

文章编号: 1000-0887(2001) 03_0307_07

任意荷载下成层粘弹性地基的一维固结

蔡袁强, 徐长节, 袁海明

(浙江大学 土木系, 杭州 310027)

(皓江推荐)

摘要: 针对成层粘弹性地基模型, 运用 Laplace 变换及矩阵传递法求解了任意荷载下成层粘弹性地基一维变形问题, 得到了频域内的通解, 通过 Laplace 逆变换, 即可计算成层粘弹性地基在任意荷载下的一维变形 Terzaghi 一维固结理论解是本文的一个特例 结合三层地基的算例, 可以看到粘弹性地基的固结相对于弹性地基有个滞后过程, 但随时间最终趋于一致; 循环荷载下粘弹性多层地基固结时, 其有效应力和变形都呈振荡增长, 且不与荷载同步, 而要相对滞后 此外, 通过一工程实例, 对该方法的可靠性进行论证, 以证明该法确能指导工程实践

关键词: 任意荷载; 成层; 粘弹性地基; 一维固结

中图分类号: TU435 文献标识码: A

引 言

自 Terzaghi 之后, 又有许多学者对一维固结问题进行了卓有成效的研究 Wilson (1974)^[1]、Baligh(1978)^[2] 等基于 Terzaghi 理论对矩形波载情况作了详尽的分析^{[1][2]}, 吴世明等(1988)^[3] 推导了以积分形式表达的任意荷载的一维固结方程的通解^[3], 这些都是针对弹性地基情形的研究 对于粘弹性地基, 早在 50 年代, 陈宗基(1958)^[4] 就对此有过研究^[4], 随后门福录(1963)^[5]、赵维炳(1989)^[6] 等学者也对此进行过研究, 他们的研究仅限于单层地基情况 但实际工程土体受力后不仅表现出弹性, 而且还表现出粘性; 地基土层一般也为成层状态, 故层状粘弹性地基很具研究价值 本文针对多层地基的模型, 推导了成层粘弹性地基在任意荷载下的一维固结方程通解, 并结合算例和工程实例, 对多层地基中孔压消散机理及固结变形进行探讨, 以指导工程实践

1 成层粘弹性地基固结方程及求解

设地表荷载随时间任意变化, 其余假设同 Terzaghi 假设, 分析模型如图 1 所示 对于地基中第 i 层: 一维 Kelvin 体的应力_应变关系为:

$$\sigma_i(z, t) = 2G_i \epsilon_i(z, t) + 2 \int_0^t \frac{\dot{\epsilon}_i(z, \tau)}{\tau} d\tau, \quad (1)$$

渗流定律可表述为:

收稿日期: 1999_09_10; 修订日期: 2000_09_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59908012)
作者简介: 蔡袁强(1965), 男, 浙江人, 教授, 博士.

$$\frac{i(z, t)}{t} = \frac{k_i}{r_w} \frac{2}{z^2} i(z, t), \quad (2)$$

其中: G_i 为第 i 层土体的剪切模量, i 为第 i 层土体的粘滞系数, k_i 为第 i 层土体的渗透系数 $i(z, t)$ 表示第 i 层土体中任一深度任一时刻相对于初始有效应力的有效应力增量

由式(1)及式(2), 在任意荷载下, 成层地基一维固结方程为:

$$\frac{i(z, t)}{t} = c_{vi} \frac{2}{z^2} i(z, t), \quad (3)$$

其中: c_{vi} 是第 i 层土体的固结系数:

$$c_{vi} = \frac{k_i}{r_w} \left(2G_i + 2i \frac{1}{t} \right) = c_{ai} + c_{li} \frac{1}{t} \quad (4)$$

对固结方程(3)进行拉氏变换, 可得:

$$s i(z, s) - i(z, 0) = c_{ai} \frac{2}{z^2} i(z, s) + c_{li} \left[s \frac{2}{z^2} i(z, s) - \frac{2}{z^2} i(z, 0) \right], \quad (5)$$

式中: $i(z, s) = \int_0^\infty i(z, t) e^{-st} dt$

对于双面透水表面, 问题的初始边界值条件为:

$$i(z, 0) = 0 \quad (|z| = h_n), \quad (6)$$

$$i(0, t) = p(t) \quad (t > 0), \quad (7)$$

$$i(h_n, t) = p(t) \quad (t > 0) \quad (8)$$

根据式(6)~(8)的拉氏变换式, 求解方程(5)得:

$$i(z, s) = A_{11} \exp(r_1 z) + A_{12} \exp(-r_1 z) \quad (9)$$

其中: $r_i^2 = s / (c_{ai} + c_{li} s)$

层间连续条件: 应力连续: $i|_{z=h_i} = i_{i+1}|_{z=h_i}, \quad (10)$

$$\text{流量连续: } \frac{k_i}{r_w} \frac{i}{z} \Big|_{z=h_i} = \frac{k_{i+1}}{r_w} \frac{i_{i+1}}{z} \Big|_{z=h_i} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (11)$$

对式(7)~(8)及式(10)~(11)进行拉氏变换, 有:

$$A_{11} + A_{12} = P(s), \quad (12)$$

$$A_{n1} e^{r_n h_n} + A_{n2} e^{-r_n h_n} = P(s), \quad (13)$$

$$A_{i1} e^{r_i h_i} + A_{i2} e^{-r_i h_i} = A_{i+1,1} e^{r_{i+1} h_i} + A_{i+1,2} e^{-r_{i+1} h_i}, \quad (14)$$

$$k_i r_i (A_{r1} e^{r_i h_i} - A_{i2} e^{-r_i h_i}) = k_{i+1} r_{i+1} (A_{i+1,1} e^{r_{i+1} h_i} - A_{i+1,2} e^{-r_{i+1} h_i}), \quad (15)$$

其中: $P(s)$ 为荷载 $P(t)$ 的拉氏变换式

由式(14)、(15)可得: $[D_{i+1}] = [M_i][D_i], \quad (16)$

$[D_i]$ 为第 i 层的应力解系数矩阵,

$$[D_i] = \begin{Bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \end{Bmatrix}, \quad [M_i] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) e^{(r_i^- - r_{i+1}^+) h_i} & \frac{1}{2}(1-i) e^{-(r_i^+ + r_{i+1}^-) h_i} \\ \frac{1}{2}(1-i) e^{(r_{i+1}^+ + r_i^-) h_i} & \frac{1}{2}(1+i) e^{-(r_{i+1}^- - r_i^+) h_i} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

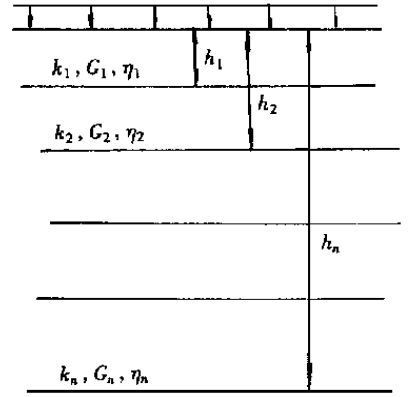


图1 成层粘弹性地基模型

其中: $i = \frac{k_i r_i}{k_{i+1} r_{i+1}}$

由式(16)递推可以得到: $[D_i] = [M_i][D_1]$, (18)

其中: $[M_i] = [M_{i-1}] [M_1]$ ($i = 2, \dots, h$)

由式(12)得: $[1 \quad 1][D_1] = P(s)$, (19)

由式(13)得: $[e^{r_n h} \quad e^{-r_n h}][D_n] = P(s)$, (20)

即: $[e^{r_n h} \quad e^{-r_n h}][M_n][D_1] = P(s)$ (21)

设: $[M_n] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$,

则由(20)、(21)式可解得:

$$[D_1] = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{e^{r_n h} m_{12} + e^{-r_n h} m_{22} - 1}{e^{r_n h} (m_{12} - m_{11}) + e^{-r_n h} (m_{22} - m_{21})} P(s) \\ \frac{1 - e^{r_n h} m_{11} - e^{-r_n h} m_{21}}{e^{r_n h} (m_{12} - m_{11}) + e^{-r_n h} (m_{22} - m_{21})} P(s) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

由式(16)、(22)可求得任一层的系数矩阵 $[D_i]: [D_i] = [M_i][D_1]$ (23)

至此已求出各层应力的拉氏变换解为:

$$i(z, s) = [\exp(rz) \quad \exp(-rz)][D_i] = [\exp(rz) \quad \exp(-rz)][M_i][D_1] \quad (24)$$

将式(24)作 Laplace 逆变换, 即可得到时域内应力解:

$$i(z, t) = \frac{1}{2} \int_{a-i}^{a+i} i(z, s) e^{st} dt \quad (25)$$

根据频域内应力即可计算频域内的应变, 由式(1)的拉氏变换, 地基中任一深度处的应变为:

$$i(z, s) = (z, s)/(2G_i + 2is) \quad (26)$$

则应变的时域解为:

$$i(z, t) = \frac{1}{2} \int_{a-i}^{a+i} i(z, s) e^{st} dt, \quad (27)$$

地基总沉降为:

$$s = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} i(z, r) dz \quad (28)$$

此处需加以说明的是: 对于单面透水情况, 只需对边界条件加以变译, 可采用上述的方法进行同样的推导

2 算例分析

对于数值拉氏逆变换, 目前已提出了多种反演方法, Narayanan 和 Beskos^[7] 比较分析了八种常用的方法, 认为 Durbin 所提出方法是目前精度最高且最可靠的方法。本文采用了 Durbin^[8] 所提出的数值拉氏逆变换方法, 编制了相应的程序, 进行了一系列的计算, 并对结果进行了讨论

算例 1 本算例将考察成层 Kelvin 粘弹性地基及弹性地基应力增长曲线的异曲点, 参考赵维炳(1989)的研究成果, 取成层粘弹性地基的土质参数如表 1, 令表 1 中 $i = 0 (i = 1, 2, 3)$,

即可做为弹性地基计算参数, 荷载为骤加荷载

表 1 三层地基计算参数表

参数	层厚/m	G_i/Pa	$\gamma_i/\text{Pa}\cdot\text{s}$	$k_i/\text{m/s}$
第一层	2.0	1.0×10^7	3.0×10^{13}	3.0×10^{-9}
第二层	3.5	3.0×10^7	1.5×10^{13}	2.0×10^{-11}
第三层	4.5	4.0×10^7	1.0×10^{13}	5.5×10^{-11}

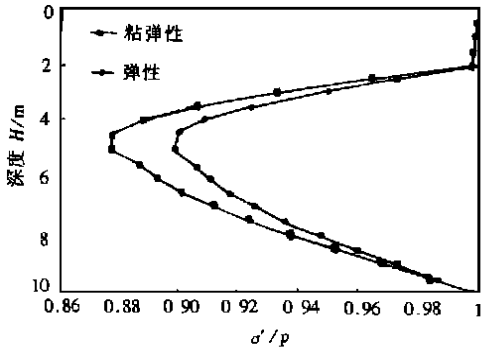


图 2 有效应力沿深度分布

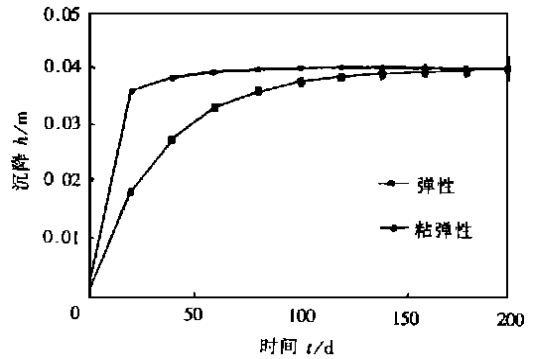


图 3 沉降随时间增长曲线

表 2 三层地基计算参数

参数	层厚/m	G_i/Pa	$\gamma_i/\text{Pa}\cdot\text{s}$	$k_i/\text{m/s}$
第一层	1.0	1.0×10^7	1.5×10^{13}	2.0×10^{-10}
第二层	1.5	2.0×10^7	1.0×10^{13}	3.0×10^{-10}
第三层	1.0	1.0×10^7	1.5×10^{13}	2.0×10^{-10}

图 2 是上述粘弹性地基和弹性地基中当 $t = 50$ 天时有效应力沿深度的分布, 从图中可看到, 弹性地基固结快于粘弹性地基的固结。同时可发现, 由于最上一层的渗透系数远远大于其下两层的渗透系数, 其固结明显快于其下两层的固结。

图 3 是当骤加荷载为 $1.0 \times 10^5 \text{Pa}$ 时弹性三层地基及粘弹性三层地基的变形随时间的变化曲线, 由图 3 可以看出: 固结前期粘弹性三层地基的变形小于弹性三层地基的变形, 随着时间的增长, 两者的差距变小, 最终两者的变形将趋于一致, 达到最终沉降量。

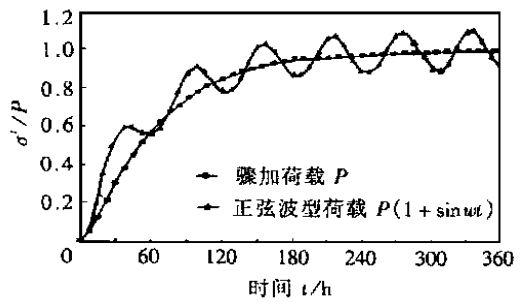


图 4 有效应力增长曲线

算例 2 算例 1 是针对骤加荷载的情形, 本算例将考察正弦波形荷载 $p(t) = p(1 + \sin t)$ 其 Laplace 变换式为: $p(s) = p \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2 + s^2} \right)$, 周期 T 取为 60 小时, 则圆频率 $\omega = 2\pi/T$, 土质计算参数见表 2。图 4 即是 $z = 1.5$ 处骤加荷载和正弦波形荷载下应力增长曲线。

由图 4 可知: 正弦波形荷载下粘弹性三层地基的有效应力增长与骤加荷载下粘弹性三层地基的有效应力增长模式不同, 前者呈振荡增长, 而且其振荡的步调与荷载的步调不完全一致, 应力增长相对于荷载有滞后现象

3 工程实例

某石化公司拟建一个 500 00 立方米油罐, 该油罐地基为软土地基, 土质软弱, 而荷载较大, 故经作者反复研究决定采用水泥搅拌桩法处理该地基, 工程概况参见文献[9] 水泥搅拌桩的水泥掺含量 15%, 桩长为 15m(入细砂层顶面), 桩径 550, 桩距 1 05m, 置换率 $m=25.06$, 具体工况可参见文献[9]:

作者把油罐地基视为双层地基, 上层加固层为第一层, 下卧层为第二层, 通过试验分析, 可得出如下的计算参数:

表 3 地基粘滞性参数

	层厚/m	E/Mpa	粘滞性系数 / Pa · s	渗透系数 $k/\text{m/s}$
第一层	15.0	27.4	$1.0 \cdot 10^{11}$	$3.05 \cdot 10^{-9}$
第二层	19.0	11.8	$0.9 \cdot 10^{10}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$

试水及使用期荷载可简化为如图 5 所示, 由于试水后土实际上已成为超固结土, 而且试水期较长(固结完成的较为充分), 故使用期荷载循环产生的沉降非常小 由实测资料也可看出沉降集中在试水期, 因而本算例只求试水期的沉降量

试水期的荷载是个不等腰三角形荷载和恒载的叠加 对其中三角形荷载部分(如图 6 所示)进行富利叶展开成正余弦函数, 再进行拉氏变换可得:

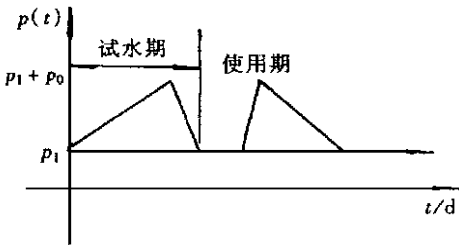


图 5 油罐荷载简化图

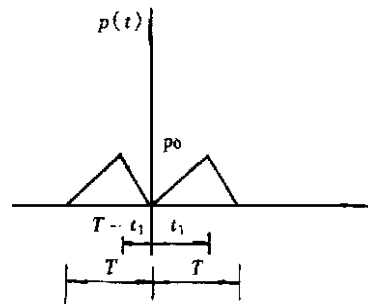


图 6 变荷载示意图

$$\overline{p(s)} = \frac{p_0}{2s} + \sum_{k=1} \left[a_k \frac{s}{(k/T)^2 + s^2} + b_k \frac{k/T}{(k/T)^2 + s^2} \right], \tag{29}$$

其中: $a_0 = 1/T \int_{-T}^T p(t) dt = p_0$;

$$a_k = 1/T \int_{-T}^T p(t) \cos \frac{k \cdot t}{T} dt = \frac{p_0}{k(T-t_1)} [1 + \cos(k)] \left[-\frac{T}{k} + (t_1 - T) \sin \frac{k \cdot t_1}{T} + \frac{T}{k} \cos \frac{k \cdot t_1}{T} \right] + \frac{p_0}{k \cdot t_1} [1 + \cos(k)] \left[t_1 \sin \frac{k \cdot t_1}{T} + \frac{T}{k} + \cos \frac{k \cdot t_1}{T} - \frac{T}{k} \right];$$

$$b_k = 1/T \int_{-T}^T p(t) \sin \frac{k}{T} t dt = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(T-t_1)} [1 + \cos(k)] J \left[(T-t_1) \cos \frac{k}{T} t_1 + \frac{T}{k} \sin \frac{k}{T} t_1 \right] + \frac{p_0}{k} \frac{1}{t_1} [1 + \cos(k)] J \left[\frac{T}{k} \sin \frac{k}{T} t_1 - t_1 \cos \frac{k}{T} t_1 \right] \quad (30)$$

由于工程中尚有恒载 p_1 , 故实际 $\overline{p}(s)$ 表达式为:

$$\overline{p}(s) = \frac{p_1}{s} + \frac{p_0}{2s} + \sum_{i=1} \left[a_k \frac{s}{(k/T)^2 + s^2} + b_k \frac{k/T}{(k/T)^2 + s^2} \right] \quad (31)$$

本工程中 $p_1 = 700\,000\text{Pa}$, $p_0 = 165\,000\text{Pa}$, $T = 85$ 天, $t_1 = 65$ 天 对以上过程进行编程, 计算 85 天的沉降同实测值相比较如图 7 所示 图中有四条曲线, 各代表工程实测总沉降, 计算总沉降, 加固区沉降, 下卧层沉降 由图中可看出实测总沉降和计算值拟合的较好, 变化趋势较接近, 这说明此法用于工程是完全可行的 下卧层的沉降要明显大于加固区的沉降, 这是由于加固区经水泥加固, 模量明显要比下卧层大, 这也符合工程实际 由图中还可看出, 实测值始终要比计算值小一些, 这是由于荷载简化模型同实际情况有一定差距, 即工程上它的加载是个阶梯上升的过程, 因此实际加载计算取值大而快, 故沉降要更大些

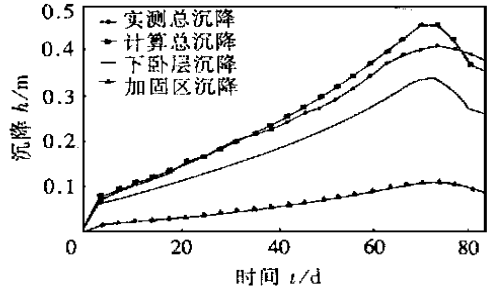


图 7 实测沉降曲线与计算沉降曲线对比

4 结 论

本文针对成层粘弹性地基模型, 运用 Laplace 变换及矩阵传递法求得了成层粘弹性地基在任意荷载下的一维变形, 取得的主要结论有:

- (1) 通过对算例的分析, 粘弹性地基的固结相对于弹性地基明显有个滞后过程, 即前期变形较小, 但随时间最终趋于一致;
- (2) 循环荷载(如正弦波形荷载)下粘弹性多层地基固结时, 其有效应力和变形都呈振荡增长, 且不与荷载同步, 而要相对滞后;
- (3) 用本法计算结果同工程实例结果相比较, 可看出两者较为相近, 由此证明本方法完全可应用于工程实践

[参 考 文 献]

- [1] Wilson N E, Elsohary M M. Consolidation of soils under cyclic loading[J]. Canadian Geot J, 1974, 2(4): 420-423.
- [2] Baligh M M, Levadoux J N. Consolidation theory for cyclic loading[J]. Asce Geotech Engrg, 1978, 104(3): 415-431.
- [3] 吴世明. 周期荷载作用下饱和粘土的一维固结[J]. 浙江大学学报, 1988, 22(5): 60-70.
- [4] 陈宗基. 固结及次时间效应的单向问题[J]. 土木工程学报, 1958, 5(1): 1-10.
- [5] 门福录. 粘土固结与次时间效应单维问题的近似解[J]. 水利学报, 1963, (1): 44-63.
- [6] 赵维炳. 广义 Voigt 模型模拟的饱水土体一维固结理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1989, 11(5): 78-85.
- [7] Narayanan G V, Beskos D E. Numerical operational methods for time dependent linear problems[J].

Int J Num Method Engng, 1978, **18**(10): 1829-1854.

- [8] Durbin J W. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Duber and Abate's method[J]. Comput J, 1963, **17**(3): 371-376.
- [9] 吴世明. 大型地基基础工程技术[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997.

One Dimensional Consolidation of Layered and Visco_Elastic Solids Under Arbitrary Loading

CAI Yuan_qiang, XU Chang_jie, YUAN Hai_ming

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P R China)

Abstract: Based on the layered visco_elastic soil model, according to the Terzaghi's one dimensional consolidation theory, by the method of Laplace transform and matrix transfer technique, the problems about the consolidation of layered and saturated visco_elastic soils under arbitrary loading were solved. Through deductions, the general solution, in the terms of layer thickness, the modulus and the coefficients of permeability and Laplacian transform's parameters was obtained. The strain and deformation of the layered and saturated visco_elastic soils under arbitrary loading can be calculated by Laplace inversion. According to the results of several numerical examples, the consolidation of visco_elastic soils lags behind that of elastic soils. The development of effective stress and the displacement is vibrant process under cyclic loading. Finally, an engineering case is studied and the results prove that the methods are very effective.

Key words: arbitrary loading; layered; visco_elastic soils; one_dimensional consolidation