应用数学和力学, 第 22 卷 第 3 期(2001 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 03_0314_07

一种通用的复模态矩阵摄动法*

刘济科， 徐伟华， 蔡承武

(中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275)

(黄小清推荐)

摘要： 对于非自伴随系统, 提出了一种通用的复模态矩阵摄动法• 该法能同时适用于孤立特征值, 重特征值及密集(相近) 特征值三种复特征值情况• 由复特征子空间缩聚技术求解低阶摄动项, 高阶摄动项则由逐次逼近过程求得• 三个计算实例表明, 该通用方法合理可靠, 精度高•

关 键 词: 摄动法; 复模态; 重特征值; 密集特征值
中图分类号: O324; TH113.1 文献标识码: A

引 言

自伴随系统的矩阵摄动法现已基本成熟[1]• 但在自然科学及工程实际中, 存在大量的非自伴随系统, 如气动弹性稳定性问题, 任意阻尼系统, 陀螺系统等• 两类系统的主要区别有两方面• 一方面, 非自伴随系统不能由对称矩阵描述, 因此在绝大多数情况下, 系统的特征解是复数• 另一方面, 为使非自伴随系统的运动方程解耦, 常需要引入状态空间, 求解左右特征值问题• 由于这两方面的因素, 非自伴随系统的摄动分析尚处于发展阶段• 对孤立复特征值情况, Courant 和 Hilbert 首先研究了一般矩阵的摄动问题[2]• Meirovitch 和 Ryland 分别研究了陀螺系统[3]及小阻尼陀螺系统[4]的矩阵摄动法• 刘济科等进一步讨论了这一问题[5]• 对重特征值情况, 刘满和陈塑寰首先提出了一种摄动法[6]• 徐伟华和刘济科对该法进行了改进[7]• 但对密集复特征值情况, 尚未见到公开发表的文献• 为此, 本文提出一种能同时适用于三种复特征值情况的复模态矩阵摄动法•

1 基 本 方 程

n 自由度非自伴随系统的运动方程用矩阵可以表示成

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{H})\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}$ 分别是 $n \times n$ 阶对称质量阵, 阻尼阵和刚度阵; $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ 分别是 $n \times n$ 阶反对称陀螺阵和循环阵, $\boldsymbol{q}$ 是 n 维广义坐标向量•

引入 $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}$, 可将(1) 式改写成

$$\boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_0 \dot{\boldsymbol{x}}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x} = [\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 是 $2n$ 维状态变量, 且

* 收稿日期: 1999_06_04; 修订日期: 2000_10—20
作者简介: 刘济科(1967—) , 男, 湖北天门人, 教授, 博士.

$$K_0=\begin{bmatrix}-(C+G) & -(K+H)\\ I & 0\end{bmatrix},\ M_0=\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}, \tag{3a}$$

或者

$$K_0=\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & -(K+H)\end{bmatrix},\ M_0=\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C+G\end{bmatrix}\cdot \tag{3b}$$

是 $2n\times 2n$ 阶非对称矩阵, I 是单位阵·

原(未摄动)系统(2)的右左特征值问题分别是

$$K_0x_{i0}=\lambda_{i0}M_0x_{i0}, \tag{4a}$$

$$K_0^{\mathrm T}y_{i0}=\lambda_{i0}M_0^{\mathrm T}y_{i0},\ (i=1,2,\cdots,2n) \tag{4b}$$

其中 λ_{i0}, x_{i0}, y_{i0} 分别是特征值, 右特征赂量和左特征向量· $2n$ 个特征值可以表示成 $\lambda_{10}<\lambda_{20}<\cdots<\lambda_{j0}\cong\cdots\cong\lambda_{k0}<\cdots<\lambda_{2n0}$, 这意味着原系统具有$(k-j+1)$个重或密集特征值· 这里的特征值是按其模进行比较的, 当且仅当两特征值的实部及虚部都(近似)相等时, 它们才(近似)相等·

左右特征向量满足双正交关系, 因此可范化成

$$y_{i0}^{\mathrm T}M_0x_{j0}=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\cdots,2n)\cdot \tag{5}$$

其中, δ_{ij} 是 Kronecker 函数·

显然, (5)式不能唯一确定 x_{i0}, y_{i0}, 为此需要补充另一个条件· 不失一般性, 本文选取能保证特征向量共轭的范化条件·

$$x_{i0}^{\mathrm T}x_{i0}=1\qquad(i=1,2,\cdots,2n) \tag{6}$$

系统参数的改变将使(2)式中的 K_0, M_0 发生相应的变化, 由于这些变化通常较小, 故可表示为: $K=K_0+\varepsilon K_1$, $M=M_0+\varepsilon M_1$, 其中 εK_1, εM_1 是相应的改变量, 是一阶小量, ε 是小参数· 于是, 摄动系统的特征值问题可表示成

$$(K_0+\varepsilon K_1)x_i=\lambda_i(M_0+\varepsilon M_1)x_1\qquad(i=1,2,\cdots,2n), \tag{7a}$$

$$(K_0+\varepsilon K_1)^{\mathrm T}y_i=\lambda_i(M_0+\varepsilon M_1)^{\mathrm T}y_i\qquad(i=1,2,\cdots,2n)\cdot \tag{7b}$$

相应的范化条件及双正交条件是

$$x_i^{\mathrm T}x_i=1, \tag{8a}$$

$$y_i^{\mathrm T}(M_0+\varepsilon M_1)x_j=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\cdots,2n), \tag{8b}$$

这里, λ_i, x_i, y_i 分别是摄动系统的特征值, 右左特征向量·

2　特征子空间缩聚

选取相应于重或密集特征值的特征向量张成两个复子空间, 即 $S=[x_{j0},\cdots,x_{k0}]$, $R=[y_{j0},\cdots,y_{k0}]$, 由(5)式可得

$$R^{\mathrm T}M_0S=I\cdot \tag{9}$$

将 x_i, y_i 分别对 S, R 进行正交分解

$$x_i=Sp_i+\delta x_i, \tag{10a}$$

$$y_i=Rq_i+\delta y_i, \tag{10b}$$

$$\delta x_i\perp Sp_i, \tag{10c}$$

$$\delta y_i\perp Rq_i\cdot \tag{10d}$$

其中 p_i, q_i 是$(k-j+1)$维向量, δx_i, δy_i 是一阶 $2n$ 维向量$(i=j,j+1,\cdots,k)$· 为节省篇幅,

除非特别说明, 以下均省去“$i = j, j+1, \cdots, k$”•

(10a), (10b) 式代入(7a), (7b) 式, 利用(10c), (10d) 式, 忽略二阶项, 根据变分原理可得两个 $(k-j+1)$ 阶的缩聚特征值问题

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}_i = \mu_i \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_i, \tag{11a}$$

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i = \mu_i \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i \cdot \tag{11b}$$

其中 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_0 + \varepsilon\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_0 + \varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{S}$, μ_i 是 λ_i 的一阶近似•

(10a), (10b) 式代入(8a), (8b) 式, 利用(5), (6) 式可得

$$\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i = \mathbf{1}, \tag{12a}$$

$$\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_i = \mathbf{1} \cdot \tag{12b}$$

它们分别是相应于(11a), (11b) 式的范化条件•

求解(11), (12) 式, 可得 $(k-j+1)$ 组特征解: μ_i, $\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{q}_i$, 也即求得了 λ_i, $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$ 的低阶摄动项• 由于原系统与摄动系统的特征子空间的夹角一般不大, 所以 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i$ 只有一阶误差, 根据 Rayleigh 商的性质, μ_i 只有二阶误差•

3 高 阶 摄 动

为求高阶摄动项, 考虑到 μ_i, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i$ 的精度, 可将摄动解表示为

$$\lambda_i = \mu_i + \varepsilon^2\lambda_{i2} + \varepsilon^3\lambda_{i3}\cdots, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i + \varepsilon\boldsymbol{x}_{i1} + \varepsilon^2\boldsymbol{x}_{i2}\cdots, \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i + \varepsilon\boldsymbol{y}_{i1} + \varepsilon^2\boldsymbol{y}_{i2}\cdots \tag{13c}$$

比较(13b), (13c) 式与(10a), (10b) 式, 并利用(10c), (10d) 式, 可得

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_{im} \perp \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i, &(14a)\\ &\boldsymbol{y}_{im} \perp \boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i, &(14b)\end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 2, \cdots) \cdot$$

(13a), (13b) 式代入(7a) 式, 忽略四阶项, 可将所得方程分解成

$$[(\boldsymbol{K}_0 + \varepsilon\boldsymbol{K}_1) - \mu_i(\boldsymbol{M}_0 + \varepsilon\boldsymbol{M}_1)]\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i + \varepsilon(\boldsymbol{K}_0 - \mu_i\boldsymbol{M}_0)\boldsymbol{x}_{i1} = \mathbf{0}, \tag{15a}$$

$$(\boldsymbol{K}_1 - \mu_i\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{i1} - \lambda_{i2}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i + (\boldsymbol{K}_0 - \mu_i\boldsymbol{M}_0)\boldsymbol{x}_{i2} = \mathbf{0}, \tag{15b}$$

$$(\boldsymbol{K}_1 - \mu_i\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{i2} - \lambda_{i3}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i + (\boldsymbol{K}_0 - \mu_i\boldsymbol{M}_0)\boldsymbol{x}_{i3} - \lambda_{i2}(\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{i1} + \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i) = \mathbf{0} \cdot \tag{15c}$$

利用(14a) 式, 将 $\boldsymbol{x}_{i1}$, $\boldsymbol{x}_{i2}$ 用原右特征向量展开

$$\boldsymbol{x}_{i1} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} c_{il1}\boldsymbol{x}_{l0}, \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{x}_{i2} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} c_{il2}\boldsymbol{x}_{l0}, \tag{16b}$$

其中 c_{il1}, c_{il2} 是待定复系数•

将(16a) 代入(15a), (16b) 代入(15b), 用 $\boldsymbol{y}_{l0}^{\mathrm{T}}$ 前乘所得的两个方程, 并利用(5), (14a) 及(14b) 式, 可求得

$$\left.\begin{aligned} c_{il1} &= \frac{\boldsymbol{y}_{l0}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \mu_i\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_i}{\mu_i - \lambda_{l0}}, &(17a)\\ c_{il2} &= \frac{\boldsymbol{y}_{l0}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \mu_i\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{i1}}{\mu_i - \lambda_{l0}}, &(17b)\end{aligned}\right\} \quad (l \neq j\sim k),$$

进而得到

$$x_{i1} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} \frac{y_{l0}^{\mathrm{T}}(K_1 - \mu_i M_1) S p_i}{\mu_i - \lambda_{l0}} x_{l0}, \tag{18a}$$

$$x_{i2} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} \frac{y_{l0}^{\mathrm{T}}(K_1 - \mu_i M_1) x_{i1}}{\mu_i - \lambda_{l0}} x_{l0}. \tag{18b}$$

(16b) 代入(15b), 用 $(Rq_i)^{\mathrm{T}}$ 前乘所得方程, 并利用(5), (9) 式, 得

$$\lambda_{i2} = \frac{q_i^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} (K_1 - \mu_i M_1)}{q_i^{\mathrm{T}} p_i} x_{i1}. \tag{19}$$

由(15c), (5) 及(9) 式, 即可推得

$$\lambda_{i3} = \frac{q_i^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} [(K_1 - \mu_i M_1) x_{i2} - \lambda_{i2} M_1 S p_i]}{q_i^{\mathrm{T}} p_i}. \tag{20}$$

为求 y_{i1}, y_{i2}, 先将它们用原左特征向量展开

$$y_{i1} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} d_{il1} y_{l0}, \tag{21a}$$

$$y_{i2} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} d_{il2} y_{l0}. \tag{21b}$$

仿上述推导过程, 可求得 d_{il1}, d_{il2}, 于是得到

$$y_{i1} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} \frac{(Rq_i)^{\mathrm{T}}(K_1 - \mu_i M_1) x_{l0}}{\mu_i - \lambda_{l0}} y_{l0}, \tag{22a}$$

$$y_{i2} = \sum_{l=1, \neq j\sim k}^{2n} \frac{y_{i1}^{\mathrm{T}}(K_1 - \mu_i M_1) x_{l0}}{\mu_i - \lambda_{l0}} y_{l0}. \tag{22b}$$

至此, (13) 式中的所有未知项已全部求得. 更高阶摄动项的推导在此从略.

对孤立特征值情况, 即当 $i \neq j \sim k$ 时, 该方法也完全适用. 事实上, 仅需选取 $S = x_{l0}$, $R = y_{l0}(l \neq j \sim k)$, 按以上推导即可求得相应于孤立特征值的摄动解. 因此, 本文方法是一种通用的复模态矩阵摄动法.

4 算　　例

算例 1　考虑一个二维系统

$$M_0 = I,\ \varepsilon M_1 = 0,$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon K_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其两个特征值是 $-0.25 \pm 1.391\,94\mathrm{i}$, 属孤立特征值情况. 按本文方法求得的一阶及二阶摄动解列在表 1 中. 表中同时列出了精确解, 以供比较.

算例 2　考虑一个四维系统

$$M_0 = I,\ \varepsilon M_1 = 0,$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon K_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其四个特征值是 $-0.25 \pm 1.391\,94\mathrm{i}$, $-0.25 \pm 1.391\,94\mathrm{i}$, 有两对重特征值. 按本文方法求得的一阶及二阶摄动解列在表 2 中.

算例 3　考虑另一个四维系统

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I},\ \varepsilon\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{K}_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.95 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \varepsilon\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}•$$

其四个特征值是$-0.25\pm1.373\ 86\mathrm{i}$, $-0.25\pm1.391\ 94\mathrm{i}$, 有两对密集特征值• 按本文方法求得的一阶及二阶摄动解列在表 3 中•

表 1 摄动系统的特征解(算例 1,孤立特征值情况)

λ_i	$\boldsymbol{x}_i$	$\boldsymbol{y}_i$	
精确解	− 0.3±1.418 74i	− 1.277 10±0.212 127i	− 0.367 609I 0.143 905i
		0.325 653±0.831 888i	0.093 738 1I 0.564 347i
本文方法	− 0.3±1.418 88i	− 1.27675±0.211 397i	− 0.368 018I 0.143 915i
(一阶)		0.324 725±0.831 166i	0.093 197 3I 0.564 805i
本文方法	− 0.3±1.418 73i	− 1.277 14±0.212 168i	− 0.367 581I 0.143 913i
(二阶)		0.325 701±0.831 955i	0.093 742 6I 0.564 313i

表 2 摄动系统的特征解(算例 2, 重特征值情况)

	λ_i	$\boldsymbol{x}_i$	$\boldsymbol{y}_i$
精确解	− 0.25±1.391 94i	0.933 924I 0.149 042i	0.253 558±0.088 542 i
		− 0.220 469I 0.631 353i	− 0.059 856 5±0.375 073i
		0.933 924I 0.149 042i	0.253 558±0.088 542 6i
		− 0.220 469I 0.631 353i	− 0.059 856 5±0.375 073i
	− 0.35±1.441 35i	0.877 270I 0.148 977i	0.265 565±0.114 298i
		− 0.237 170I 0.551 051i	− 0.071 795 6±0.422 777i
		− 0.877 270±0.148 977i	− 0.265 565I 0.114 298i
		0.237 170±0.551 051i	0.071 795 6I 0.422 777i
本文方法(一阶)	− 0.25±1.391 94i	0.933 923I 0.149 042i	0.253 558±0.088 542 6i
		− 0.220 469I 0.631 352i	− 0.059 856 5±0.375 073i
		0.933 923I 0.149 042i	0.253 558±0.088 542 6i
		− 0.220 469I 0.631 352i	− 0.059 856 5±0.375 073i
	− 0.35±1.445 82i	0.876 602I 0.147 178i	0.266 653±0.114 316i
		− 0.234 806I 0.549 459i	− 0.070 214 2±0.423 945i
		− 0.876 602±0.148 977i	− 0.266 653I 0.114 316
		0.234 806±0.549 459i	0.070 214 2I 0.423 945i
本文方法(二阶)	− 0.25±1.391 94i	0.933 924I 0.149 042i	0.253 558±0.088 542 6i
		− 0.220 469I 0.631 353i	− 0.059 856 5±0.375 073i
		0.933 924I 0.149 042i	0.253 558±0.088 542 6i
		− 0.220 469I 0.631 353i	− 0.059 856 5±0.375 073i
	− 0.35±1.441 28i	0.877 427I 0.149 196i	0.265 417±0.114 347i
		− 0.237 431I 0.551 355i	− 0.071 833 9±0.422 595i
		− 0.877 427±0.149 196i	− 0.265 417I 0.114 347
		0.237 431±0.551 355i	0.071 833 9I 0.422 595i

表 3　　摄动系统的特征解(算例 3, 密集特征值情况)

	λ_i	$\boldsymbol{x}_i$	$\boldsymbol{y}_i$
精确解	-0.250 632±1.382 59i	0.913 181±0.080 363 3i	0.236 470±0.104 737i
		-0.172 198±0.629 272i	-0.089 044 6±0.076 381 2i
		0.964 000±0.223 263i	0.268 515±0.076 381 2i
		-0.278 718±0.646 719i	0.035 439 9±0.387 456i
	-0.349 368±1.432 95i	0.899 409±0.219 374i	0.281 848±0.100 950i
		-0.288 948±0.557 216i	-0.048 279 9±0.442 329i
		-0.862 511±0.081 667 3i	-0.247 365±0.131 551i
		0.192 314±0.555 025i	-0.098 323 6±0.397 527i
本文方法(一阶)	-0.250 607±1.382 57i	0.910 886±0.082 687 0i	0.236 210±0.103 850i
		-0.173 527±0.627 381i	-0.083 872 3±0.355 309i
		0.965 843±0.220 841i	0.268 628±0.077 232 1i
		-0.277 250±0.648 328i	0.036 582 7±0.387 826i
	-0.349 393±1.437 47i	0.900 624±0.215 212i	0.283 097±0.101 792i
		-0.285 155±0.557 233i	-0.048 790 3±0.443 921i
		-0.859 489±0.081 941 9i	-0.248 197±0.130 695i
		0.191 048±0.551 479i	-0.095 593 3±0.398 117i
本文方法(二阶)	-0.250 632±1.382 58i	0.910 858±0.082 823 5i	0.236 251±0.103 865i
		-0.173 441±0.627 347i	-0.083 856 7±0.355 273i
		0.965 816±0.220 718i	0.268 600±0.077 227 8i
		-0.277 341±0.648 322i	-0.036 160 7±0.387 882i
	-0.349 531±1.432 87i	0.901 353±0.217 575i	0.281 822±0.101 921i
		-0.288 029±0.559 033i	-0.050 573 4±0.442 540i
		-0.860 474±0.083 787 9i	-0.246 941±0.130 629i
		0.193 639±0.553 563i	-0.097 099 5±0.396 719i

5　结　　论

从表 1, 2 及 3 中的结果可以看到, 在三种特征值情况下, 本文方法求得的一阶摄动解与精确解比较已具有足够的精度, 二阶摄动解基本上等于精确解• 因此, 本文方法是一种有效的分析复模态摄动问题的通用方法•

[参 考 文 献]

[1] CHEN Jing_yu, LIU Ji_ke, ZHAO Ling_cheng. An improved perturbation method for free vibration analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, **180**(3): 519—523.

[2] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics[M]. Vol. 1. New York: Interscience, 1953, 343—348.

[3] Meirovitch L, Ryland G. Response of lightly damped gyroscopic systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, **67**(1): 1—19.

[4] Meirovitch L, Ryland G. A perturbation technique for gyroscopic systems with small internal and external damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 1985, **100**(3): 393—408.

[5] 刘济科, 张宪民, 孟光. 对复模态矩阵摄动法的补充[J]. 航空动力学报, 1996, **11**(1): 97—99.

[6] 刘满, 陈塑寰. 复模态矩阵摄动法[J]. 吉林工业大学学报, 1986, **16**(3): 1—9.

[7] 徐伟华, 刘济科. 阻尼系统振动分析的复模态矩阵摄动法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1998, **37**(4): 50—54.

A Universal Matrix Perturbation Technique for Complex Modes

LIU Ji_ke, XU Wei_hua, CAI Cheng_wu
(Department of Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, P R China)

Abstract: A universal matrix perturbation technique for complex modes is presented. This technique is applicable to all the three cases of complex eigenvalues: distinct, repeated and closely spaced eigenvalues. The lower order perturbation formulas are obtained by performing two complex eigensubspace condensations, and the higher order perturbation formulas are derived by successive approximation process. Three illustrative examples are given to verify the proposed method and satisfactory results are observed.

Key words: perturbation method; complex modes; repeated eigenvalues; closely spaced eigenvalues