应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 05_0534_07

广义线性互补问题的改进 SLP 算法及收敛性*

修乃华, 高自友

(北方交通大学 数学系, 北京 100044)

(张石生推荐)

摘要: 考虑广义线性互补问题, 提出一个求解它的改进的序列线性规划算法, 并在一定条件下证得该法具有良好的收敛性质• 此外, 顺便给出该问题解集非空有界的一个充分条件•

关 键 词: 广义线性互补; 算法; 收敛性
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

考虑广义线性互补问题(XLCP) : 找一个向量 $(x, y) \in \mathbf{R}^{2n}$ 使得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{Mx} - \boldsymbol{Ny} \in \mathscr{K}, \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 是已知矩阵, $\mathscr{K} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{Gu} \geqslant \boldsymbol{g}, \boldsymbol{G} \in \mathbf{R}^{l\times m}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{R}^l \right\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个多面集• 这个模型首先被著名优化专家 Mangasarian 和 Pang[1] 提出(也见 Ye 的[2])• 它在结构力学、接触力学、交通与经济平衡等领域有着广泛的应用[3]• 同时, 它也可视为水平线性互补、混合线性互补、仿射变分问题的统一形式[4~6]• 因此, 对它的研究具有普遍意义, 并引起一些学者的研究兴趣, 见[1, 2, 4, 7 ~ 10] 及其参考文献•

XLCP 可转化为求解一个双线性规划问题(BLP) :

$$\left.\begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \\ &\text{s.t.} \quad h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{GMx} - \boldsymbol{GNy} - \boldsymbol{g} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}\text{•} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

假定可行集 $\Omega := \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \right\}$ 非空, 这里 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 表示列向量 $(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 显然, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}^{2n}$ 是(1) 的一个解 $\Leftrightarrow$ 它是(2) 的一个解且最优值为零• 在文献[1] 中, Mangasarian 和 Pang 给出一个求解(2) 的序列线性规划(SLP) 算法, 其子问题是

$$\min\left\{ \nabla f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mid (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \Omega \right\}\text{•} \tag{3}$$

该法具有简单的结构且有限步终止• 然而, 子问题(3) 可能无解, 从而可能导致 SLP 法失败•

在这篇文章中, 我们提出一个改进的 SLP 算法, 它的子问题是

* 收稿日期: 1999_10_25; 修订日期: 2001_01_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971002)
作者简介: 修乃华(1959—) , 男, 河北人, 副教授, 博士, 研究方向为最优化理论与算法, 已发表论文 40 余篇.

$$\min\left\{\nabla f(x^k, y^k)^T(\Delta x, \Delta y) \mid (\Delta x, \Delta y) \in \Omega_k\right\}. \tag{4}$$

这里 $\Omega_k := \left\{(u, v) \in R^{2n} \mid GMu - GNv + h(x^k, y^k) \geqslant 0, e \geqslant (u, v) \geqslant -\min\left\{(x^k, y^k), e\right\}\right\}$, $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$. 易知(4)总可解且与(3)有相同的计算量. 我们证得, 无需任何条件新算法便可大范围收敛. 特别, 当$\{M, N\}$关于$\mathscr{K}$是$X_$行充分或列单调时, $(x^k)^T y^k \downarrow \min_{(x, y) \in \Omega} x^T y$. 同时, 也给出问题(1)解集非空有界的一个充分条件.

1　改进的 SLP 算法

任取初始点$(x^0, y^0) \in \Omega$, 对于$K \in Z := \{0, 1, 2, \cdots\}$, 假定$(x^k, y^k) \in \Omega$已知, 我们求$(x^{k+1}, y^{k+1}) \in \Omega$如下:

步 1　令 $d^k = (\Delta x^k, \Delta y^k) \in R^{2n}$ 是(4)的一个最优解.

步 2　若 $\nabla f(x^k, y^k)^T d^k = 0$, 则停止计算.

步 3　否则, 令

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k) + \theta_k(\Delta x^k, \Delta y^k), \tag{5}$$

这里 θ_k 是集合$\{1, 1/2, 1/4, \cdots\}$中使下式成立的最大者:

$$f(x^{k+1}, y^{k+1}) \leqslant f(x^k, y^k) + \sigma\theta_k \nabla f(x^k, y^k)^T d^k \quad \sigma \in (0, 1). \tag{6}$$

这个算法受文献[11]刺激, 它具有下面的特征.

引理 1　若算法停止在点(x^k, y^k), 则它是问题(2)的一个 KKT 点; 否则, d^k 是(2)在(x^k, y^k)的一个下降可行方向.

证　若算法停止在点(x^k, y^k), 从步 2 知原点(0, 0)也是(4)的一个最优解. 由 KKT 条件知, 存在乘子 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)^T \in R^l$ 和 $\mu^{(i)} = (\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \cdots, \mu_{2n}^{(i)})^T \in R^{2n}(i = 1, 2)$ 使得

$$\nabla f(x^k, y^k) = [GM, -GN]^T\lambda + \mu^{(1)} - \mu^{(2)}, \tag{7a}$$

$$\lambda^T(0 - 0 + h(x^k, y^k)) = 0 \quad (\lambda \geqslant 0), \tag{7b}$$

$$(\mu^{(1)})^T((0, 0) + \min\{(x^k, y^k), e\}) = 0 (\mu^{(1)} \geqslant 0), \tag{7c}$$

$$(\mu^{(2)})^T(e - (0, 0)) = 0 \quad (\mu^{(2)} \geqslant 0), \tag{7d}$$

$$(x^k, y^k) \in \Omega. \tag{7e}$$

由(7c)和(7d)得

$$(\mu^{(1)})^T(x^k, y^k) = 0, \quad \mu^{(1)} \geqslant 0, \quad \mu^{(2)} = 0. \tag{8}$$

结合(7a), (7b)和(7e)推出, (x^k, y^k)是(2)的一个 KKT 点.

若算法不停止在点(x^k, y^k), 则有 $\nabla f(x^k, y^k)^T d^k < 0$, 即 d^k 是一个下降方向. 再由式

$$\begin{aligned} &GM(x^k + \theta\Delta x^k) - GN(y^k + \theta\Delta y^k) - g = \\ &\quad \theta(GM\Delta x^k - GN\Delta y^k) + h(x^k, y^k) \geqslant \\ &\quad \theta(GM\Delta x^k - GN\Delta y^k + h(x^k, y^k)) \geqslant \\ &\quad 0 \quad (\forall \theta \in [0, 1]) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &(x^k, y^k) + \theta(\Delta x^k, \Delta y^k) \geqslant (x^k, y^k) - \theta\min\{(x^k, y^k), e\} \geqslant \\ &\quad (x^k, y^k) - \min\{(x^k, y^k), e\} \geqslant \\ &\quad 0 \quad (\forall \theta \in [0, 1]), \end{aligned}$$

可导出 $\boldsymbol{d}^k$ 是(2) 在点$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)$ 的一个下降可行方向• 证毕• □

2 收 敛 性

在这一节中,我们主要是对在第1 节中提出的新算法进行收敛收性分析,以保证该法的可靠性• 首先回忆 Gowda[4] 引入的 X_行充分性概念,它是线性互补问题 LCP$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{q})$ 中行充分矩阵的概念推广•

定义 1[4] 我们说$\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\}$ 关于 $\mathscr{K}$具有 X_行充分性,是指

$$(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})_i(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})_i \leqslant \boldsymbol{0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{O}^+ \mathscr{K})^*$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})_i(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})_i = \boldsymbol{0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

这里 $(\boldsymbol{O}^+ \mathscr{K})^* = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\mu, \mu \geqslant 0\}$, $\boldsymbol{O}^+ \mathscr{K} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}\}$•

利用著名的Frank_Wolfe 定理[12],当 $\Omega \neq \varnothing$ 时,双线性规划(2) 总可解• 当然,此解不必要是(1) 的解• 但 Gowda 证明

引理 2[4] $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\}$ 关于 $\mathscr{K}$是 X_行充分性 $\Leftrightarrow$对每个 $\boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^l$,问题(2) 的任何KKT 点均是(1) 的解•

应用这个引理,可得到算法的一个大范围收敛性结果•

定理 1 假定$\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)\}$ 是由算法产生的一个无穷序列,则

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k = 0$;

b) $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)\}$ 的任何极限点均是(2) 的一个KKT 点;

c) 当$\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\}$ 关于 $\mathscr{K}$是 X_行充分性时,$(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^k \downarrow 0$•

证 假设存在一个无穷子集 $Z_0 \subseteq Z$,使得

$$-\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k \geqslant \varepsilon > 0 \quad (\forall k \in Z_0)• \tag{9}$$

我们将导出矛盾• 事实上,从(6) 知

$$\sigma\theta_k(-\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k) \leqslant f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k) - f(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}) \qquad (\forall k \in Z)•$$

再由$\{f^k\} \downarrow, f^k \geqslant \boldsymbol{0}$ 和(9),得

$$\sigma\varepsilon\sum_{k\in Z_0}\theta_k \leqslant \sigma\sum_{k\in Z_0}\theta_k(-\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k) \leqslant$$

$$\sigma\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k(-\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k) \leqslant$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{f^k - f^{k+1}\} < +\infty•$$

注意到 $\|\boldsymbol{d}^k\| \leqslant \sqrt{n}$,则有

$$\lim_{k\in Z_0, k\to\infty}\theta_k = 0, \qquad \lim_{k\in Z_0, k\to\infty}\theta_k\|\boldsymbol{d}^k\| = 0• \tag{10}$$

再从 Armijo 规则及 ∇f 的一致连续性,知

$$\sigma(2\theta_k)(-\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k) > f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k) - f(\boldsymbol{x}^k + 2\theta_k\Delta\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k + 2\theta_k\Delta\boldsymbol{y}^k) =$$

$$(2\theta_k)(-\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k) + o(\theta_k),$$

即对任何充分大的 $k \in Z_0$,

$$(1-\sigma)(\nabla f(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k) + o(1) > 0•$$

此与(9) 矛盾• 从而结论 a) 为真•

假设 (x^*, y^*) 是 $\{(x^k, y^k)\}$ 的任何一个极限点且 $\lim_{k\in Z_1, k\to\infty}(x^k, y^k) = (x^*, y^*)$, $(Z_1 \subseteq Z)$。 由 $\{d^k\}$ 的有界性, 不妨设 $\lim_{k\in Z_1, k\to\infty} d^k = d^*$。 易证 d^* 是下面问题的一个最优解。

$$\min\{\nabla f(x^*, y^*)^{\mathrm T}(u, v) \mid (u, v) \in \Omega_*\},$$

这里

$$\Omega_* := \{(u, v) \in \mathbf{R}^{2n} \mid GMu - GNv + h(x^*, y^*) \geqslant \mathbf{0},\ e \geqslant (u, v) \geqslant -\min\{(x^*, y^*), e\}\}。$$

于是, 由 a) 得

$$\nabla f(x^*, y^*)^{\mathrm T} d^* = \lim_{k\in Z_1, k\to\infty} \nabla f(x^k, y^k)^{\mathrm T} d^k = 0。$$

这表明 (x^*, y^*) 是(2) 的一个 KKT 点。 结论 c) 跟自 $\{f^k\}\downarrow$ 和引理 2。 证毕。 □

下面, 我们把 LCP 中的单调性概念推广到 XLCP 中, 并建立相应的收敛性结果。

定义 2 我们说 $\{M, N\}$ 关于 $\mathcal{K}$ 是 X_ 列单调的, 如果下述条件成立:

$$Mu - Nv \in \mathcal{K} - \mathcal{K} \Rightarrow u^{\mathrm T} v \geqslant 0。 \qquad (11)$$

说 $\{M, N\}$ 关于 $\mathcal{K}$ 是 X_ 行单调的, 如果下述条件成立:

$$(M^{\mathrm T} u)^{\mathrm T}(N^{\mathrm T} u) \geqslant 0 \quad \forall u \in (O^+ \mathcal{K})^*。 \qquad (12)$$

应用文[10] 的方法与技巧, 我们可研究 X_ 列单调性的特征。

命题 1 给定矩阵 $M, N \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 和一个多面体 $\mathcal{K}$, 如果 $\{M, N\}$ 关于 $\mathcal{K}$ 是 X_ 列单调的, 则 $x^{\mathrm T} y$ 在 Ω 上是凸的。

证 对任意 $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in \Omega$ 和 $\lambda \in [0, 1]$, 经简单计算可得

$$\begin{aligned} &\lambda f(x^1, y^1) + (1-\lambda) f(x^2, y^2) - f(\lambda(x^1, y^1) + (1-\lambda)(x^2, y^2)) = \\ &\quad \lambda(x^1)^{\mathrm T} y^1 + (1-\lambda)(x^2)^{\mathrm T} y^2 - (\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2)^{\mathrm T}(\lambda y^1 + (1-\lambda) y^2) = \\ &\quad \lambda(1-\lambda)(x^1 - x^2)^{\mathrm T}(y^1 - y^2)。\end{aligned}$$

由假设立知本结论成立, 证毕。 □

命题 2 给定矩阵 $M, N \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 和一个多面体 $\mathcal{K}$, 如果 $\{M, N\}$ 关于 $\mathcal{K}$ 是 X_ 列单调且存在一个内点 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ (i.e., $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$, $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$), 则对任意 $\varepsilon \geqslant 0$, 水平集

$$L(\varepsilon) = \{(x, y) \in \Omega \mid x^{\mathrm T} y \leqslant \varepsilon\}$$

是有界的(允许 $L(\varepsilon)$ 为空集)。

证 对任意 $(x, y) \in L(\varepsilon)$。 由假设, $(x - \bar{x})^{\mathrm T}(y - \bar{y}) \geqslant 0$。 继而,

$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i + \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i \leqslant \bar{x}^{\mathrm T} \bar{y} + \varepsilon。$$

此表明对任意 $x_i \geqslant 0$ 和 $y_i \geqslant 0$, x_i 和 y_i 均是有界的。 证毕。 □

经过上面准备, 可得到另一个收敛性结果。

定理 2 假设 $\{w^k = (x^k, y^k)\}$ 是由算法产生的一个无穷序列, 则

a) $\limsup_{k\to\infty} \nabla f(w^k)^{\mathrm T}(w - w^k) \geqslant 0 \quad (\forall w \in \Omega)$;

b) 当 $\{M, N\}$ 关于 K 是 X_ 列单调时, $(x^k)^{\mathrm T} y^k \downarrow \min_{w\in\Omega} x^{\mathrm T} y$。

证 我们采用文[11] 的证明技巧。 若 $\{w^k\}$ 是有界的, 则它至少有一个收敛的子列, 比如说 $w^{k'} \to w^*$, 由定理 1 知

$$\limsup_{k\to\infty} \nabla f(w^k)^{\mathrm T}(w - w^k) \geqslant \lim_{k'\to\infty} \nabla f(w^{k'})^{\mathrm T}(w - w^{k'}) =$$

$$\nabla f(\boldsymbol{w}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^*)\geqslant\mathbf{0},\quad \boldsymbol{w}\in\Omega.$$

若$\{\boldsymbol{w}^k\}$无界, 我们不妨假设 $\|\boldsymbol{w}^k\|\to\infty$. 若a) 不真, 则存在 $\boldsymbol{w}\in\Omega$, 常数 $\rho>0$ 和 $k_0\in Z$, 使得

$$\nabla f(\boldsymbol{w}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k)\leqslant-\rho<\mathbf{0},\quad \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k\|>1\quad(\forall k>k_0). \tag{13}$$

记 $(\boldsymbol{r}^k,\boldsymbol{s}^k)=(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k)/\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k\|$. 易知对所有的 $k>k_0$,

$$\boldsymbol{e}\geqslant(\boldsymbol{r}^k,\boldsymbol{s}^k)\geqslant-\min\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k),\boldsymbol{e}\}$$

和

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{GMr}^k-\boldsymbol{GNs}^k)+h(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k)\geqslant\\&\quad\frac{1}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k\|}(\boldsymbol{GM}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)-\boldsymbol{GN}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^k)+h(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k))\geqslant\\&\quad\frac{1}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k\|}(\boldsymbol{GMx}-\boldsymbol{GNy}-\boldsymbol{g})\geqslant\mathbf{0},\end{aligned}$$

即 $(\boldsymbol{r}^k,\boldsymbol{s}^k)\in\Omega_k$.

再由(13), 得

$$\nabla f(\boldsymbol{w}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k\leqslant\nabla f(\boldsymbol{w}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}^k,\boldsymbol{s}^k)\leqslant\frac{-\rho}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k\|}\quad(\forall k>k_0). \tag{14}$$

另一方面, 利用 $\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k=+\infty$, 必存在 $k_1>k_0$ 使得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k\|\leqslant\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^{k_0}\|+\sum_{i=k_0}^{k-1}\|\theta_i d^i\|\leqslant\\&\quad\sum_{i=k_0}^{k_1}\sqrt{n}\theta_i+\sum_{i=k_0}^{k-1}\sqrt{n}\theta_i\leqslant\\&\quad 2\sqrt{n}\sum_{i=k_0}^{k_1}\theta_i\ (\forall k\geqslant k_1),\end{aligned} \tag{15}$$

从(14), (15) 和 Armijo 搜索规则, 并取任何 $k\geqslant k_1$, 有

$$\frac{\sigma\rho}{2\sqrt{n}}\sum_{k=k_1}^{\infty}\frac{\theta_k}{\sum_{i=0}^{k}\theta_i}\leqslant\sum_{k=k_1}^{\infty}\sigma\theta_k(-\nabla f(\boldsymbol{w}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k)\leqslant\sum_{k=k_1}^{\infty}\{f(\boldsymbol{w}^k)-f(\boldsymbol{w}^{k+1})\}<+\infty.$$

此与 $\sum_{k=k_1}^{\infty}\left(\theta_k/\sum_{i=k_1}^{k}\theta_i\right)=+\infty$ 矛盾. 因此 a) 成立. 命题 1 可导出对每个 $\boldsymbol{w}\in\Omega$,

$$f(\boldsymbol{w})\geqslant f(\boldsymbol{w}^k)+\nabla f(\boldsymbol{w}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k)\qquad(\forall k\in Z).$$

再从(a) 得

$$\begin{aligned}&f(w)\geqslant\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{w}^k)+\lim_{k\to\infty}\sup\nabla f(\boldsymbol{w}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^k)\geqslant\\&\quad\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{w}^k)\geqslant\min_{w\in\Omega}f(\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

定理证毕. □

总结定理 1 和 2 的结果, 再应用命题 2, 我们不难得到如下的收敛定理.

定理 3 假定$\{\boldsymbol{w}^k\}$是由算法产生的一个无穷序列, 如果$\{M,N\}$关于 $\mathscr{K}$是 X_行充分和列单调, 且在 Ω 中存在一个内点, 那么

a) $\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k)\}$有界;

b) $(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^k\downarrow 0$.

3 讨 论

基于上面的分析，实际上我们得到了广义线性互补问题(1)解集非空有界的一个充分条件• 即在XLCP($\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \mathscr{K}$) 中，若$\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\}$ 关于 $\mathscr{K}$是 X_行充分和列单调，且可行集中存在内点，则其解集必非空有界• 这个结果是LCP中下面结果的推广：在LCP($\boldsymbol{M}, \boldsymbol{q}$) 中，如果 $\boldsymbol{M}$ 半正定且可行集中存在内点，则其解集必非空有界•

众所周知，内点法能求解单调且内点存在的线性互补问题，以及它有多项式和超线性收敛性• 然而，在XLCP中却至今没有这样的内点法，此问题有待于研究•

[参 考 文 献]

[1] Mangasarian O L, Pang J S. The extended linear complementarity problem[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1995, **16**(2): 359—368.

[2] Ye Y. A fully polynomial_time approximation algorithm for computing a stationary point of the general linear complementarity problem[J]. Mathematics of Opreations Research, 1993, **18**(2): 334—345.

[3] Ferris M C, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. SIAM Review, 1997, **39**(4): 669—713.

[4] Gowda M S. On the extended linear complementarity problems[J]. Mathematical Programming, 1996, **72**(1): 33—50.

[5] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The Linear Complementarity Problem[M]. Boston MA: Academic Press, 1992.

[6] Zhang Y. On the convergence of a class of infeasible interior_point methods for the horizontal linear complementarity problem[J]. SIAM Journal on Optimization, 1994, **4**(1): 208—227.

[7] Solodov M V. Some optimization reformulations of the extended linear complementarity problem[J]. Compu Optim Appl, 1999, **13**(2): 187—200.

[8] Xiu N, Zhang J. A smoothing Gauss_Newton method for the generalized HLCP[J]. J Compu Appl Math, 2001, **130**(2): 321—335.

[9] Zhang J, Xiu N. Local uniqueness of solutions to the extended linear complementarity problem[J]. J Optim Theory Appl, 1999, **103**(3): 715—726.

[10] Zhang J, Xiu N. Global s_type error bound for the extended linear complementarity problem[J]. Mathematical Programming, 2000, **88**(2): 391—410.

[11] Wu S, Wu F. A modified Frank_Wolfe algorithm and its convergence properties[J]. Acta Math Appl, 1995, **13**(3): 286—291.

[12] Frank M, Wolfe P. An algorithm for quadratic programming[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1959, **3**: 95—100.

Convergence of a Modified SLP Algorithm for the Extended Linear Complementarity Problem

XIU Nai_hua, GAO Zi_you
(Department of Applied Mathematics, Northern Jiaotong University,
Beijing 100044, P R China)

Abstract: A modified sequential linear programming algorithm is presented, whose subproblem is always solvable, for the extended linear complementarity problem(XLCP), the global convergence of the algorithm under assumption of X _row sufficiency or X _column monotonicity is proved. As a result, a sufficient condition for existence and boundedness of solution to the XLCP are obtained.

Key words: extended linear complementarity problem; modified SLP algorithm; global convergence