

文章编号: 1000-0887(2001) 03-0250-09

# 具有分数导数型本构关系的粘弹性柱的动力稳定性\*

李根国<sup>1,2</sup>, 朱正佑<sup>1,2</sup>, 程昌钧<sup>1,3</sup>

(1 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2 上海大学(嘉定校区) 数学系, 上海 201800;  
3. 上海大学力学系, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 研究简支的受轴向周期激励的粘弹性柱动力稳定性, 柱的材料满足分数导数型本构关系。建立了描述粘弹性柱动力学行为的弱奇异性 Volterra 积分\_偏微分方程, 利用 Galerkin 方法将其化归为弱奇异性 Volterra 积分\_常微分方程。利用平均化方法的思想给出了粘弹性柱运动稳定状态的存在性条件。给出一种新的计算方法, 克服了存储整个响应历史数据的困难, 并给出了数值算例, 计算结果与解析方法的结论比较吻合。

**关键词:** 粘弹性柱; 分数导数型本构关系; 平均化方法; 弱奇异性 Volterra 积分\_微分方程; 动力稳定性

中图分类号: O165.6; O345 文献标识码: A

## 引言

粘弹性结构的稳定性分析因其具有广阔的应用而吸引了愈来愈多的研究。Cederbaum 和 Mond 应用多尺度法建立了周期轴向荷载作用下粘弹性柱的稳定性条件<sup>[1]</sup>, 程昌钧, 张能辉应用 Liapunov 指数等方法研究了粘弹性板的动力学行为<sup>[2]</sup>。在上述工作中, 结构材料的本构关系一般为微分型、Boltzmann 线性叠加原理或 Leaderman 关系, 松弛函数一般取成 Prony 级数, 最终得到的描述粘弹性结构的静、动力学控制方程化为微分方程组, 然后进行定性分析和定量分析。

由 Grent 首先提出的分数导数型的粘弹性材料本构关系可以仅用少量的参数构成材料的数学模型, 并且能够描述材料在较大频率范围内的动力学特性, 被认为是一种比较能够精确描述一类粘弹性材料的模型<sup>[3~5]</sup>, 近年来有关粘弹性材料分数导数型本构关系的研究很多<sup>[6~7]</sup>。虽然分数微分积分的数学理论已比较丰富<sup>[8]</sup>, 但利用分数导数型本构关系, 建立的结构动力学行为的控制方程是具有奇异性的积分\_微分方程, 所以它的定性分析和数值计算都比

\* 收稿日期: 2000\_01\_25; 修订日期: 2000\_12\_19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772027), 上海市科学技术发展基金(98JC14032) 及上海市教委发展基金资助项目(99A01)

作者简介: 李根国(1969—), 男, 甘肃古浪人, 博士;

朱正佑(1937—), 男, 浙江海盐人, 教授, 博士生导师。

较困难,迄今只有少量用分数导数型本构关系研究粘弹性结构的静、动力学行为的研究工作。

本文致力于研究粘弹性柱的稳定性问题。设柱的材料服从粘弹性分数导数型本构关系,在通常的假设下,首先建立简支的受周期轴向载荷作用的粘弹性柱的动力学分析的初边值问题,其控制方程是弱奇异性 Volterra 积分\_偏微分方程,然后利用 Galerkin 方法,将其化归为弱奇异性 Volterra 积分\_常微分方程。利用平均化方法的思想给出粘弹性柱运动稳定状态存在的解析条件。给出一种新的计算方法,克服存储整个历史数据的困难,并给出数值算例。

## 1 数学模型

考虑受轴向力的均匀简支粘弹性柱的横向运动。设柱的横向位移为  $V(x, t)$ 、柱的密度为  $\rho$ 、柱的长度为  $L$ 、截面积为  $A$ 、轴向荷载  $P(t)$ 、截面弯矩为  $M(x, t)$ 。假设运动发生在柱的一个主平面内,则柱的动力学方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

其中

$$M(x, t) = - \int_A y \sigma_x(t) dA, \quad (2)$$

$\sigma_x$  为截面轴向应力分量。

粘弹性材料的 Kelvin\_Voigt 分数导数本构关系为

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 \mathcal{D}^\alpha [\varepsilon(t)], \quad (3)$$

其中  $E_0, E_1$  是材料常数,  $\mathcal{D}^\alpha$  是 Riemann\_Liouville 分数导数算子<sup>[8]</sup>, 定义为

$$\mathcal{D}^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1), \quad (4)$$

其中  $\Gamma$  为 Gamma 函数  $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{Re}(z) > 0)$ 。

对于小挠度变形,柱的几何关系为

$$\varepsilon_x(t) = -y \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

将(5)代入(3),再把(3)代入(2),经过整理后得到弯矩的表达式

$$M(x, t) = -K \left\{ E_0 \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + E_1 \mathcal{D}^\alpha \left[ \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} \right] \right\}, \quad (6)$$

其中

$$I = \int_A y^2 dA. \quad (7)$$

将(6)代入(1),得到

$$\rho A \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + K \left\{ E_0 \frac{\partial^4 V(x, t)}{\partial x^4} + E_1 \mathcal{D}^\alpha \left[ \frac{\partial^4 V(x, t)}{\partial x^4} \right] \right\} = 0. \quad (8)$$

设粘弹性柱两端简支,故在两端  $x = 0$  和  $x = L$  有边界条件

$$V(x, t) = M(x, t) = 0, \quad (9)$$

即

$$V(0, t) = V(L, t) = \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V(L, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

设初值条件为

$$V(x, 0) = v_0, V_t(x, 0) = v_1 \quad (x \in [0, L]) \quad (11)$$

方程(8)是弱奇异性 Volterra 积分\_偏微分方程。方程(8)以及边值条件(10)和初值条件(11)构成粘弹性柱小挠度的动力学分析的初边值问题。

设(8)、(10)、(11)的解有形式

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12)$$

将(12)代入(8), 再在两端同乘  $\sin(n\pi x/L)$ , 然后在区间 $[0, L]$ 上积分, 利用正交性条件, 整理得

$$\rho A \ddot{v}(t) + I \left[ \frac{n\pi}{L} \right]^4 \left\{ E_0 v(t) + E_1 \mathcal{D}^\alpha [v(t)] \right\} - \left[ \frac{n\pi}{L} \right]^2 P(t) v(t) = 0 \quad (13)$$

其中, 已令  $v_n(t) = v(t)$ 。

令  $\omega^2 = \frac{I}{\rho A} \left[ \frac{n\pi}{L} \right]^4 E_0$ ,  $P^* = \left[ \frac{n\pi}{L} \right]^2 E_0 I$ ,  $\eta_1 = \frac{P_1}{P^*}$ ,  $k_1 = \frac{E_1}{E_0}$ , 进一步取定周期轴向载荷为

$$P(t) = P_1 \cos \theta t, \quad (14)$$

其中  $\theta = k\omega$ ,  $k$  为正整数。

将(14)代入(13), 得

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 [v(t) - \eta_1 v(t) \cos \theta t] + \omega^2 k_1 \mathcal{D}^\alpha [v(t)] = 0 \quad (15)$$

由(11)得初值条件为

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \quad (16)$$

(15)和(16)为两端简支的粘弹性柱简化的动力学模型, 是具有弱奇异性的 Volterra 积分\_微分方程。对具有弱阻尼的粘弹性材料,  $k_1$  是一个小参数。

## 2 动力稳定性条件

当初值条件  $v(0) = 0, v'(0) = 0$  时, 系统(15)有平凡解  $v(t) \equiv 0$ 。本节将讨论平凡解的稳定性。

将(15)重新整理得

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = \omega^2 (\eta_1 v(t) \cos \theta t - k_1 \mathcal{D}^\alpha [v(t)]) \quad (17)$$

考虑具有弱阻尼的粘弹性材料,  $k_1$  是一个小参数, 假定  $\eta_1$  是与  $k_1$  同数量级的小参数。由平均化方法, 设(17)的解具有形式<sup>[9]</sup>

$$v(t) = r \cos \Phi, \quad \Phi = \omega t + \phi, v'(t) = -\omega r \sin \Phi \quad (18)$$

因而解满足

$$r \omega^2 \cos \Phi - \omega r \sin \Phi = 0 \quad (19)$$

将(18)代入(19)得

$$r \omega^2 \sin \Phi + \omega r \cos \Phi = -\eta_1 \omega r \cos \theta t \cos \Phi + \omega k_1 \mathcal{D}^\alpha [r \cos \Phi] \quad (20)$$

由(19)、(20)联立求得

$$r \omega = -\eta_1 \left\{ \omega r \cos \theta t \cos(\omega t + \phi) - \omega \frac{k_1}{\eta_1} \mathcal{D}^\alpha [r \cos(\omega t + \phi)] \right\} \sin(\omega t + \phi), \quad (21)$$

$$\omega r = -\eta_1 \left\{ \omega r \cos \theta t \cos(\omega t + \phi) - \omega \frac{k_1}{\eta_1} \mathcal{D}^\alpha [r \cos(\omega t + \phi)] \right\} \cos(\omega t + \phi). \quad (22)$$

$r(t)$  的一个周期内对(22)两边积分得

$$\int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} r^\alpha dt = - \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \eta_1 \omega \cos \theta t \cos(\omega t + \phi) - \omega k_1 \mathcal{D}^\alpha [r \cos(\omega t + \phi)] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt, \quad (23)$$

由于  $r, \phi$  是时间  $t$  的慢变函数, 在  $r(t)$  的一个或二个周期内,  $r, \phi, r^\alpha, \phi^\alpha$  可看作常数, 但  $r(t)$  的分数导数与整个时间区间  $[0, t]$  上  $r(t)$  的值都有关, 于是在计算分数导数时, 在  $[0, t]$  上  $r, \phi$  及其导数不能看作常数.

不妨设  $T = 2m\pi/\omega$ , 在  $T$  足够大时 ( $m$  足够大), 计算(23) 式得

$$r^\alpha(T) = A + B, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= - \frac{\omega}{2\pi} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \eta_1 \omega \cos \theta t \cos(\omega t + \phi) \right\} \sin(\omega t + \phi) dt = \\ &\quad \begin{cases} -\frac{1}{4} \eta_1 \omega r(T) \sin 2\phi_T & (\text{当 } \theta = 2\omega), \\ 0 & (\text{当 } \theta = k\omega, k \in N \text{ 且 } k \neq N \text{ 且 } k \neq 2), \end{cases} \\ B &= \frac{\omega}{2\pi} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \omega k_1 \mathcal{D}^\alpha [r \cos(\omega t + \phi)] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt = \\ &\quad \frac{\omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t \frac{r(\tau) \cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt = \\ &\quad \frac{\omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{T-\frac{2\pi}{\omega}} \frac{r(\tau) \cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^\alpha} d\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{T-\frac{2\pi}{\omega}}^t \frac{r(\tau) \cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt \cdot \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} C &= \frac{\omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{T-\frac{2\pi}{\omega}} \frac{r(\tau) \cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt, \\ D &= \frac{\omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_{T-\frac{2\pi}{\omega}}^t \frac{r(\tau) \cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt \cdot \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} D &= \frac{\omega^2 k_1 r}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_{T-\frac{2\pi}{\omega}}^t \frac{\cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt = \\ &\quad \frac{\omega^2 k_1 r}{2\pi} \int_T^{T+\frac{2\pi}{\omega}} \omega^\alpha \cos \left( \omega t + \phi + \frac{\alpha\pi}{2} \right) \sin(\omega t + \phi) dt = -\frac{1}{2} \omega^{1+\alpha} k_1 r \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \\ C &= -\frac{\alpha \omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \int \frac{2\pi}{\omega n} \left\{ \sum_{i=0}^{m-2} \left[ \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \frac{r(\tau) \cos(\omega\tau + \phi(\tau))}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \right] \right\} \sin(\omega t + \phi) dt = \\ &\quad -\frac{\alpha \omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \cos(\omega\tau + \phi_i) \left[ \int_{\frac{2\pi}{\omega n}}^{\frac{2\pi}{\omega}(m+1)} \frac{\sin(\omega t + \phi)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} dt \right] d\tau \right\} = \\ &\quad -\frac{\alpha \omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \cos(\omega\tau + \phi_i) \left[ \int_{\frac{2\pi}{\omega n}}^{\frac{2\pi}{\omega}(m+1)} \sin(\omega t + \phi) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty s^\alpha e^{-(t+\tau)s} ds \right) dt \right] d\tau \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Omega \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \cos(\omega\tau + \phi_i) \left[ \int_0^\infty s^\alpha ds \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(m+1)} \sin(\omega t + \phi) e^{(-t+\tau)s} dt \right] d\tau \right\} = \\
& - \Omega \sin \phi_m \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \cos(\omega t + \phi_i) \left[ \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{s^2 + \omega^2} (e^{[-\frac{2\pi}{\omega}m + \tau]s} - \right. \right. \\
& \left. \left. e^{[-\frac{2\pi}{\omega}(m+1) + \tau]s}) ds \right] d\tau \right\} = - \Omega \sin \phi_m \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{s^2 + \omega^2} ds \times \right. \\
& \left. \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \cos(\omega\tau + \phi_i) \int e^{[-\frac{2\pi}{\omega}m + \tau]s} - \right. \\
& \left. e^{[-\frac{2\pi}{\omega}(m+1) + \tau]s} J d\tau \right\} = - \Omega \sin \phi_m \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{s^2 + \omega^2} ds \times \right. \\
& \left. \int_{\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}(i+1)} \cos(\omega\tau + \phi_i) \int e^{[-\frac{2\pi}{\omega}m + \tau]s} - e^{[-\frac{2\pi}{\omega}(m+1) + \tau]s} J d\tau \right\} = \\
& - \Omega \sin \phi_m \sum_{i=0}^{m-2} \left\{ r_i (G_{i+1} - G_i) \cos \phi_i \right\} = \\
& - \Omega \sin \phi_m \left\{ -r_0 G_0 \cos \phi_0 + \sum_{i=0}^{m-2} [G_i (r_{i+1} - r_i)] \cos \phi_i + r_{m-2} G_{m-1} \cos \phi_{m-1} \right\}.
\end{aligned}$$

其中,

$$\Omega = \frac{\alpha \omega^2 k_1}{2\pi \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1+\alpha)}, \quad G_i = \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(s^2 + \omega^2)^2} [e^{\frac{2\pi}{\omega^3}(i-m)} - e^{\frac{2\pi}{\omega^3}(i-1-m)}] ds, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

$G_i$  是  $i$  的单调增加函数, 并且

$$\max_{i=0, \dots, m-1} \{G_i\} = G_{m-1} = \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(s^2 + \omega^2)^2} [e^{-\frac{2\pi}{\omega^3}} - e^{-\frac{4\pi}{\omega^3}}] ds.$$

由于  $r, \phi$  是时间  $t$  的慢变函数, 所以  $r_{i-1} \approx r_i$ , 现在进一步假设  $\sum_{i=0}^{m-2} [G_i (r_{i+1} - r_i)] \cos \phi_i$  很小, 可忽略不计, 同时  $r_{m-2}$  近似为  $r_m$ ,  $\phi_{m-1}$  近似为  $\phi_m$ , 此外因为当  $m$  足够大时,  $G_0$  趋于零, 于是  $C$  可近似的表示成

$$C = - \Omega \sin \phi_T \cos \phi_T \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(s^2 + \omega^2)^2} [e^{-\frac{2\pi}{\omega^3}} - e^{-\frac{4\pi}{\omega^3}}] ds = - H \omega \sin 2\phi_T,$$

$$\text{其中, } H = \frac{\alpha \omega k_1}{4\pi \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(s^2 + \omega^2)^2} [e^{-\frac{2\pi}{\omega^3}} - e^{-\frac{4\pi}{\omega^3}}] ds.$$

将上述表达式代入(24), 得:

$$\begin{aligned}
r \dot{\neq} T) &= - r(T) \left\{ \frac{1}{2} \omega^{\frac{1}{2}} \alpha k_1 \sin \frac{\alpha \pi}{2} + \left( \frac{\eta_1}{4} + H \right) \omega \sin 2\phi_T \right\} \quad (\text{当 } \theta = 2\omega \text{ 时}), \\
r \dot{\neq} T) &= - r(T) \left\{ \frac{1}{2} \omega^{\frac{1}{2}} \alpha k_1 \sin \frac{\alpha \pi}{2} + H \omega \sin 2\phi_T \right\} \quad (\text{当 } \theta = k\omega (k \in N) \text{ 且 } k \neq 2 \text{ 时}).
\end{aligned} \tag{25}$$

系统(25)的零解的稳定性对应于系统(15)的平凡解的稳定性.

当  $\theta = 2\omega$  时, 取  $\eta_1 < \eta_c = 2\omega^3 k_1 \sin \frac{\alpha \pi}{2} - 4H$ , 则对任意的  $\phi$ , 成立

$$r \dot{\neq} T) \leq r(T) \left\{ \frac{1}{2} \omega^{\frac{1}{2}} \alpha k_1 \sin \frac{\alpha \pi}{2} \right\}. \tag{26}$$

当  $\theta = k\omega (k \in N)$  且  $k \neq 2$  时, 如果  $\frac{1}{2} \omega^{1+\alpha} k_1 \sin \frac{\alpha\pi}{2} > H$ , 则对任意的  $\phi$ , (26) 仍成立. 综合上述分析, 当  $\theta = 2\omega$  时, (15) 的平凡解稳定的条件为

$$\eta_1 < \eta_c = 2\omega^\alpha k_1 \sin \frac{\alpha\pi}{2} - 4H. \quad (27)$$

当  $\theta = k\omega (k \in N)$  且  $k \neq 2$  时, (15) 的平凡解稳定的条件为

$$\frac{1}{2} \omega^{1+\alpha} k_1 \sin \frac{\alpha\pi}{2} > H. \quad (28)$$

### 3 数值计算方法

分数导数的计算一般采用如下的方法<sup>[10]</sup>.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha [x(t)] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{x(0)}{t^\alpha} + \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right] \quad (0 < \alpha < 1). \end{aligned} \quad (29)$$

把区间  $[0, t]$  作  $n$  等价,  $t = nh$ ,  $h$  为步长, 则

$$\mathcal{D}^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{x(0)}{(nh)^\alpha} + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{x'(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau \right]. \quad (30)$$

用差分近似替代微分

$$x'(t-\tau) \approx \frac{x_{n-(j+1)} - x_{n-j}}{h}. \quad (31)$$

将(31)代入(30), 并计算积分得:

$$\mathcal{D}^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{x(0)}{(nh)^\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{n-(j+1)} - x_{n-j}) ((j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}) \right\}. \quad (32)$$

采用这种方法, 在计算过程中需要存储整个响应的历史数据, 不利于计算长时间系统的响应.

本文将给出一种计算方法, 克服存储整个历史数据的困难.

记

$$y(t) = \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 \leq t \leq T, 0 < \alpha < 1). \quad (33)$$

把区间  $[0, T]$  作  $m$  等份, 取  $t = n\Delta t$ ,  $\Delta t$  为步长, 是

$$y(n\Delta t) = \int_0^{n\Delta t} \frac{x(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{x(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} y((n+1)\Delta t) &= \int_0^{(n+1)\Delta t} \frac{x(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{x(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \frac{x(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau, \end{aligned} \quad (35)$$

现在假设  $y(n\Delta t)$  已经求得, 下面计算  $y((n+1)\Delta t)$

设  $y((n+1)\Delta t) - y(n\Delta t) = \Delta y$ , 则

$$y((n+1)\Delta t) = y(n\Delta t) + \Delta y, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \int_0^{n\Delta t} x(\tau) G(\tau) d\tau + \sum_{k=n-k-1}^{n-1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} x(\tau) G(\tau) d\tau + \\ &= \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \frac{x(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

其中  $G(\tau) = \frac{1}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} - \frac{1}{(n\Delta t - \tau)^\alpha}$ .

对于(37)的后面两部分仍采用类似(32)的方法, 存储  $n-l$  个数据, 而第一部分的计算采用下面的近似方法

$$\int_0^{(n-l)\Delta t} x(\tau) G(\tau) d\tau = (\Delta t)^{1-\alpha} x((n-l)\Delta t) [t^{-\alpha} - n^{-\alpha}] \quad (38)$$

在实际计算分数导数过程中, 先用(32)的方法计算若干步, 然后采用(36)、(37)、(38)的方法进行计算.

## 4 数值算例

文[4]给出的一类丁腈橡胶(Nitrile Rubber 1479), 材料参数为  $E_0 = 5.04 \times 10^7 \text{Pa}$ ,  $E_1 = 2.27 \times 10^5 \text{Pa}$ ,  $\alpha = 0.64$ . 本文考虑的粘弹性柱的材料为此类丁腈橡胶, 计算得  $k_1 = 0.00450397$ .

4.1 考虑第一模态, 即在(13)中取  $n=1$ , 设  $\omega=1$ , 当激励周期  $\theta=2\omega=2$ , 由式(27)得到  $\eta_c = 0.00759569$ , 其中  $H = 2.49176 \times 10^{-6}$ . 初值条件取  $v(0) = 1, v'(0) = 0$ , 对不同的  $\eta_1$  数值研究系统(15)的零解的稳定性.

当  $\eta_1 < \eta_c$ , 系统稳定, 且响应的幅值渐近于零,  $\eta_1 = 0.0012$  的情形如图1所示. 然而, 当  $\eta_1$  接近  $\eta_c$  时系统响应非常缓慢地趋于零,  $\eta_1 = 0.0074$  的情形如图2所示.

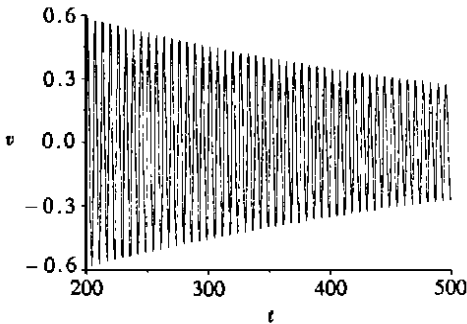


图1  $\omega = 1, \theta = 2, \eta_1 = 0.0012$  的响应

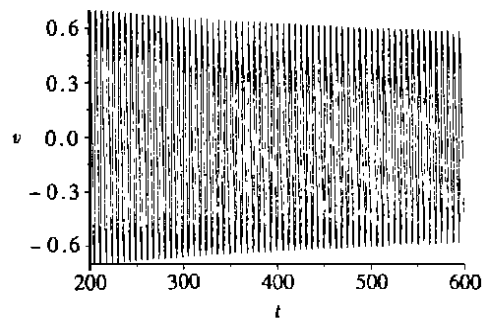


图2  $\omega = 1, \theta = 2, \eta_1 = 0.0074$  的响应

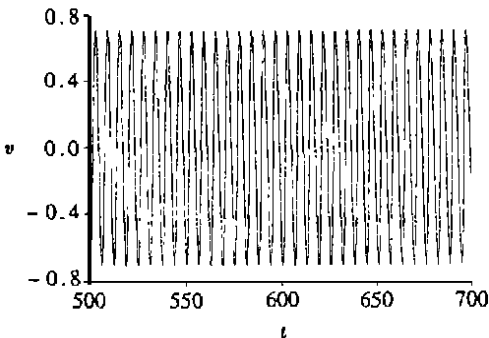


图3  $\omega = 1, \theta = 2, \eta_1 = 0.0076$  的响应

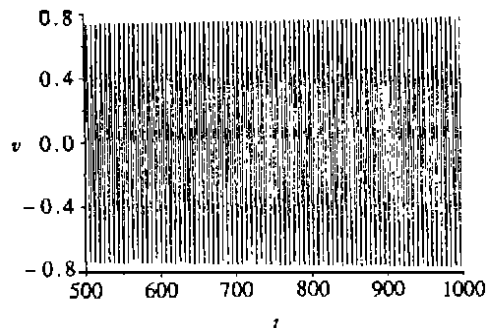


图4  $\omega = 1, \theta = 2, \eta_1 = 0.0081$  的响应

当  $\eta_1 = 0.00760 \approx \eta_c$ , 系统稳定, 响应于等幅运动, 如图3所示.

当  $\eta_1 > \eta_c$ , 系统不稳定. 若  $\eta_1$  略大于  $\eta_c$ , 幅值缓慢地增加,  $\eta_1 = 0.0081$  的情形如图4所示.  $\eta_1 = 0.0114$  的情形如图5所示.

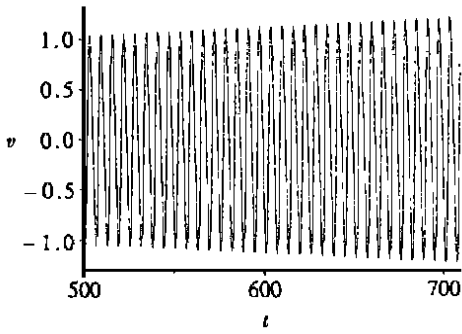


图5  $\omega = 1, \theta = 2, \eta_1 = 0.0114$  的响应

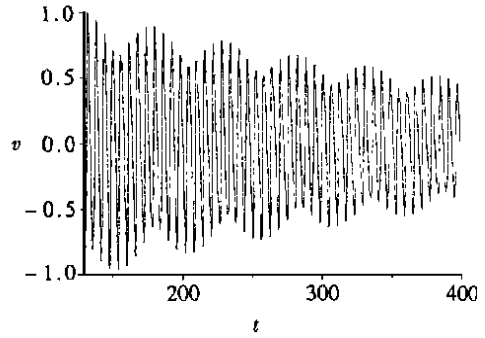


图6  $\omega = 1, \theta = 2, \eta_1 = 0.087$  的响应

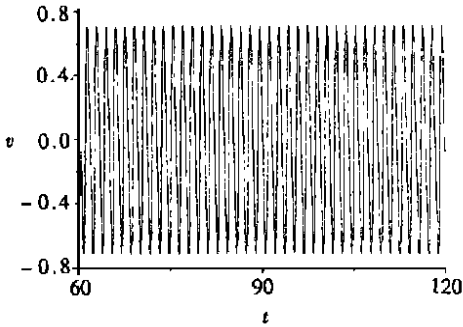


图7  $\omega = 4, \theta = 8, \eta_1 = 0.0185$  的响应

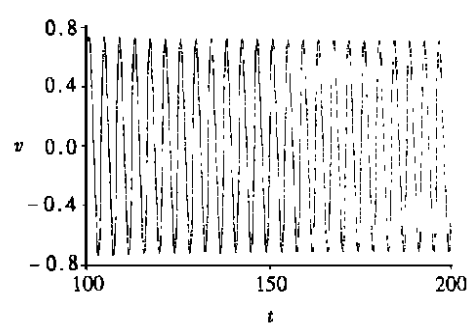


图8  $\omega = 1.5, \theta = 3, \eta_1 = 0.00986$  的响应

当激励周期  $\theta = 3\omega = 3$  时, (28) 显然是满足的。取激励参数  $\eta_1 = 0.087$  时, 系统稳定, 响应的幅值仍渐近于零, 如图 6 所示, 这与平均化方法得到的结论是一致的。

考虑第二模态, 即在(13)中取  $n = 2$ , 则  $\omega = 4$ , 当激励周期  $\theta = 2\omega = 8$ , 由式(27)得  $\eta_c = 0.0184693$ , 其中  $H = 4.74615 \times 10^{-8}$ 。当  $\eta_1 = 0.0185$ , 系统稳定, 响应于等幅值运动, 如图 7 所示。

4.2 考虑第一模态, 即在(13)中取  $n = 1$ , 设  $\omega = 1.5$ , 当激励周期  $\theta = 2\omega = 3$ , 由式(27)得到  $\eta_c = 0.00985576$ , 其中  $H = 8.20273 \times 10^{-7}$ 。当  $\eta_1 = 0.00986$  时, 系统稳定, 响应于等幅运动, 如图 8 所示。

考虑第二模态, 即在(13)中  $n = 2$ , 则  $\omega = 6$ , 当激励周期  $\theta = 2\omega = 12$ , 由式(27)得到  $\eta_c = 0.0239415$ , 其中  $H = 1.4202 \times 10^{-8}$ 。当  $\eta_1 = 0.0241$  时, 系统稳定, 响应于等幅运动, 如图 9 所示。

数值算例的结果与系统(15)的稳定条件基本上是一致的。

## 5 结 论

本文建立了描述筒支的受轴向周期激励的粘弹性柱动力学行为的弱奇异性 Volterra 积分-偏微分方程(8), 柱的材料满足分数导数型本构关系。利用 Galerkin 方法将控制方程(8)化归

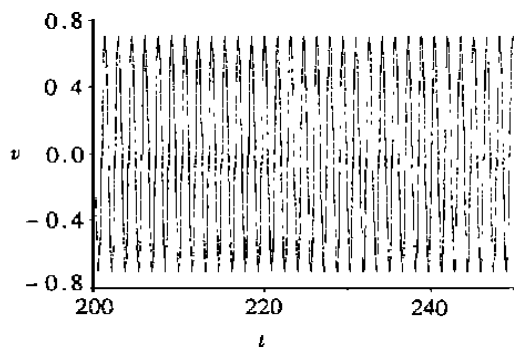


图9  $\omega = 6, \theta = 12, \eta_1 = 0.0241$  的响应



为弱奇异性 Volterra 积分\_常微分方程(15)•

利用平均化方法的思想得到平均化系统(25)来分析粘弹性柱的动力学行为• 给出了粘弹性柱运动稳定状态存在的条件,即载荷参数  $\eta_1$  的一个临界条件(27)•

给出一种新的计算方法,克服了存储整个响应历史数据的困难•  
提供了数值算例,计算结果与解析方法的结论比较吻合•

### [参 考 文 献]

- [1] Cederbaum G, Mond M. Stability properties of a viscoelastic column under a periodic force[J]. J Appl Mech, 1992, 59(16): 16—19.
- [2] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌与超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690—699.
- [3] Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus——a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures[J]. AIAA J, 1983, 21(5): 741—748.
- [4] Bagley R L. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. J Rheol, 1983, 27(3): 201—210.
- [5] 黄文虎, 王心清, 张景绘, 等. 航天柔性结构振动控制的若干进展[J]. 力学进展, 1997, 27(1): 5—18.
- [6] Eneund M, Mahler L, Runesson K, et al. Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws[J]. Int J Solids Struct, 1999, 36(7): 1417—1442.
- [7] Drozdov A D. Fractional differential models in finite viscoelasticity[J]. Acta Mech, 1997, 124(1): 155—180.
- [8] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O Z. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Application [M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [9] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [10] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solid[J]. Appl Mech Rev, 1997, 50(1): 15—67.

## Dynamical Stability of Viscoelastic Column With Fractional Derivative Constitutive Relation

LI Gen\_guo<sup>1,2</sup>, ZHU Zheng\_you<sup>1,2</sup>, CHENG Chang\_jun<sup>1,3</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China;

2 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China;

3 Department of mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

**Abstract:** The dynamic stability of simple supported viscoelastic column, subjected to a periodic axial force, is investigated. The viscoelastic material was assumed to obey the fractional derivative constitutive relation. The governing equation of motion was derived as a weakly singular Volterra integro-partial differential equation, and it was simplified into a weakly singular Volterra integro-ordinary differential equation by the Galerkin method. In terms of the averaging method, the dynamical stability was analyzed. A new numerical method is proposed to avoid storing all history data. Numerical examples are presented and the numerical results agree with the analytical ones.

**Key words:** viscoelastic column; fractional derivative constitutive relation; averaging method; weakly singular Volterra integro-differential equation; dynamical stability