| \quad 0 \qquad (\text{a. s.})$$

由推论 2, 我们能够得到一个有趣的结果如下:

推论 3　让 $\{Y_n\}$ 是独立随机变量序列　假定对任意的 $n \quad 1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2) \quad < \quad \text{且} \sum_{k=1}\mathrm{Var}(Y_k^2)/k^2 <$$

那么, 存在常数 $L > 0$, 使得

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i)\right| \quad L\left(\frac{n}{\log n}\right)^{-1/2}(\text{a. s.}) \tag{6}$$

3　定理 1 和定理 2 的证明

定理 1 的证明　由 Kolmogorov 关于独立同分布的随机变量和的强大数定律,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k^2 \quad EY_1^2 \qquad (\text{a. s.}),$$

对任意的 $\quad > 0$ 和任意的 $\quad (0, 1/2)$, 存在一个整数 $N > 0$ 的一个可测的集合 $S \quad T$ 且 $P(S) > 1-$, 如果 $n \quad N$, 那么

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k^2 < 33EY_1^2/32 \text{ 在 } S \text{ 上一致地成立} \tag{7}$$

让 $n \quad \max\{N, 16EY_1^2/ \quad ^2\}$　那么

$$P_S\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| > \quad /2\right) \quad 8EY_1^2/(n \quad ^2) \quad 1/2$$

不失一般性, 我们可以选取一个与 $\{Y_n\}$ 独立的 i. i. d. 随机变量序列 $\{Y_n\}$, 并且可以产生 i. i. d. 的符号随机变量 $_1, \quad , \quad _n$ 拥有 $P_S(\ _1 = -1) = P_S(\ _1 = 1) = 1/2$, 满足:

) 对任意的 $n \quad 1$, $(Y_1, \quad , Y_n)$ 与 $(Y_1, \quad , Y_n)$ 是概率空间 $(S, S \quad T, P_S)$ 上 i. i. d. 的随机向量;

) 在概率空间 $(S, S\ \ T, P_S)$ 上, $(\ _1, \ \ , \ _n)$ 是独立于随机序列 $\{Y_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 的

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 且 $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ 由引理 .8 和对称化方法 (Pollard(1984[4], Chapter , p14)),

$$P_S\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_1)\right| > \ \right) \quad 2P_S\left(\frac{1}{n}|S_n - S_n| > \ /2\right)$$

$$4P_s(n^{-1}|S_n^0| > \ /4) \tag{8}$$

这里 $S_n^0 = \sum_{i=1}^{n} \ _i Y_i$

对任意固定的 $Y(n): = (Y_1, \ \ , Y_n)$, (7) 式和 Hoeffding 不等式暗示: 如果 n $\max\{N, 16E(Y_1^2)/\ ^2\}$, 那么

$$P_S(n^{-1}|S_n^0| > \ /4 | Y(n)) \quad 2\exp\left\{-2(n\ /4)^2/(4\sum_{i=1}^{n} Y_i^2)\right\}$$

$$2\exp\left\{-n\ ^2/(33EY_1^2)\right\} \tag{9}$$

由(8)及(9), 定理 1 得证

定理 2 的证明 由定理 2 的条件, 对任意的 n 1,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) \qquad < \qquad 且 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i^2 - EY_i^2) \quad 0 \qquad (\mathrm{a.s.}),$$

对任意的 > 0 和任意的 $(0, 1/2)$, 存在一个整数 $N > 0$ 和一个可测的集合 $S\ \ T$ 且 $P(S) > 1 -\ $, 如果 $n\ \ N$, 那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 < 33\ /32 \text{ 在 } S \text{ 上一致地成立} \tag{7}$$

剩下的证明与定理 1 的证明相似, 因此, 定理 2 得证

[参 考 文 献]

[1] Bennett G. Probability inequalities for the sum of independent random variables[J]. Journal of the American Statistical Association, 1962, **57**(1): 33 45.

[2] Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables[J]. JASA, 1963, **58**(1): 13 30.

[3] Uspensky J V. Introduction to Mathematical Probability[M]. New York: McGrawHill, 1937.

[4] Pollard D. Convergence of Stochastic Processes[M], New York: Springer_Verlag, 1984.

[5] Dudley R M. A Course on Empirical Processes, Springer Lecture Notes in Mathematics[M], **1097**, New York: Springer_Verlag, 1984.

[6] Shorack G R, Wellner J A. Empirical Processes with Applications to Statistics[M]. New York: Wiley, 1986.

[7] Chow Y S, Teicher H. Probability Theory[M]. New York: Springer_Verlag, 1988.

[8] Stout W F. Almost Sure Convergence[M]. New York: Academic Press, Inc, 1974.

Probability Inequalities for Sums of Independent Unbounded Random Variables

ZHANG Di_xin[1], WANG Zhi_cheng[2]
(1 Department of Statistics, Guangdong Commercial College,
Guangzhou 510320, P R China;
2 Department of Finance, Guanghua School of Management, Peking University,
Beijing 100871, P R China)

Abstract: The tail probability inequalities for the sum of independent undbounded random variables on a probability space (, T, P) were studied and a new method was proposed to treat the sum of independent unbounded random variables by truncating the original probability space (, T, P). The probability exponential inequalities for sums of independent unbounded random variables were given. As applications of the results, some interesting examples were given. The examples show that the method proposed in the paper and the results of the paper are guite useful in the study of the large sample properties of the sums of independent unbounded random variables.

Key words: probability exponential inequality; unbounded random variables; convergence