应用数学和力学,第 22 卷 第 3 期(2001 年 3 月) 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 03_0287_08

一类非牛顿渗流系统爆破界的估计*

杨作东, 陆启韶

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

(刘曾荣推荐)

摘要: 首先得到一类拟线性椭圆型方程组的正解的先验界估计和衰减性质, 从而推出该方程组的径向非增正对称解的不存在性结果• 利用此结果建立了一类拟线性反应扩散方程组(非牛顿渗流系统) 的爆破界的估计, 推广了半线性(Fujita 型) 反应扩散方程组的结果•

关 键 词: 爆破; 爆破速率; 拟线性方程组
中图分类号: O175. 25 文献标识码: A

1 引言及问题引出

拟线性反应扩散方程组(即非牛顿渗流系统) 和半线性反应扩散方程组(即牛顿渗流系统) 解的结构是目前非线性微分方程研究中的前沿课题, 它们在现实中扮演着重要重色, 例如在研究电介质的静电场的问题中, 其电势由静态非牛顿渗流系统边值问题所确定, 称为 Poisson_Boltzman 问题• 此类问题还在非牛顿和牛顿流体理论, 多孔煤质中的气体渗流等问题的研究中有着广泛的背景•

近几年, 关于半线性(Fujita 型) 反应扩散方程组

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^m, \\ v_t = \Delta v + u^n \quad ((x, t) \in \Omega \times (0, T)), \end{cases} \tag{A}$$

以及相应的椭圆型方程组

$$\begin{cases} -\Delta u = v^m, \\ -\Delta v = u^n \quad (x \in \Omega), \end{cases} \tag{B}$$

已经有不少研究, 这里区域 $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$, $m, n > 1$(例如参见[1 ~ 5])• 对于问题 (A) 的研究包括整体解的存在性, 多解性, 爆破, 爆破速率, 爆破集, 唯一性和非唯一性等• 对于问题(B) 的研究包括存在性和不存在性, 以及唯一性和非唯一性等, 相比之下, 对于拟线性反应扩散方程组 (即非牛顿渗流系统) 和相对应的拟线性椭圆型方程组的研究结果较少(参见文献[6~ 12]) • 特别是对于拟线性反应扩散方程组的爆破界的估计结果更少•

若存在 $T < +\infty$, 设反应扩散方程的解 $u(x, t)$ 当 $t \to T$ 时有 $\| u(\cdot, t) \|_{C^0(\Omega)} \to \infty$, 则称解在有限时间内爆破, 这时整体解不再存在 •

* 收稿日期: 2000_04_14; 修订日期: 2000_11_29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872010) 和教育部博士学科点基金资助项目(98000619)
作者简介: 杨作东(1961—) , 男, 河北三河人, 博士.

在[1], [9]中涉及的是单个半线性牛顿渗流方程:

$$u_t(x,t) = \Delta u + u^m(x,t) \quad (x,t) \in B(0,R)\times(0,T)$$

和半线性牛顿渗流方程组:

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + v^m(x,t),$$

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) + u^n(x,t)$$

的爆破界的估计问题• 本文进一步研究拟线性的非牛顿渗流系统, 讨论下述问题的正解在爆破点邻近的先验界估计•

$$u_t = \mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) + v^m, \tag{1}$$

$$v_t = \mathrm{div}(|Dv|^{q-2}Dv) + u^n \quad (x,t)\in B(0,R)\times(0,T)\text{•} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) \quad x\in B(0,R), \tag{3}$$

$$u(x,t) = v(x,t) = 0 \quad (x,t)\in \partial B(0,R)\times(0,T), \tag{4}$$

这里 $B(0,R)$ 是中心在原点半径为 R 的球• $T>0$, $p,q\geqslant 2$, $m>p-1$, $n>q-1$, u_0 和 v_0: $B(0,R)\rightarrow \mathbf{R}^N$ 是非负 C^1 函数且在 $\partial B(0,R)$ 上为零• 参数 p 表示介质的特征, 当 $p>2$ 时称为扩张流, $p<2$ 称为拟塑性流体• 若 $p=2$, 被称为牛顿流体•

2 主要结果

在叙述主要定理之前, 我们回忆一些定义:

对 $x\in B(0,R)$ 如果有 $u(x)=u(|x|)$, 则称 $u: B(0,R)\rightarrow R$ 是径向的•

如果 u 是径向的且关于 $r=|x|$ 递减, 称 $u: B(0,R)\rightarrow R$ 对称递减函数

本文的主要结果为下述定理:

定理 假设以下条件成立:

i) $u_0, v_0: B(0,R)\rightarrow R$ 是非负, 径向, 对称递减的 C^1 函数且在 $\partial B(0,R)$ 上为零,

ii) (u,v) 是(1) ~ (4) 定义在 $B(0,R)\times(0,T)$ 上的古典正解, 其中 $(0,T)$ 是最大存在区间, 且 $T<+\infty$,

iii) $\lim\limits_{t\to T} u(0,t) = \lim\limits_{t\to T} v(0,t) = +\infty$,

iv) $u_t(x,t)\geqslant 0$, $v_t(x,t)\geqslant 0$ 对 $(x,t)\in B(0,R)\times(0,T)$,

v) 对任意 $t\in(0,T)$, $u_t(x,t)$ 和 $v_t(x,t)$ 在 $x=0$ 处达到最大值•

vi) 整数 $N\geqslant 2$, 且满足

$$N \leqslant \frac{n(mq+p(q-1))}{mn-(p-1)(q-1)},$$

或

$$N \leqslant \frac{m(nq+q(p-1))}{mn-(p-1)(q-1)},$$

vii) 存在正常数 k_1, k_2 和 $\eta<T$ 使得

$$k_2 u(0,t)^{\delta_2/\delta_1} \leqslant v(0,t) \leqslant k_1 u(0,t)^{\delta_2/\delta_1} \quad (\text{对 } t\in(\eta,T)), \tag{5}$$

则存在正常数 c_1, c_2 使得

$$u(x,t) \leqslant u(0,t) \leqslant c_1(T-t)^{-\delta_1}, \tag{6}$$

$$v(x,t) \leqslant v(0,t) \leqslant c_2(T-t)^{-\delta_2}, \tag{7}$$

对 $(x,t)\in B(0,R)\times(0,T)$• 这里

$$\delta_1 = \frac{mq + (q-1)p}{m(pn + q(p-2)) - p(q-1)},$$

$$\delta_2 = \frac{np + (p-1)q}{n(qm + p(q-2)) - q(p-1)}.$$

本定理的证明放在下节, 我们先给出下面命题:

命题　假设 m, n, p, q, N 满足:

i) $m > p-1, n > q-1$ 以及 $p, q \geqslant 2$

ii) $N \leqslant \frac{n(mq + p(q-1))}{mn - (p-1)(q-1)}$,　$N \geqslant 3$

或 $N \leqslant \frac{m(np + q(p-1))}{mn - (p-1)(q-1)}$. 则方程组

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}|Du|) = v^m, \tag{8}$$

$$-\operatorname{div}(|Dv|^{q-2}|Dv|) = u^n, \quad x \in B(0, R), \tag{9}$$

不存在 $C^1(\mathbf{R}^N)$, 关于 $r = |x|$ 递减的正对称解.

为了证明命题, 我们给出下面引理:

引理 1　设 (u, v) 是方程组(8) ~ (9) 的递减正对称解, 则对 $r > 0$ 有

$$\left(\frac{r^p}{N}\right)^{1/(p-1)} v^{m/(p-1)} \leqslant -ru' \leqslant \frac{N-p}{p-1} u(r), \tag{10}$$

$$\left(\frac{r^q}{N}\right)^{1/(q-1)} u^{n/(q-1)} \leqslant -rv' \leqslant \frac{N-q}{q-1} v(r). \tag{11}$$

证明　系统(8) ~ (9) 在球坐标中可写为

$$-(\phi_p(u')r^{N-1})' = v^m r^{N-1}, \tag{12}$$

$$-(\phi_q(v')r^{N-1})' = u^n r^{N-1}, \tag{13}$$

$$u'(0) = v'(0) = 0, \tag{14}$$

这里 $\phi_p(u) = |u|^{p-2}u$, $\phi_q(v) = |v|^{q-2}v$. 对(12) 在$(0, r)$ 上积分且注意到 $u' < 0, v' < 0$, 我们有

$$-\phi_p(u')r^{N-1} = \int_0^r v^m(s)s^{N-1}\mathrm{d}s = \frac{r^N}{N}v^m(r) - m/N\int_0^r s^N v^{m-1}v'\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{r^N}{N}v^m(r), \tag{15}$$

则

$$-ru' \geqslant \left(\frac{r^p}{N}\right)^{1/(p-1)} v^{m/(p-1)}(r).$$

这是(10) 式左边不等式. 类似可证(11) 式左边不等式.

系统(12) ~ (13) 可写为

$$-(p-1)|u'|^{p-2}u'' + (1-N)/r\phi_p(u') = v^m \quad (\text{对 } r > 0),$$

$$-(q-1)|v'|^{q-2}v'' + (1-N)/r\phi_q(v') = u^n \quad (\text{对 } r > 0),$$

显然

$$-ru'' + (1-N)u'/(p-1) = \frac{rv^m}{(p-1)|u'|^{p-2}}, \tag{16}$$

$$-rv'' + (1-N)v'/(q-1) = \frac{ru^n}{(q-1)|v'|^{q-2}}. \tag{17}$$

我们令

$$M_A(r) = ru' + \frac{N-p}{p-1}u, \quad M_B = rv' + \frac{N-q}{q-1}v.$$

从(16) ~ (17) 式, 推出当 $r > 0$ 时, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}M_A(r) \leqslant 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}M_B(r) \leqslant 0,$$

则 $M_A(r)$, $M_B(r)$ 在$(0, +\infty)$ 上是非增函数•

下面证明对 $r > 0$ 有 $M_A(r) \geqslant 0$• 我们用反证法• 假设存在 $r_1 > 0$ 使得 $M_A(r_1) < 0$, 则我们有

$$u'(r) + (N-p)/(p-1)r^{-1}u \leqslant r^{-1}M_A(r_1), \quad (\text{对 } r > r_1)•$$

因为 u 是非负函数, 我们有

$$u'(r) \leqslant r^{-1}M_A(r_1), \quad r > r_1• \tag{18}$$

对不等式(18) 从 r_1 到 r 积分, 我们得到

$$u(r) - u(r_1) \leqslant M_A(r_1)\ln\left(\frac{r}{r_1}\right), \quad r > r_1•$$

显然 $\lim\limits_{r \to +\infty} u(r) = -\infty$, 这是一个矛盾, 则 $M_A(r) \geqslant 0$• 类似可证 $M_B(r) \geqslant 0$• 因此我们得到结论

$$M_A(r) \geqslant 0, \quad M_B(r) \geqslant 0 \quad (\text{对 } r > 0)• \tag{19}$$

因为 $u' < 0$ 和 $v' < 0$, 我们从(19) 式导出(10) 和(11) 式的右边不等式:

$$-ru' \leqslant \frac{N-p}{p-1}u(r), \quad -rv' \leqslant \frac{N-q}{q-1}v(r) \quad (\text{对 } r > 0)•$$

引理 2 假设定理 1 的条件满足• 令 (u, v) 是方程组(8) ~ (9) 的递减正对称解, 则有

$$u(r) \leqslant Cr^{-\frac{p(q-1)+mq}{mn-(p-1)(q-1)}},$$

$$v(r) \leqslant Cr^{-\frac{q(p-1)+nq}{mn-(p-1)(q-1)}}•$$

证明 从(10) 和(11) 直接得到

$$\left(\frac{r^p}{N}\right)^{1/(p-1)} v^{m/(p-1)}(r) \leqslant \frac{N-p}{p-1}u(r), \tag{20}$$

$$\left(\frac{r^q}{N}\right)^{1/(q-1)} u^{n/(q-1)}(r) \leqslant \frac{N-q}{q-1}v(r)• \tag{21}$$

我们从(20) 和(21) 得

$$u(r) \leqslant C(N, n, p, q, m)\, r^{-\frac{p(q-1)+mq}{mn-(p-1)(q-1)}},$$

$$v(r) \leqslant C(N, n, p, q, m)\, r^{-\frac{q(p-1)+np}{mn-(p-1)(q-1)}}•$$

注 由引理 1 和引理 2 推出下面一些有用的估计, 对 $u(r)$ 和 $v(r)$ 以及充分大的 r 有,

$$-r^{N-1}\phi_p(u')v = r^{N-1}|u'|^{p-1}v \leqslant Cr^{N-p-(\alpha+\beta)},$$

$$-r^{N-1}\phi_q(v')u = r^{N-1}|v'|^{q-1}u \leqslant Cr^{N-q-(\alpha+\beta)},$$

这里 $\alpha + \beta = \dfrac{(p-1)(q-1)q + (q-1)np + p(q-1) + mq}{mn - (p-1)(q-1)}$; $C = C(m, n, p, q, N)$•

因此, 如果 $N < \min(p + \alpha + \beta, q + \alpha + \beta)$, 我们有

$$\lim_{r \to \infty} r^{N-1}\phi_p(u')v = \lim_{r \to \infty} r^{N-1}\phi_q(v')u = 0,$$

$$\lim_{r \to \infty} r^{N-1}\phi_p(u')v' = 0, \ \lim_{r \to \infty} r^{N-1}\phi_q(v')u' = 0$$

和

$$0 \leqslant \int_0^\infty r^{N-1}\phi_p(u')v'\,\mathrm{d}r, \int_0^\infty r^{N-1}\phi_q(v')u'\,\mathrm{d}r < +\infty•$$

命题的证明　令 (u, v) 是方程组(8) ~ (9) 的正对称递减解, 则对 $r > 0$, (u, v) 满足

$$-(r^{N-1}\phi_p(u'))' = r^{N-1}v^m,$$
$$-(r^{N-1}\phi_q(v'))' = r^{N-1}u^n.$$

从命题的条件(i) 和(ii) 可推出

$$\int_0^{+\infty}\xi^{(q-1)(\frac{N-1}{q-1})}\left(\int_\xi^{+\infty}s^{p-1-\frac{N-q}{q-1}m}ds\right)^{n/(p-1)}d\xi = +\infty$$

或

$$\int_0^{+\infty}\xi^{(p-1)(\frac{N-1}{p-1})}\left(\int_\xi^{+\infty}s^{q-1-\frac{N-p}{p-1}n}ds\right)^{m/(q-1)}d\xi = +\infty.$$

从而利用引理 1, 引理 2 和文献[6] 中定理 3. 3 的证明方法, 我们可证明命题成立.

3　主要结果的证明

定理的证明　对 $t \in (0, T)$ 定义

$$\alpha(t) = u(0, t)^{1/\tau_1}, \quad \beta(t) = v(0, t)^{1/\tau_2},$$

这里 $\tau_1 = \dfrac{mq + (q-1)p}{mn - (p-1)(q-1)}$ 和 $\tau_2 = \dfrac{np + (p-1)q}{mn - (p-1)(q-1)}$.

令 $\gamma(t) = \alpha(t) + \beta(t)$, $r = |x|$

$$w_1(r, t) = \frac{u(r/\gamma(t), t)}{\gamma(t)^{\tau_1}}, \quad w_2(r, t) = \frac{v(r/\gamma(t), t)}{\gamma(t)^{\tau_2}},$$

利用定理中的条件 ii) 和 v) , 推出

$$0 \leqslant \mathrm{div}(|\mathrm{D}w_1(r, t)|^{p-2}\mathrm{D}w_1(r, t)) + w_2^m(r, t) \leqslant \frac{u_t(0, t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}}. \tag{22}$$

$$0 \leqslant \mathrm{div}(|\mathrm{D}w_2(r, t)|^{q-2}\mathrm{D}w_2(r, t)) + w_1^n(r, t) \leqslant \frac{v_t(0, t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}. \tag{23}$$

对任何 $t \in (0, T)$ 和 $\tau \in [0, R\gamma(t))$ 成立.

利用定理中的对称性和条件 iii) , 我们可以把(22) ~ (23) 写为

$$0 \leqslant (\phi_p(w_1'))' + \frac{N-1}{r}\phi_p(w_1') + w_2^m \leqslant \frac{u_t(0, t)}{\gamma^{p+(p-1)\tau_1}}, \tag{24}$$

$$0 \leqslant (\phi_q(w_2'))' + \frac{N-1}{r}\phi_q(w_2') + w_1^n \leqslant \frac{v_t(0, t)}{\gamma^{q+(q-1)\tau_2}}. \tag{25}$$

因为 $u_t, v_t \geqslant 0$, 从(24) ~ (25) 我们得到

$$0 \leqslant (\phi_p(w_1'))' + \frac{N-1}{r}\phi_p(w_1') + w_2^m \leqslant \frac{u_t(0, t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}} + \frac{v_t(0, t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}, \tag{26}$$

$$0 \leqslant (\phi_q(w_2'))' + \frac{N-1}{r}\phi_q(w_2') + w_1^n \leqslant \frac{u_t(0, t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}} + \frac{v_t(0, t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}, \tag{27}$$

对任何 $t \in (0, T)$ 和 $\tau \in [0, R\gamma(t))$ 成立.

因为 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 在 $x = 0$ 处达到最大值, 我们容易推出 w_1 和 w_2 有界. 事实上,

$$0 \leqslant w_1(r, t) \leqslant \frac{u(0, t)}{\gamma(t)^{\tau_1}} \leqslant 1, \tag{28}$$

$$0 \leqslant w_2(r, t) \leqslant \frac{v(0, t)}{\gamma(t)^{\tau_2}} \leqslant 1, \tag{29}$$

用 $w_{1,r}$(其中 $w_{1,r}$ 表示 w_1 对 r 求偏导) 乘(24), 我们得到

$$(\phi_p(w_{1,r}))_r w_{1,r} + \frac{N-1}{r}|w_{1,r}|^p + w_2^m w_{1,r} \leqslant 0,$$

从而可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}((p-1)/p\,|w_{1,r}|^p) + w_2^m w_{1,r} \leqslant 0. \tag{30}$$

对(30)在$(0, r)$上积分，我们得到

$$\frac{p-1}{p}|w_{1,r}|^p + w_2^m w_1 - w_2^m(0,t)w_1(0,t) - m\int_0^r w_2^{m-1} w_{2,r}w_1 \mathrm{d}r \leqslant 0. \tag{31}$$

从(31)和$w_{2,r}(r,t) \leqslant 0$，推出

$$|w_{1,r}| \leqslant \left(\frac{2p}{p-1}\right)^{1/p}. \tag{32}$$

对$t \in (0, T)$, $r \in [0, R\gamma(t))$. 类似可得

$$|w_{2,r}| \leqslant \left(\frac{2q}{q-1}\right)^{1/q} \tag{33}$$

对任意$t \in (0, T)$和$r \in [0, R\gamma(t))$成立.

下面我们用反证法去证明

$$\liminf_{t\to T}\left(\frac{u_t(0,t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}} + \frac{v_t(0,t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}\right) = c > 0.$$

如果

$$\liminf_{t\to T}\left(\frac{u_t(0,t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}} + \frac{v_t(0,t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}\right) = 0, \tag{34}$$

则存在序列$\{t_m\} \subseteq (0, T)$以及$t_m \to T$使得

$$\liminf_{t_m\to T}\left(\frac{u_t(0,t_m)}{\gamma(t_m)^{p+(p-1)\tau_1}} + \frac{v_t(0,t_m)}{\gamma(t_m)^{q+(q-1)\tau_2}}\right) = 0.$$

因为由(28)～(29)，和(32)～(33)，$\{w_1(\cdot, t_m)\}$和$\{w_2(\cdot, t_m)\}$是一致有界和Lipschitz连续以及Lipachitz常数不大于$\min\{(2p/(p-1))^{1/p}, (2q/(q-1))^{1/q}\}$，从Ascoli-Arzela定理推出存在序列(仍记为$\{t_m\}$)使得

$$w_1(\cdot, t_m) \to w_1(\cdot), w_2(\cdot, t_m) \to w_2(\cdot) \quad (\text{当 } m \to +\infty) \tag{35}$$

在$[0, +\infty)$上的紧子集一致成立. 此外，$w_1, w_2 \in C([0, +\infty), \mathbf{R}^+)$, $w_1(0) = w_2(0) = 1$，和w_1, w_2在$[0, +\infty)$上是递减的. 进一步，可知w_1, w_2是李普希兹连续，从而在$[0, +\infty)$上绝对连续. 考虑w_1, w_2的分布意义，显然(32)～(33)在分布意义下成立，于是我们在分布意义下有，

$$w_{1,r}(\cdot, t_m) \to w_{1,r}(\cdot), \quad (\phi_p(w_{1,r})(\cdot, t_m))'_r \to (\phi_p(w_{1,r}(\cdot)))_r \quad (\text{当 } m \to +\infty), \tag{36}$$

$$w_{2,r}(\cdot, t_m) \to w_{2,r}(\cdot), \quad (\phi_q(w_{2,r})(\cdot, t_m))'_r \to (\phi_q(w_{2,r}(\cdot)))_r \quad (\text{当 } m \to +\infty). \tag{37}$$

从(35)～(37)，在$(0, \infty)$上按分布意义推出

$$(\phi_p(w_1'))' + \frac{N-1}{r}\phi_p(w_1') + w_2^m = 0, \tag{38}$$

$$(\phi_q(w_2'))' + \frac{N-1}{r}\phi_q(w_2') + w_1^n = 0. \tag{39}$$

从(38)和(39)，可得w_1, w_2是$C^1(0, +\infty)$，且由(38)，(39)初值问题局部解的存在唯一性，我们可得在$(0, \infty)$上$w_1, w_2 > 0$且$w_1'(0) = w_2'(0) = 0$.

如果 $N=2$, 我们从(36) ~ (37) 推得 $r\phi_p(w_1')$ 和 $r\phi_p(w_2')$ 是递减的, 且存在 $M<0$ 和 $r_0>0$ 使得

$$r\phi_p(w_1')<M \text{ 对 } r\in(r_0,+\infty).$$

从上面不等式对 $r_0\leqslant s\leqslant t$ 积分可推出

$$w_1(s)>w_1(s)-w_1(t)=$$

$$(-M)^{1/(p-1)}\int_s^t r^{-1/(p-1)}\mathrm{d}r=(-M)^{1/(p-1)}\left(t^{(p-2)/(p-1)}-s^{(p-2)/(p-1)}\right). \tag{40}$$

对(40)式令 $t\to+\infty$, 我们得出矛盾.

最后, 如果 $N>p$, $N>q$ 成立, 从命题可得(38) ~ (39) 没有正解. 从而得出(34) 不成立, 则有

$$\liminf_{t\to T}\left(\frac{u_t(0,t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}}+\frac{v_t(0,t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}\right)=c>0. \tag{41}$$

从(41)得存在 $t_1\in(0,T)$ 使得对任意 $t\in(t_1,T)$ 我们有

$$c\leqslant\frac{u_t(0,t)}{\gamma(t)^{p+(p-1)\tau_1}}+\frac{v_t(0,t)}{\gamma(t)^{q+(q-1)\tau_2}}\leqslant$$

$$\frac{u_t(0,t)}{u(0,t)^{[m(pn+q(p-1))]/[mq+(q-1)p]}}+\frac{v_t(0,t)}{v(0,t)^{[n(qm+p(q-1))]/[np+(p-1)q]}}. \tag{42}$$

对(42)式在 $(t,s)\subseteq(t_1,T)$ 上两边积分且令 $s\to T$, 我们得到

$$c(T-t)\leqslant\delta_1u(0,t)^{-1/\delta_1}+\delta_2v(0,t)^{-1/\delta_2}. \tag{43}$$

在(43)式利用条件 vii), 可得

$$c(T-t)\leqslant\delta_1k_1^{1/\delta_2}v(0,t)^{-1/\delta_2}+\delta_2v(0,t)^{-1/\delta_2},$$

显然对任意 $(x,t)\in B(0,R)\times(0,T)$ 有 v 的爆破界的估计:

$$v(x,t)\leqslant v(0,t)\leqslant c_2(T-t)^{-\delta_2}.$$

类似可得对 u 的爆破界估计:

$$u(x,t)\leqslant u(0,t)\leqslant c_1(T-t)^{-\delta_1}.$$

证毕.

4 结 论

本文利用一类拟线性椭圆型方程组的不存在性结果, 建立了一类拟线性非牛顿渗流方程系统的爆破界的估计, 从定理的条件来看, 条件 vii) 较强, 我们猜测条件 vii) 可以去掉, 并且可以得到更好的结果, 即

$$u(0,t)=O\left((T-t)^{-\delta_1}\right),\quad v(0,t)=O\left((T-t)^{-\delta_2}\right)\qquad (\text{当 } t\to T).$$

对此将在以后进一步加以讨论.

[参 考 文 献]

[1] Gabriella C, Mitidieri E. Blow_up estimates of positive solutions of a parabolic system[J]. J Differential Equations, 1994, **113**(2): 265—271.

[2] Mitidieri E. Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic system in R^N[J]. Diff Integral Equations, 1996, **9**(3): 465—479.

[3] Escobedo M, Levine A H. Critical blow_up and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction_diffusion equations[J]. Arch Rational Mech Anal, 1995, **129**(1): 47—100.

[4] Escobedo M, Herrero M M. Boundedness and blow up for a semilinear reaction_diffusion system[J]. J Differential Equations, 1991, **89**(1): 176—202.

[5] WU Z Q, Yuan H J. Uniqueness of generalized solutions for a quasilinear degenerate parabolic system [J]. J Partial Differential Equations, 1995, **8**(1): 89—96.

[6] Mitidieri E, Sweers G, Vander Vorst R. Nonexistence theorems for systems of quasilinear partial differential equations[J]. Differential Integral Equations, 1995, **8**(6): 1331—1354.

[7] Clement PH, Manasevich R, Mitidieri E. Positive solutions for a quasilinear system via blow up[J]. Comm in Partial Differential Equations, 1993, , **18**(12): 2071—2106.

[8] GUO Zong_ming. Existence of positive radial solutions for certain quasilinear elliptic systems[J]. Chinese Ann Math, 1996, , **17**A(3): 573—582.

[9] Weissler. An L^{∞} blow_up estimate for a nonlinear heat equation[J]. Comm Pure Appl Math, 1985, **38**(3): 291—295.

[10] GUO Zong_ming, YANG Zuo_dong. Some uniqueness results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems[J]. Acta Math Sinica (new series), 1998, **14**(2): 245—260.

[11] YANG Zuo_dong, GUO Zong_ming. On the structure of positive solutions for quasilinear ordinary differential equations[J]. Appl Anal, 1995, **58**(1): 31—51.

[12] YANG Zuo_dong. Non_Existence of positive entire solutions for elliptic inequalities of p _Laplacian [J]. Appl Math J C U, 1997, **12**B(4): 399—410.

Blow_up Estimates for a Non_Newtonian Filtration System

YANG Zuo_dong, LU Qi_shao

(College of Science Beijing University of Aeronautics and Astronantics, Beijing 100083, P R China)

Abstract: The prior estimate and decay property of positive solutions are derived for a system of quasilinear elliptic differential equations first. Hence, the result of nonexistence for differential equation system of radially nonincreasing positive solutions was implied. By using this nonexistence result, blow_up estimates for a class quasilinear reaction_diffusion systems (non_Newtonian filtration systems) are established, which extencds the result of semilinear reaction_diffusion(Fujita type) systems.

Key words: blow_up; blow_up rates; quasilinear equation system