应用数学和力学, 第22卷 第2期(2001年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2001)02_0140_11

广义凸空间内的拟平衡问题和约束多目标对策*

丁协平

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在没有线性结构的广义凸空间内研究了一类拟平衡问题和一类约束多目标对策· 首先在非紧广义凸空间内对拟平衡问题证明了两个解的存在性定理· 然后作为拟平衡存在定理的应用, 在广义凸空间内对约束多目标对策建立了几个加权 Nash_平衡和帕雷多平衡存在定理· 这些定理改进、统一和推广了最近文献中多目标对策的相应结果·

关 键 词: 拟平衡问题; 约束多目标对策; 加权 Nash_平衡; 帕雷多平衡; 广义凸空间
中图分类号: O225 文献标识码: A

引 言

设 X 和 Y 是非空集, 2^X 是 X 的一切子集的族· 设 $T: X \to Y$ 是单值映象, $A: X \to 2^X$ 是集值映象, $\phi: X \times Y \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 和 $f: X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是函数· 一般拟平衡问题 GQEP(T, A, ϕ) 是: 求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ \phi(\hat{x}, T\hat{x}, y) \leqslant 0 \qquad \forall y \in A(\hat{x}) \cdot \end{cases} \tag{1}$$

GQEP(T, A, ϕ) 首先由 Ding[1] 引入和研究· 在一般拓扑空间内得到某些平衡存在定理和它们的应用· 如果 $\phi(x, Tx, y) = f(x, Tx) - f(y, Tx)$ 对一切 $(x, y) \in X \times X$ 成立, 则 GQEP(T, A, ϕ) 化归下面的 QEP(T, A, f): 求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ f(\hat{x}, T\hat{x}) \leqslant f(y, T\hat{x}) \qquad \forall y \in A(\hat{x}) \cdot \end{cases} \tag{2}$$

QEP(T, A, f) 由 Noor 和 Oettli[2] 引入和研究· Cubiotti[3] 和 Ding[4,5] 分别在有限维空间、拓扑矢量空间和广义凸空间内证明了 QEP(T, A, f) 平衡点的某些存在定理· GQEP(T, A, ϕ) 和 QEP(T, A, f) 包含了很多最优化问题, Nash 型平衡问题, 拟变分不等式问题, 拟补问题和其它问题作为特殊情形, 见[1—6] 和其中的参考文献·

n_人对策平衡点概念首先由 Nash[7,8] 引入, 他在一定假设下建立了平衡点的存在结果· 此后, n_人对策 Nash 平衡问题已由许多作者在各种假设下和在不同方向上进行了广泛的研究

* 收稿日期: 1999_09_20; 修订日期: 2000_10_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059); 四川省教局厅科学基金资助项目
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授.

和推广• 具有有限或无限多个局中人的约束对策是 n_人对策的一个重要推广, 此问题已被许多作者广泛研究•

最近在对策论研究中,大量注意已集中在具有矢量支付的对策问题上, 例如见[9~19]和其中参考文献• 理由之一是多准则模型能更好地应用于真实实际情形• 研究多准则模型的动机能在Szidarovszky等[9], Zeleny[10], 和Bergstresser和Yu[11]的文章内找到, 而帕雷多平衡的存在性是基本问题之一• 为了保证无约束的多目标对策的帕雷多平衡的存在性, 已由几个作者给出了某些充分条件, 例如见Wang的[15,16], Ding的[17], Yuan和Tarafdar的[18]和Yu和Yuan的[19]•

在[20]中, Ding首先引入了一类新的带有约束对应的多目标对策并且分别在非紧H_空间和广义凸空间内证明了约束多目标对策的某些平衡存在定理•

在本文中, 我们在非紧广义凸空间内和在很弱的假设下证明了GQEP(T, A, ϕ)和QEP(T, A, f)解的新的存在定理• 这些定理包含了[1—6]中很多已知结果作为特殊情形• 然后, 使用这些存在结果, 在非紧广义凸空间内建立了约束多目标对策的加权Nash平衡和帕雷多平衡的几个存在定理• 这些定理改进,统一和推广了最近文献中对约束多目标对策和多目标对策的帕雷多平衡的相应存在性结果•

1 预备知识

对集X, 分别用2^X和$\mathscr{F}(X)$表示X的一切子集的族和X的一切非空有限子集的族• 称拓扑空间X的子集B是紧开(紧闭)的如果对X的任何紧子集K, $B \cap K$在K内是开(闭)的•

下面广义凸(或G_凸)空间概念由Park和Kim[21,22]引入• 称$(X, D; \Gamma)$是一G_凸空间如果X是一拓扑空间, D是X的非空子集和$\Gamma: \mathscr{F}(D) \to 2^X$使得

1) 对$A, B \in \mathscr{F}(D)$, $A \subset B$蕴含$\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$;

2) 对每一$A \in \mathscr{F}(D)$, $|A| = n+1$, 存在连续映象$\varphi_A: \Delta_n \to \Gamma(A)$使得$B \in \mathscr{F}(A)$, $|B| = J+1$, 蕴含$\varphi_A(\Delta_J) \subset \Gamma(B)$, 其中$|A|$表$A$的基数, Δ_n表n_维单形和Δ_J表Δ_n的对应于$B \in \mathscr{F}(A)$的面•

当$D = X$时, 用(X, Γ)代替$(X, X; \Gamma)$• 令$(X, D; \Gamma)$是G_凸空间和$K \subset X$• 称K是G_凸的如果对每一$B \in \mathscr{F}(D)$, $B \subset K$蕴含$\Gamma(B) \subset K$• K的G_凸包是集合$\cap\{B \subset X: B$是X的包含K的G_凸子集$\}$且用$G_co(K)$表示• 于是$G_co(K)$是X的包含K的最小G_凸子集且有$G_co(K) = \cup\{G_co(A): A \in \mathscr{F}(K)\}$(见[23])•

我们令(X, Γ)是G_凸空间和$f: X \times X \to \mathbf{R} \cap \{\pm\infty\}$是函数• 对每一给定的$x \in X$, 称$f(x, y)$在第二自变量$y$是$G$_拟凹($G$_拟凸)的如果对任意$\lambda \in \mathbf{R}$, 集$\{y \in X: f(x, y) \geqslant \lambda\}$($\{y \in X: f(x, y) \leqslant \lambda\}$)是$G$_凸的• 称$f(x, y)$在第二自变量$y$是0_$G$_对角拟凹(0_$G$_对角拟凸)的如果对每一$B \in \mathscr{F}(X)$和对任何$x_0 \in G_co(B)$, $\min_{y \in A} f(x_0, y) \leqslant 0$ ($\max_{y \in A} f(x_0, y) \geqslant 0$)•

G_凸空间包含很多具有各类凸结构的拓扑空间作为特殊情形• 详情见Park和Kim的[21,22]•

设$\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$和对每一$i \in \mathbf{N}$, X^i是拓扑空间• 我们将使用下面记号

$$X = \prod_{i \in \mathbf{N}} X^i \text{和} X^{\hat{i}} = \prod_{j \in \mathbf{N}, j \neq i} X^j•$$

对 $x\in X$, x^i 表它的第 i 个坐标和 $x^{\hat{i}}$ 表 x 在 $X^{\hat{i}}$ 上的投影• 记 $x=(x^i, x^{\hat{i}})$•

我们将考虑具有有限个局中人和多准则的约束对策, 其策略形式为 $G=(X^i, A^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$• 对每一局中人 $i\in\mathbf{N}$, X^i 是它的策略集; $A^i: X^{\hat{i}}\to 2^{X^i}$ 是它的约束对应, 即当其它局中人已经选择了他们的策略 $x^j\in X^j$, $j\neq i$ 时, 它限制第 i 个局中人只能在子集 $A^i(x^{\hat{i}})\subset X^i$ 中选取策略; 和 $F^i=(f_1^i, f_2^i, \cdots, f_{k_i}^i): X\to\mathbf{R}^{k_i}$ 是它的支付函数(或称损失函数或多准则), 其中 k_i 是一正整数• 在这样的约束多目标对策中, 其它局中人对局中人 $j\in\mathbf{N}$ 的影响如下:

(a) 由限制 j 的可行策略在 $A^j(x^{\hat{j}})$ 中选取, 间接影响 j;

(b) 由影响 j 的支付函数 F^j 直接影响 j•

如果一个策略 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)\in X$ 被实施, 每个局中人 i 均试图极小化她或他的支付函数 $F^i(x)=(f_1^i(x), f_2^i(x), \cdots, f_{k_i}^i(x))$, 这组成不可用同一标准测量的结果• 每一个局中人 i 在结果空间 $\mathbf{R}^{k_i}$ 上有一选择 $\succcurlyeq_i$• 对每个局中人 $i\in\mathbf{N}$, 他的选择 $\succcurlyeq_i$ 被给出如下:

$$z^1\succcurlyeq_i z^2 \quad 当且仅当 z_j^1\geqslant z_j^2, \quad \forall j=1, 2, \cdots, k_i,$$

其中 $z^1=(z_1^1, z_2^1, \cdots, z_{k_i}^1)$ 和 $z^2=(z_1^2, z_2^2, \cdots, z_{k_i}^2)$ 是 $\mathbf{R}^{k_i}$ 中任意元素• 局中人的选择关系诱导出对每一局中人 i 定义的 X 上的选择, 且由

$$每当\ F^i(x)\succcurlyeq_i F^i(y)\ 时, \quad x\succcurlyeq_i y$$

选取 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 和 $y=(y^1, y^2, \cdots, y^n)$•

在约束多目标对策中, 每一个局中人 $i\in\mathbf{N}$ 都试图按照她或他的选择极小化她或他的支付函数•

如果对每一 $i\in\mathbf{N}$ 和对一切 $x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}$, $A(x^{\hat{i}})=X^i$, 则约束多目标对策模型化归由 Wang[15, 16]、Ding[17]、Yuan 和 Tarafdar[18] 和 Yu 和 Yuan[19] 研究的多准则对策模型 $G=(X^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$• 如果对每一局中人 $i\in\mathbf{N}$, $F^i(x)=f^i(x)$, 即 $k_i=1$, 它由可测量结果组成, 则约束多目标对策化归由 Aubin[24, p 282~283], Aubin 和 Ekeland[25, p 350—351], Ding[26, 27], Tian[28] 和 Yuan, Isac, Tan 和 Yu[29] 研究的约束对策(或称亚对策)模型•

对具有矢量支付函数的对策(或称多准则), 已知一般不存在一策略 $\hat{x}\in X$ 极小化(或等价地说极大化) 一切 f_j^i, 对每一局中人 $i\in\mathbf{N}$, 例如见参考文献[13]• 因此我们需要给出约束多目标对策解的某些概念• 全文中, 对每一给定的 $m\in\mathbf{N}$, 我们将用 $\mathbf{R}_+^m$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 的非负挂限 (orthant), 即

$$\mathbf{R}_+^m=\left\{u=(u^1, u^2, \cdots, u^m)\in\mathbf{R}^m: u^j\geqslant 0, \quad \forall j=1, \cdots, m\right\},$$

固 $\mathbf{R}^m$ 的非负挂限 $\mathbf{R}_+^m$ 在关于欧氏度量的矢量收敛所诱导的拓扑下有非空内部• 即有

$$\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m=\left\{u=(u^1, u^2, \cdots, u^m)\in\mathbf{R}^m: u^j>0, \ \forall j=1, \cdots, m\right\}•$$

我们分别用 T_+^m 和 $\operatorname{int}T_+^m$ 表 $\mathbf{R}_+^m$ 的单形和它的相对内部, 即

$$T_+^m=\left\{u=(u^1, u^2, \cdots, u^m)\in\mathbf{R}_+^m: \sum_{j=1}^m u_j=1\right\},$$

$$\operatorname{int}T_+^m=\left\{u=(u^1, u^2, \cdots, u^m)\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^m: \sum_{j=1}^m u_j=1\right\}•$$

现在我们有如下定义:

定义 1.1 称局中人 i 的一策略 $\hat{x}^i\in X^i$ 是关于 $\hat{x}\in X$ 的一帕雷多有效策略(弱帕雷多有效策略) 如果 $\hat{x}^i\in A(\hat{x}^{\hat{i}})$ 和不存在 $x^i\in A(\hat{x}^{\hat{i}})$ 使得

$$F^i(\hat{x}) - F^i(x^i, \hat{x}^{\hat{i}}) \in \mathbf{R}_+^{k_i} \setminus \{0\} \qquad (F^i(\hat{x}) - F^i(x^i, \hat{x}^{\hat{i}}) \in \operatorname{int}\mathbf{R}_+^{k_i})\bullet$$

定义 1.2　一策略 $\hat{x} \in X$ 被说成是约束多目标对策 $G = (X^i, A^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 的一个帕雷多平衡(弱帕雷多平衡) 如果对每一个局中人 $i \in \mathbf{N}$, $\hat{x}^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$ 是关于 $\hat{x}$ 的一帕雷多有效策略(弱帕雷多有效策略)•

由上述定义易知每一帕雷多平衡是弱帕雷多平衡, 反之不真• 我们也需要下面定义, 其思路来源于 Wang[15, 16]•

定义 1.3　称策略 $\hat{x} \in X$ 是约束多目标对策 $G = (X^i, A^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 关于权矢量 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \dots, W^n)$ 的一加权 Nash_ 平衡如果对每一局中人 $i \in \mathbf{N}$, 有

1) $\hat{x}^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$;

2) $W^i \in \mathbf{R}_+^{k_i} \setminus \{0\}$;

3) $W^i \bullet F^i(\hat{x}) \leqslant W^i F^i(x^i, \hat{x}^{\hat{i}})$,　$\forall x^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$;

其中"•"表示 $\mathbf{R}_+^{k_i}$ 中的内积•

注 1.1　特别如果 $W^i \in T_+^{k_i}$, $\forall i \in \mathbf{N}$, 则称 $\hat{x}$ 是关于 $\boldsymbol{W}$ 的正规加权 Nash_ 平衡• 由上述定义不难证明一策略 $\hat{x} \in X$ 是对策 $G = (X^i, A^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 关于权矢量 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \dots, W^n)$ 的加权 Nash_平衡当且仅当 $\hat{x} \in X$ 是下面约束最优化问题的最优解: 求 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} \hat{x}^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}}), \\ W^i \bullet F^i(\hat{x}) = \min\limits_{x^i \in A(\hat{x}^{\hat{i}})} W^i \bullet F^i(x^i, \hat{x}^{\hat{i}})\bullet \end{cases}$$

2　拟平衡问题

下面结果是 Ding[30] 的定理 2.3 的特殊情形•

引理 2.1　令 (X, Γ) 是 G_凸空间, K 是 X 的非空紧子集和 $G: X \to 2^X$ 有非空 G_凸值使得

(i) 对每一 $y \in X$, $G^{-1}(y)$ 是紧开的;

(ii) 对每一 $B \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的包含 B 的非空紧 G_凸子集 L_B 使得对每一 $x \in L_B \setminus K$, $G(x) \cap L_B \neq \varnothing$• 则存在 $\hat{x} \in K$ 使得 $\hat{x} \in G(\hat{x})$•

下面结果是 Ding[20] 的引理 3.2•

引理 2.2　设 X、Y 是拓扑空间, Φ, Ψ: $X \to 2^Y$ 是集值映象和 D 是 X 的紧闭子集• 假设对每一 $x \in X$, $\Phi(x) \subset \Psi(x)$ 和对每一 $y \in Y$, $\Phi^{-1}(y)$ 和 $\Psi^{-1}(y)$ 在 X 内都是紧开的, 则由下式定义的映象 $G: X \to 2^Y$:

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in D, \\ \Psi(x), & x \in X \setminus D, \end{cases}$$

使得对每一 $y \in Y$, $G^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的•

定理 2.1　设 (X, Γ) 是 G_凸空间, K 是 X 的非空紧子集和 Y 是非空集• 设 $T: X \to Y$, $A: X \to 2^X$ 和 $\phi: X \times Y \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 使得

(i) A 有非空 G_凸值使得对每一 $y \in X$, $A^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的和集 $D = \{x \in X: x \in A(x)\}$ 在 X 内是紧闭的;

(ii) 对每一 $y \in X$, 集 $\{x \in X: \phi(x, Tx, y) \leqslant 0\}$ 在 X 内是紧闭的;

(iii) 函数 $f(x, y) = \phi(x, Tx, y)$ 在 y 是 0_G_对角拟凹的;

(iv) 对每一 $B \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的包含 B 的非空紧 G_凸子集 L_B 使得对每一 $x \in L_B \setminus K$,

若 $x \notin D$, 则 $A(x) \cap L_B \neq \emptyset$; 若 $x \in D$, 则 $A(x) \cap G\_co(P(x)) \cap L_B \neq \emptyset$ 其中 $P(x) = \{y \in X: \psi(x, Tx, y) > 0\}$.

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ \psi(\hat{x}, T\hat{x}, y) \leqslant 0 \qquad \forall y \in A(\hat{x}). \end{cases}$$

证明　定义集值映象 $P: X \to 2^X$ 如下:

$$P(x) = \{y \in X: \psi(x, Tx, y) > 0\} \qquad \forall x \in X.$$

由假设(ii), 对每一 $y \in X$, $P^{-1}(y) = \{x \in X: \psi(x, Tx, y) > 0\}$ 在 X 内是紧开的. 由使用 Ding[31] 引理3.1的证明中类似的论证易证对每一 $y \in X$, $(G\_coP)^{-1}(y)$ 也是紧开的. 现在假设对每一 $x \in D$, $A(x) \cap P(x) \neq \emptyset$. 定义映象 $G: X \to 2^X$ 如下

$$G(x) = \begin{cases} A(x) \cap G\_co(P(x)), & x \in D, \\ A(x), & x \in X \setminus D. \end{cases}$$

则由条件(i), G 有非空 $G_$凸值且由引理2.2, 对每一 $y \in X$, $G^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的. 易知条件(iv)蕴含引理2.1的条件(ii)成立. 由引理2.1, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in G(\hat{x})$. 如果 $\hat{x} \in D$, 则 $\hat{x} \in G(\hat{x}) = A(\hat{x}) \cap G\_co(P(\hat{x})) \subset G\_co(P(\hat{x}))$. 由集的 $G_$凸包性质, 存在 $A_1 \in \mathscr{F}(P(\hat{x}))$ 使得 $\hat{x} \in G\_co(A_1)$ 且因此有

$$f(\hat{x}, y) = \psi(\hat{x}, T\hat{x}, y) > 0 \qquad \forall y \in A_1,$$

这与条件(iii)矛盾. 如果 $\hat{x} \notin D$, 则 $\hat{x} \in G(\hat{x}) = A(\hat{x})$, 这与 D 的定义相矛盾. 所以存在 $\hat{x} \in D$ 使得 $A(\hat{x}) \cap P(\hat{x}) = \emptyset$, 即存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ \psi(\hat{x}, T\hat{x}, y) \leqslant 0 \qquad \forall y \in A(\hat{x}). \end{cases}$$

注2.1　定理2.1是 Ding[1] 的定理2.1在 $G_$凸空间的变形.

定理2.2　令 (X, Γ) 是 $G_$凸空间, K 是 X 的非空紧子集和 Y 是非空集, 设 $T: X \to Y$, $A: X \to 2^X$ 和 $\varphi: X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 使得

(i) A 有非空 $G_$凸值使得对每一 $y \in X$, $A^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的且集 $D = \{x \in X: x \in A(x)\}$ 在 X 内是紧闭的;

(ii) 对每一 $y \in X$, 集 $\{x \in X: \varphi(x, Tx) - \varphi(y, Tx) \leqslant 0\}$ 在 X 内是紧闭的;

(iii) 函数 $f(x, y) = \varphi(x, Tx) - \varphi(y, Tx)$ 在 y 是 $0_G_$对角拟凹的;

(iv) 对每一 $B \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的包含 B 的非空紧 $G_$凸子集 L_B 使得对每一 $x \in L_B \setminus K$, 如果 $x \notin D$, 则 $A(x) \cap L_B \neq \emptyset$; 如果 $x \in D$, 则 $A(x) \cap G\_co(P(x)) \cap L_B \neq \emptyset$, 其中 $P(x) = \{y \in X: \varphi(x, Tx) - \varphi(y, Tx) > 0\}$.

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ \varphi(\hat{x}, T\hat{x}) \leqslant \varphi(y, T\hat{x}) \qquad \forall y \in A(\hat{x}), \end{cases}$$

即 $\hat{x}$ 是 QEP(T, A, f) 的一平衡点.

证明　对每一 $(x, y) \in X \times X$, 令 $\psi(x, Tx, y) = \varphi(x, Tx) - \varphi(y, Tx)$, 则定理2.2的结论由定理2.1推得.

注2.2　定理2.2推广了 Ding[20] 的定理3.1从 $H_$空间到 $G_$凸空间. 容易看出如果对每一 $x \in X$, 函数

$y \mapsto \varphi(y, Tx)$ 是 G_拟凸的，则定理 2.2 的条件(iii) 成立• 因此定理2.2改进了Ding[5]的定理 3.2 并且从几个方面推广了 Ding[4] 的定理 2.1 和 Cubiotti[3] 的定理 4.2•

系 2.1　设 (X, Γ) 是 G_凸空间，K 是X 的非空紧子集，$A: X \to 2^X$ 是集值映象和 $\varphi: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是函数使得

(i) 定理 2.2 的条件(i)成立;

(ii) 对每一 $y \in X$，集 $D = \{x \in X: \varphi(x, x) - \varphi(y, x) \leqslant 0\}$ 在 X 内是紧闭的;

(iii) 函数 $f(x, y) = \varphi(x, x) - \varphi(y, x)$ 在 y 是 0_G_对角拟凹的;

(iv) 对每一 $B \in \mathscr{F}(X)$，存在 X 的包含 B 的非空紧 G_凸子集 L_B 使得对每一 $x \in L_B \setminus K$，如果 $x \notin D$，则 $A(x) \cap L_B \neq \varnothing$；如果 $x \in D$，则 $A(x) \cap G\_co(P(x)) \cap L_B \neq \varnothing$，其中 $P(x) = \{y \in X: \varphi(x, x) - \varphi(y, x) > 0\}$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ \varphi(\hat{x}, \hat{x}) \leqslant \varphi(y, \hat{x}) \qquad \forall y \in A(\hat{x})\text{•} \end{cases}$$

如果再设 $\varphi(x, x) \geqslant 0$ 对一切 $x \in X$ 成立，则有

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ \varphi(y, \hat{x}) \geqslant 0 \qquad \forall y \in A(\hat{x})\text{•} \end{cases}$$

证明　在定理 2.2 中令 $Y = X$ 和 T 是恒等映象• 第一结论由定理 2.2 推得• 显然第二结论成立•

注 2.3　如果 $x \mapsto \varphi(x, x)$ 在 X 的每一紧子集上是下半连续的和 $y \mapsto \varphi(x, y)$ 在 X 的每一紧子集上是上半连续的，则条件(ii) 被自动满足• 如果对每一 $x \in X$，$y \mapsto \varphi(y, x)$ 是 G_拟凸的，则条件(iii) 被自动满足• 系 2.1 推广了 Ding[20] 的系 3.1 到 G_凸空间•

3　加权 Nash_平衡的存在性

作为系 2.1 的应用，我有下面约束多目标对策加权 Nash_平衡的存在定理•

定理 3.1　设 $G = (X^i, A^i, F^i)_{i \in \mathbf{N}}$ 是约束多目标对策其中 (X^i, Γ^i) 是 G_凸空间，$A^i: X^{\hat{i}} \to 2^{X^i}$ 是约束对应和 $F^i = (f^i_1, f^i_2, \dots, f^i_{k_i}): X \to \mathbf{R}^{k_i}$ 是局中人 i 的支付函数• 对每一 $i \in \mathbf{N}$，令 K^i 是 X^i 的非空紧(不必 G_凸) 子集和 $K = \prod_{i \in \mathbf{N}} K^i$• 假设存在权矢量 $\mathbf{W} = (W^1, W^2, \dots, W^n)$，$W^i \in \mathbf{R}^{k_i} \setminus \{0\}$，使得下面条件成立:

(i) 对每一 $i \in \mathbf{N}$，A^i 有非空 G_凸值使得对每一 $y^i \in X^i$，$(A^i)^{-1}(y^i)$ 在 $X^{\hat{i}}$ 内是紧开的和集 $D = \{x \in X: x \in A(x)\}$ 在 X 内是紧闭的其中 $A(x) = \prod_{i \in \mathbf{N}} A^i(x^{\hat{i}})$ 对每一 $x \in X$ 成立;

(ii) 由 $\varphi(y, x) = \sum_{i \in \mathbf{N}} W^i \cdot F^i(y^i, x^{\hat{i}})$ 定义的函数 $\varphi: X \times X \to \mathbf{R}$ 满足: $x \mapsto \varphi(x, x)$ 在 X 的每一紧子集上是下半连续的和对每一 $x \in X$，$y \mapsto \varphi(x, y)$ 在 X 的每一紧子集上是上半连续的;

(iii) 函数 $f(x, y) = \varphi(x, x) - \varphi(y, x)$ 在 y 是 0_G_对角拟凹的;

(iv) 对每一 $B \in \mathscr{F}(X)$，存在 X 的包含 B 的非空紧 G_凸子集 L_B 使得对每一 $x \in L_B \setminus K$，若 $x \notin D$，则 $A(x) \cap L_B \neq \varnothing$；若 $x \in D$ 则 $A(x) \cap G\_co(P(x)) \cap L_B \neq \varnothing$，其中 $P(x) = \{y \in X: \varphi(x, x) - \varphi(y, x) > 0\}$•

则 G 至少有一关于权矢量 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash_平衡点 $\hat{x} \in X$•

证明 令 $X=\prod_{i\in\mathbf{N}}X^i$ 具有乘积拓扑和对每一$i\in\mathbf{N}$, 令 $P_i: X\to X^i$ 是X 到X^i 上的投影• 对任何$A\in\mathscr{F}(X)$, 令 $\Gamma(A)=\prod_{i\in\mathbf{N}}\Gamma^i(A^i)$ 其中$A^i=P_i(A)$, 则由Tan[23] 的引理4.3, (X,Γ) 是 $G_$凸空间• 显然K 是X 的非空紧子集• 由条件(ⅰ), 对每一 $x\in X, A(x)=\prod_{i\in\mathbf{N}}A^i(x^{\hat{i}})$ 是非空 $G_$凸子集且对每一$y\in X$,

$$A^{-1}(y)=\left\{x\in X:\ y\in A(x)\right\}=\\ \left\{x\in X:\ y^i\in A^i(x^{\hat{i}}),\ \ \forall i\in\mathbf{N}\right\}=\\ \bigcap_{i\in\mathbf{N}}\left(X^i\times\left\{x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}:\ x^{\hat{i}}\in(A^i)^{-1}(y^i)\right\}\right)=\\ \bigcap_{i\in\mathbf{N}}\left(X^i\times(A^i)^{-1}(y^i)\right)$$

在X 内是紧开的, 因此系2.1的条件(ⅰ)成立• 由条件(ⅱ)~(ⅳ), 容易看出A 和φ满足系2.1 的所有条件• 因此存在$\hat{x}\in X$ 使得$\hat{x}\in A(\hat{x})$ 和 $\varphi(\hat{x},\hat{x})\leqslant\varphi(y,\hat{x})$, $\forall y\in A(\hat{x})$, 即是

$$\sum_{i\in\mathbf{N}}W^i\cdot F^i(\hat{x}^i,\hat{x}^{\hat{i}})\leqslant\sum_{i\in\mathbf{N}}W^i\cdot F^i(y^i,\hat{x}^{\hat{i}})\qquad\forall y\in A(\hat{x})\cdot\tag{3}$$

对每一$i\in\mathbf{N}$和对任意给定的$y^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$, 令$y=(y^i,\hat{x}^{\hat{i}})$, 则有$y\in A(\hat{x})$ 且由(3) 式推得对一切$y^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$, $W^i\cdot F^i(\hat{x})\leqslant W^i\cdot F^i(y^i,\hat{x}^{\hat{i}})$• 这就证明了对每一$i\in\mathbf{N}$,

$$\hat{x}^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})\ \text{和}\ W^i\cdot F^i(\hat{x})=\min_{y^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})}W^i\cdot F^i(y^i,\hat{x}^{\hat{i}}),$$

即$\hat{x}\in X$ 是约束多目标对策G 关于权矢量$\boldsymbol{W}$的一加权Nash_平衡点•

定理3.2 设$G=(X^i,F^i)_{i\in\mathbf{N}}$是多目标对策, 对每一$i\in\mathbf{N}$, (X^i,Γ^i)是$G_$凸空间, $F^i=(f_1^i,f_2^i,\cdots,f_{k_i}^i): X\to\mathbf{R}^{k_i}$ 是局中人i 的支付函数和K^i 是X^i 的非空紧子集• 令$K=\prod_{i\in\mathbf{N}}K^i$, 假设存在权矢量 $\boldsymbol{W}=(W^1,W^2,\cdots,W^n)$, $W^i\in\mathbf{R}^{k_i}\setminus\{0\}$, 使得定理3.1 的条件(ⅱ)和(ⅲ)成立且下面条件被满足:

(ⅳ)′ 对每一$B\in\mathscr{F}(X)$, 存在X 的包含B 的非空紧$G_$凸子集L_B 使得对每一$x\in L_B\setminus K$, $G\_\mathrm{co}(\{y\in X:\varphi(x,x)-\varphi(y,x)>0\})\cap L_B\neq\varnothing$•

则多目标对策G 至少有一关于权矢量$\boldsymbol{W}$的加权Nash_平衡点•

证明 对每一$i\in\mathbf{N}$和对一切$x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}$, 令$A^i(x^{\hat{i}})=X^i$, 则定理3.2 的结论由定理3.1得到•

注3.1 如果对每一$i\in\mathbf{N}$, (X^i,Γ^i) 是紧$G_$凸空间, 则由令$K^i=X^i$和$L_B=X=\prod_{i\in\mathbf{N}}X^i$ 对$i\in\mathbf{N}$和$B\in\mathscr{F}(X)$ 成立, 则定理3.1的条件(ⅳ)和定理3.2 的条件(ⅳ)′ 被平凡满足• 定理3.1推广了Ding[20] 的定理4.1从$H_$空间到$G_$凸空间•

系3.1 设$G=(X^i,A^i,F^i)_{i\in\mathbf{N}}$是约束多目标对策, 其中$X^i$ 是拓扑矢量空间的非空凸子集, $A^i: X^{\hat{i}}\to 2^{X^i}$ 是约束对应和$F^i=(f_1^i,f_2^i,\cdots,f_{k_i}^i): X\to\mathbf{R}^{k_i}$ 是支付函数, 对每一$i\in\mathbf{N}$, 令K^i是X^i 的非空紧子集和$K=\prod_{i\in\mathbf{N}}K^i$• 假设存在一权矢量 $\boldsymbol{W}=(W^1,W^2,\cdots,W^n)$, $W^i\in\mathbf{R}^{k_i}\setminus\{0\}$ 使得下面条件被满足:

(ⅰ) 对每一$i\in\mathbf{N}$, A^i 有非空凸值和对每一$y^i\in X^i$, $(A^i)^{-1}(y^i)$ 在$X^{\hat{i}}$ 内是紧开的且集$D=\{x\in X: x\in A(x)\}$在X 内是紧闭的其中$A(x)=\prod_{i\in\mathbf{N}}A^i(x^{\hat{i}})$;

(ⅱ) 定理3.1 的条件(ⅱ)成立;

(ⅲ) 函数$f(x,y)=\varphi(x,x)-\varphi(y,x)$ 在y 是0_对角拟凹的(见[32]);

(iv) 对每一 $B\in\mathscr{F}(X)$, 存在 X 的包含 B 的紧凸子集 L_B 使得对每一 $x\in L_B\setminus K$, 若 $x\notin D$, 则 $A(x)\cap L_B\neq\varnothing$; 若 $x\in D$, 则 $A(x)\cap L_B\cap\mathrm{co}(\{y\in X: \varphi(x,x)-\varphi(y,x)>0\})\neq\varnothing$. 则 G 至少有一个关于权矢量 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash_平衡点.

证明　对每一 $i\in\mathbf{N}$ 和 $B^i\in\mathscr{F}(X^i)$, 令 $\Gamma^i(B^i)=\mathrm{co}B^i$, 则每一 (X^i,Γ^i) 是一 G_凸空间. 系 3.1 的结论由定理 3.1 得到.

系 3.2　设 $G=(X^i,F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 是多目标对策, 其中 X^i 是拓扑矢量空间的非空凸子集和 $F^i=(f_1^i,f_2^i,\cdots,f_{k_i}^i): X\to\mathbf{R}^{k_i}$ 是第 i 个局中人的支付函数. 对每一 $i\in\mathbf{N}$, 令 K^i 是 X^i 的非空紧子集和 $K=\prod_{i\in\mathbf{N}}K^i$. 假设存在权矢量 $\boldsymbol{W}=(W^1,W^2,\cdots,W^n)$, $W^i\in\mathbf{R}^{k_i}\setminus\{0\}$, 使得系 3.1 的条件(ii)和(iii)成立且下面条件被满足:

(iii)′ 对每一 $B\in\mathscr{F}(X)$, 存在 X 的包含 B 的非空紧凸子集 L_B 使得对每一 $x\in L_B\setminus K$,

$$L_B\cap\mathrm{co}(\{y\in X: \varphi(x,x)-\varphi(y,x)>0\})\neq\varnothing.$$

则多目标对策 G 至少有一个关于权矢量 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash_平衡点.

证明　易知系 3.2 的结论可由系 3.1 推得.

注 3.2　如果系 3.2 中的条件(iii)和(iii)′分别由下面条件代替:

(ii)″ 对每一 $x\in X$, 函数 $y\mapsto\sum_{i\in\mathbf{N}}W^i\cdot F^i(y^i,x^{\hat{i}})$ 是拟凸的;

(iii)″ 存在 X 的非空紧凸子集 X_0 使得对每一 $x\in X\setminus K$, 存在 $y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})$ 满足

$$\sum_{i\in\mathbf{N}}W^i\cdot F^i(x)>\sum_{i\in\mathbf{N}}W^i\cdot F^i(y^i,x^{\hat{i}}).$$

则系 3.2 的结论仍成立. 事实上条件(ii)″显然蕴含定理 3.1 的条件(iii). 现在证明条件(iii)″蕴含系 3.2 的条件(iii)′. 对每一 $B\in\mathscr{F}(X)$, 令 $L_B=\mathrm{co}(X_0\cup B)$, 则 L_B 是非空紧凸子集且包含 B. 对每一 $x\in L_B\setminus K$, 我们有 $\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\subset L_B$ 且由条件(iii)″, 存在 $y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})\subset L_B$ 使得 $\varphi(x,x)-\varphi(y,x)>0$, 其中 $\varphi(y,x)=\sum_{i\in\mathbf{N}}W^i\cdot F^i(y^i,x^{\hat{i}})$. 因此有 $y\in L_B\cap\{y\in X: \varphi(x,x)-\varphi(y,x)>0\}\neq\varnothing$ 且因此有 $L_B\cap\mathrm{co}(\{y\in X: \varphi(x,x)-\varphi(y,x)\})\neq\varnothing$, 即(iii)″⇒(iii)′. 所以系 3.2 改进和推广了 Yuan 和 Tarafdar[18] 的定理 1, Yu 和 Yuan[19] 的定理 2, Wang[16] 的定理 3.1, Szidarovszky 等[9] 的定理 1.11 和 Borm 等[12] 的定理 1. 定理 3.1 进一步统一和推广了上述结果到约束多目标对策和没有线性结构的非紧 G_凸空间.

4　帕雷多平衡的存在性

在本节中我们将使用上节中加权 Nash_平衡的存在结果来推导约束多目标对策的帕雷多平衡的某些存在结果. 为此我们需要下面引理, 它告诉我们在某些情况下约束多目标对策的帕雷多平衡存在性能转化为加权 Nash_平衡的存在性来处理.

引理 4.1　对约束多目标对策 $G=(X^i,A^i,F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 的每一关于权矢量 $\boldsymbol{W}=(W^1,W^2,\cdots,W^n)\in\prod_{i\in\mathbf{N}}T_+^{k_i}$ ($\boldsymbol{W}\in\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathrm{int}\,T_+^{k_i}$) 的正规化加权 Nash_平衡 $\hat{x}\in X$ 是对策 G 的弱帕雷多平衡(帕雷多平衡).

证明　注意到对约束多目标对策的加权 Nash_平衡和帕雷多平衡的定义, 由使用 Wang[16] 的引理 2.1 证明中类似证法易证引理 4.1 结论成立. 因此省去.

注 4.1　我们注意到如果 $\hat{x}\in X$ 是对策 G 关于权 $\boldsymbol{W}\in\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_+^{k_i}\setminus\{0\}$ ($\boldsymbol{W}\in\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathrm{int}\mathbf{R}_+^{k_i}$) 的加权 Nash_平衡, 则引理 4.1 的结论仍成立. 应指出 G 的一帕雷多平衡不必是 G 的一加权 Nash_平衡.

定理 4.1　设 $G=(X^i,A^i,F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 是约束多目标对策, 其中 (X^i,Γ^i) 是 G_凸空间, $A^i: X^{\hat{i}}\to$

2^{X^i} 是约束对应和$F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i}): X \to \mathbf{R}^{k_i}$ 是局中人 i 的损失函数• 对每一 $i \in \mathbf{N}$, 令 K^i 是 X^i 的非空紧子集和令$K = \prod_{i\in\mathbf{N}} K^i$• 假设存在权矢量 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \cdots, W^n)$, $W^i \in \mathbf{R}^{k_i}_{+} \setminus \{0\}$, 使得定理 3. 1 的条件(i) ~ (iv) 成立• 则 G 在X 内至少有一弱帕雷多平衡点• 此外如果 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \cdots, W^n) \in \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{int} T^{k_i}_{+}$, 则 G 在X 内至少有一帕雷多平衡点•

证明 由定理 3. 1, G 至少有一关于权矢量 $\boldsymbol{W}$的加权 Nash_平衡点$\hat{x} \in X$• 引理 4. 1 说明 $\hat{x}$ 也是G 的一弱帕雷多平衡点• 如果 $\boldsymbol{W} \in \mathrm{int} T^{k_i}_{+}$, $\hat{x}$ 也是G 的一帕雷多平衡点•

注 4. 2 定理 4. 1 推广了 Ding[20] 的定理 5. 1 从 H_空间到G_凸空间•

作为定理 4. 1 的一直接推论我们有下面结果•

系 4. 1 设 $G = (X^i, A^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$是约束多目标对策• 对每一局中人 $i \in \mathbf{N}$, 它的策略集X^i是拓扑矢量空间的非空凸子集, $A^i: X^{\hat{i}} \to 2^{X^i}$ 是它的约束对应和$F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i}): X \to \mathbf{R}^{k_i}$ 是它的支付函数• 假设存在矢量 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \cdots, W^n) \in \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{R}^{k_i}_{+} \setminus \{0\}$ 使得系 3. 1 的条件(i) ~ (iv) 成立, 则 G 至少有一弱帕雷多平衡点$\hat{x} \in X$, 而且若 $\boldsymbol{W} \in \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{int} T^{k_i}_{+}$, 则 G 至少有一帕雷多平衡点•

证明 由系 3. 1, G 至少有一个关于权矢量 $\boldsymbol{W}$的加权 Nash_平衡点$\hat{x} \in X$• 引理 4. 1 蕴含 $\hat{x}$ 也是G 的一弱帕雷多平衡点, 且如果 $\boldsymbol{W} \in \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{int} T^{k_i}_{+}$, 则 $\hat{x}$ 也是帕雷多平衡点•

注 4. 3 系 4. 1 推广了 Yuan 和 Tarafdar[18] 的定理 2, Yu 和 Yuan[19] 的定理 4 和 Wang[16] 的定理 3. 2 到很弱假设下的约束多目标对策•

系 4. 2 设 $G = (X^i, A^i, F^i)_{i\in\mathbf{N}}$ 是约束多目标对策• 对每一 $i \in \mathbf{N}$, 其策略集 X^i 是拓扑矢量空间的非空凸子集, $A^i: X^{\hat{i}} \to 2^{X^i}$ 是它的约束对应和$F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i}): X \to \mathbf{R}^{k_i}$ 是它的支付函数• 假设对每一 $i \in \mathbf{N}$ 和对每一 $j = 1, 2, \cdots, k_i$, 下列条件成立:

(i) A^i 有非空凸值和对每一$y^i \in X^i$, $(A^i)^{-1}(y^i)$ 在 $X^{\hat{i}}$ 中紧开且集 $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} \{x \in X: x^i \in A^i(x^{\hat{i}})\}$ 在 X 中紧闭, 其中 $X = \prod_{i\in\mathbf{N}} X^i$;

(ii) f^i_j 在X 的每一紧子集上是下半连续的和对每一$y^i \in X^i$, 函数$x^{\hat{i}} \mapsto f^i_j(y^i, x^{\hat{i}})$ 在$X^{\hat{i}}$ 的每一紧子集上是上半连续的;

(iii) 对每一固定的 $x^{\hat{i}} \in X^{\hat{i}}$, 函数 $y^i \mapsto f^i_j(y^i, x^{\hat{i}})$ 是凸的;

(iv) 存在 X^i 非空紧凸子集X^i_0和 X^i 的非空紧(不必凸) 子集 K^i 使得对每一$x \in X \setminus K$, 存在 $y \in \mathrm{co}(X_0 \cup \{x\})$ 使得$f^i_j(x^i, x^{\hat{i}}) > f^i_j(y^i, x^{\hat{i}})$ 对一切 $i \in \mathbf{N}$和$j = 1, 2, \cdots, k_i$ 成立, 其中$X_0 = \prod_{i\in\mathbf{N}} X^i_0$ 和 $K = \prod_{i\in\mathbf{N}} K^i$;

则约束多目标对策 G 至少有一帕雷多平衡点$\hat{x} \in X$•

证明 任取权矢量 $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, \cdots, W^n) \in \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{int} T^{k_i}_{+}$• 从条件(i) ~ (iv) 和注 3. 2 容易检查系 3. 1 的一切条件被满足• 因此 G 至少有一关于权矢量 $\boldsymbol{W}$的加权 Nash_平衡点$\hat{x} \in X$• 因 $\boldsymbol{W} \in \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{int} T^{k_i}_{+}$, 由引理 4. 1 $\hat{x}$ 必是约束多目标对策G 的一帕雷多平衡点• 证毕•

注 4. 4 系 4. 2 推广了 Yuan 和 Tarafdar[18] 的定理 3, Yu 和 Yuan[19] 的定理 6 和 Wang[16] 的定理 3. 2 到约束多目标对策且因此定理 4. 1 进一步统一和推广了上述结果到非紧约束多目标对策和到没有线性结构的 G_

凸空间•

[参　考　文　献]

[1] DING Xie_ping. Quasi_equilibrium problems with applications to infinite optimization and constrained games in general topological spaces[J]. Appl Math Lett, 2000, **12**(3): 21—26.

[2] Noor M A, Oettli W. On general nonlinear complementarity problems and quasiequilibria[J]. Le Mathematiche, 1994, **49**: 313—331.

[3] Cubiotti P. Existence of solutions for lower semicontinuous quasi_equilibrium problems[J]. Compu Math Appl, 1995, **30**(12): 11—22.

[4] DING Xie_ping. Existence of solutions for equilibrium problems[J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(6): 603—608.

[5] 丁协平. 非紧广义凸空间内的拟平衡问题[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 578—584.

[6] Lin L J, Park S. On some generalized quasi_equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(1): 167—191.

[7] Nash J F. Equilibrium point in n_person games[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1950, **36**(1): 48—49.

[8] Nash J F. Noncooperative games[J]. Ann Math, 1951, **54**: 286—295.

[9] Szidarovszky F, Gershon M E, Duckstein L. Techniques for Multiobjective Decision Marking in System Management[M]. Amsterdam Holland: Elsevier, 1986.

[10] Zeleny M. Game with multiple payoffs[J]. International J Game Theory, 1976, **4**(1): 179—191.

[11] Bergstresser K, Yu P L. Domination structures and multicriteria problem in N_person games[J]. Theory and Decision, 1977, **8**(1): 5—47.

[12] Borm P E M, Tijs S H, Van Den Aarssen J C M. Pareto equilibrium in multiobjective games[J]. Methods of Operations Research, 1990, **60**(2): 303—312.

[13] Yu P L. Second_order game problems: Decision dynamics in gaming phenomena[J]. J Optim Theory Appl, 1979, **27**(1): 147—166.

[14] Chose D, Prasad U R. Solution concepts in two_person multicriteria games[J]. J Optim Theory Appl, 1989, **63**(1): 167—189.

[15] Wang S Y. An existence theorem of a Pareto equilibrium[J]. Appl Math Lett, 1991, **4**(3): 61—63.

[16] Wang S Y. Existence of a Pareto equilibrium[J]. J Optim Theory Appl, 1993, **79**(2): 373—384.

[17] 丁协平. 没有紧性,连续性和凹性的多准则对策的帕雷多平衡[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(9): 801—808.

[18] Yuan X Z, Tarafdar E. Non_compact Pareto equilibria for multiobjective games[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(1): 156—163.

[19] Yu J, Yuan X Z. The study of Pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods[J]. Compu Math Appl, 1998, **35**(9): 17—24.

[20] DING Xie_ping. Existence of Pareto equilibria for constrained multiobjective games in H_spaces[J]. Compu Math Appl, 2000, **39**(9): 115—123.

[21] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173—187.

[22] Park S, Kim H. Foundation of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551—571.

[23] Tan K K. *G*_KKM theorem, minimax inequalities and saddle points[J]. Nonlinear Anal, 1997, **30**(7): 4151—4160.

[24] Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory[M]. Amsterdam: North_Holland,

1982.
[25] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.
[26] 丁协平. 拟变分不等式和社会平衡[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(7): 599—606.
[27] DING Xie_ping. Generalized quasi_variational inequalities, optimization and equilibrium problems [J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(1): 22—27.
[28] Tian G. Generalizations of the FKKM theorem and the Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, **170**(2): 457—471.
[29] Yuan X Z, Isac G, Tan K K, et al. The study of minimax inequalities, abstract economics and applications to variational inequalities and Nash equilibria[J]. Acta Appl Math, 1998, **54**(1): 135—166.
[30] DING Xie_ping. Generalized variational inequalities and equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. Compu Math Appl, 1999, **38**(7_8): 189—197.
[31] DING Xie_ping. Fixed points, minimax inequalities and equilibria of noncompact abstract economies [J]. Taiwanese J Math, 1998, **2**(1): 25—55.
[32] Zhou J X, Chen G. Diagonally convexity conditions for problems in convex analysis and quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1988, **132**(2): 213—225.

Qusi_Equilibrium Problems and Constrained Multiobjective Games in Generalized Convex Space

DING Xie_ping
(Department of Mathematics, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P R China)

Abstract: A class of quasi_equilibrium problems and a class of constrained multiobjective games were introduced and studied in generalized convex spaces without linear structure. First, two existence theorems of solutions for quasi_equilibrium problems are proved in noncompact generalized convex spaces. Then, as applications of the quasi_equilibrium existence theorem, several existence theorems of weighted Nash_equilibria and Pareto equilibria for the constrained multiobjective games are established in noncompact generalized convex spaces. These theorems improve, unify and generalize the corresponding results of the multiobjective games in recent literatures.

Key words: quasi_equilibrium problem; constrained multiobjective game; weighted Nash_equilibria; Pareto equilibria; generalized convex space