

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0151_06

动力学方程的积分型直接积分法^{*}

吕和祥, 于洪洁, 裘春航

(大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116023)

(本刊编委吕和祥来稿)

摘要: 提出了一个求解动力学问题的新方法(DIM_IM)• 将动力学方程化成积分方程的形式, 借助于该方程构造出了具有显式预测_校正的单步、自启动和四阶精度的积分型直接积分算法• 理论分析和算例指出, 这一方法较中心差分法、Houbolt 法、Newmark 法和 Wilson_θ 法都有较高的精度• 本方法适用于强非线性, 非保守系统•

关键词: 数值积分; 逐步积分; 非线性; 积分方程

中图分类号: O325; O322 **文献标识码:** A

引 言

系统的瞬态分析始终是工程中关心的问题, 例如象结构动力系统, 有时其外力及系统本身是随时间变化的, 甚至系统是非线性的, 这时方程的积分用解析法几乎是不可能了, 不得不借助于数值积分法• 通常用直接积分法, 如文献[1]所说, 中心差分法、Wilson_θ 法、Houbolt 法和 Newmark 法, 都是假定在每一时间区间 Δt 内的位移、速度和加速度的变化形式, 代入动力学方程, 因而获得只在离散时间点上的包括惯性力、阻尼力和外力的平衡方程, 从这个方程可推导出前一时刻和后一时刻的递推关系, 由初始条件可求出各相继的离散时刻的解• 所得的求解方程相当于时间域的差分方程, 所以可以把这些传统方法称为差分型直接积分法•

本文借助于 Duhamel 积分, 把动力学方程组中的每一个方程, 针对这个方程中的主变量直接积分, 次变量放入 Duhamel 积分的被积函数中, 因而得一个积分方程组, 为了近似求解这个积分方程, 在每一时间段内对于次变量也假定了位移和速度的形式, 代入积分方程也获得了各相继离散时刻的解• 为了与传统的方法区别, 本方法可以称为积分型直接积分法• 该方法不是象传统方法那样仅考虑了离散点上的平衡, 而是计及了时间区间上的每一点的平衡, 这是由积分方程本身所反应的• 为了有效地解这个积分方程, 本文构造了一个显示预测_校正四阶精度的有效算法• 通过算例说明, 本算法较中心差分法、Houbolt 法、Newmark 法和 Wilson_θ 法都有较高的精度• 本方法也适用于解强非线性, 非保守系统•

1 动力学方程的积分

结构的动力方程

* 收稿日期: 2000_01_07; 修订日期: 2000_08_12

基金项目: 国家自然科学基金重大项目资助(19990510)

作者简介: 吕和祥(1938—), 男, 辽宁省盖县人, 教授, 博士, 博士生导师•

$$M\dot{X} + G\dot{X} + KX = r(t), \quad X(0) = \alpha, \quad \dot{X}(0) = \beta \quad (n \text{ 个自由度}), \quad (1)$$

其中 X 是 n 维向量; M 是质量矩阵(正定、对称); G 是阻尼矩阵(对称、非负)和陀螺矩阵(反对称)之和; K 是刚度矩阵(对称、非负); $r(t)$ 是随时间变化的载荷向量; α 和 β 是已知的初始条件. 将方程(1)两边右乘 M^{-1} , 有

$$\dot{X} + G\dot{X} + KX = r(t), \quad (2)$$

其中 $G \equiv M^{-1}G$, $K \equiv M^{-1}K$, $r(t) \equiv M^{-1}r(t)$,

对于方程(2)的第 i 个方程, 有

$$\dot{x}_i + k_{ix}x_i + G_i\dot{x}_i + K_i x_i = r_i(t), \quad (3)$$

其中 k_{ii} 是矩阵 K 的对角线元素, G_i 和 K_i 分别是矩阵 G 和 K 的第 i 行的行向量, 但行向量 K_i 的第 i 个元素等于零. 将方程(3)改写为

$$\dot{x}_i + k_{ix}x_i = r_i(t) - G_i\dot{x}_i - K_i x_i \equiv f_i(t), \quad (4)$$

把方程(4)包含未知函数的右端项看作为一般的载荷项, 包含在右端项中的变量, 被称为次变量, k_{ii} 对应的变量 x_i 称为主变量. 把方程(4)积分, 有

$$x_i(t) = x_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i} \dot{x}_i(0) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_i(\zeta) \sin \omega_i(t - \zeta) d\zeta, \quad (5)$$

$$\dot{x}_i(t) = -\omega_i x_i(0) \sin \omega_i t + \dot{x}_i(0) \cos \omega_i t + \int_0^t f_i(\zeta) \cos \omega_i(t - \zeta) d\zeta, \quad (6)$$

其中 $\omega_i = \sqrt{k_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$, (7)

n 是系统的自由度. 于是主变量被积分地、解析地给出来了, 这是本文方法与通常的直接积分法的重要差别, 而一般的直接积分法, 如中心差分法等^[1], 其主变量是在离散点上以差分的形式给出来的. 令 $t = t_k + \tau$, 代入(5)和(6)式, 整理后有

$$\begin{Bmatrix} x_i(t_k + \tau) \\ \dot{x}_i(t_k + \tau) \end{Bmatrix} = T(\tau) \cdot \begin{Bmatrix} x_i(t_k) \\ \dot{x}_i(t_k) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_i} \int_{t_k}^{t_k + \tau} f_i(\zeta) \sin \omega_i(t_k + \tau - \zeta) d\zeta \\ \int_{t_k}^{t_k + \tau} f_i(\zeta) \cos \omega_i(t_k + \tau - \zeta) d\zeta \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$T(\tau) = \begin{bmatrix} \cos \omega_i \tau & \sin \omega_i \tau / \omega_i \\ -\omega_i \sin \omega_i \tau & \cos \omega_i \tau \end{bmatrix}. \quad (9)$$

矩阵 $T(\tau)$ 被解析地给出了, 是时间增量 τ 的函数, 其取值大小不影响矩阵 $T(\tau)$ 的计算精度. 在文献[2~4]中矩阵 $T(\tau)$ 由精细积分给出了具有计算机字长范围内的精确数值结果.

由(9)式, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 矩阵 $T(\tau) \rightarrow I$.

矩阵 $T(\tau)$ 的特征值 $\lambda_{1,2} = \cos \omega_i \tau \pm i \sin \omega_i \tau$, 其模 $\|\lambda_{1,2}\| = \sqrt{\cos^2 \omega_i \tau + \sin^2 \omega_i \tau} = 1$.

2 动力学方程的逐步积分求解

如果在某时刻 t_k , 位移和速度 $X(t_k)$ 、 $\dot{X}(t_k)$ 已知, 可以利用方程(8)求得任意时刻 $t_{k+1} = t_k + \tau$ 时的解, 只要右端的积分能够精确地作出. 理论上方程(8)对 τ 的大小是没有限制的, 然而方程(8)的右端的被积函数含有未知函数 X 和 \dot{X} , 即方程(8)是个积分方程, 为了能进行积分, 必须根据已知的 $X(t_k)$ 、 $\dot{X}(t_k)$ 和 $\dot{X}(t_k)$ (因为 $X(t_k)$ 和 $\dot{X}(t_k)$ 已知, 由方程(1)可求得 $\dot{X}(t_k)$), 在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上给出具有一定精度的位移和速度的近似表达式, 代入(8)式将获得

$t_{k+1} = t_k + \tau$ 时的具有一定精度的解。因此 τ 的值, 如同其他数值方法一样, 不能太大, 于是所求解的精度完全取决于其右端项积分的精度, 尽管右端项中的第一项是精确的解析表达式。将(8)式中的函数 $f_i(t, X)$ 在时间区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上用 t 的三次函数近似, 有

$$f_i(t, X(t)) = r_0^i + r_1^i(t - t_k) + r_2^i(t - t_k)^2 + r_3^i(t - t_k)^3, \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_0^i &= f_i(t_k, X(t_k)), \\ r_1^i &= [f_i(t_{k+1}, X_{k+1}) - f_i(t_k, X_k)] / \tau, \\ r_2^i &= [3f_i(t_{k+1}, X_{k+1}) - 3f_i(t_k, X_k) - 2f_i'(t_k, X_k) \cdot \tau - f_i'(t_{k+1}, X_{k+1}) \cdot \tau] / \tau^2, \\ r_3^i &= [2f_i'(t_k, X_k) + f_i''(t_k, X_k) \cdot \tau - 2f_i'(t_{k+1}, X_{k+1}) + f_i''(t_{k+1}, X_{k+1}) \cdot \tau] / \tau^3, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在上式中 X_{k+1} 是未知的, 待求的, 在计算中将其预测值

$$X_{k+1} = X_k + \dot{X}_k \cdot \tau + \frac{1}{2} \ddot{X}_k \cdot \tau^2, \quad (12)$$

在 $t = t_k$ 时刻, X_k 和一阶导数 \dot{X}_k 为已知, \ddot{X}_k 可根据方程(1)由 X_k 和 \dot{X}_k 求出。对于线性问题, 由(4)式可知, $f_i(t, X, \dot{X})$ 是 X 和 \dot{X} 的线性函数, 所以 $f_i'(t, X, \dot{X})$ 亦是 X 和 \dot{X} 的线性函数, (11)式中的 $r_k^i, k = 0, 1, 2, 3$ 很容易计算。

如果动力系统是集中质量, 则当用(8)式求解 $x_i(t_k + \tau)$ 和 $\dot{x}_i(t_k + \tau)$ 时不需要形成总体刚度阵和阻尼阵, 否则由(1)式得到(2)式时则需要有总体质量阵、刚度阵和阻尼阵, 虽然(8)式仍然不需要总体刚度阵。

对于非线性问题, 函数 $f_i(t, X, \dot{X})$ 是 X 和 \dot{X} 的非线性函数, 在实际应用中其函数形式往往很复杂, 则导数 $f_i'(t, X, \dot{X})$ 计算起来很冗繁, 这给应用带来很多不便, 因此下面拟采用计算函数值代替计算导数值的办法。在区间 $[t_k, t_k + \tau]$ 上计算 $m + 1$ 个点的函数值 $f_i(t_k + i \cdot \Delta t, X(t_k + i \cdot \Delta t))$, $i = 0, 1, 2, \dots, m, \Delta t = \tau / m$, (τ 可以等于 1 也可以不等于 1), 以这些试样点的值, 应用 Lagrange 插值逼近函数 $f_i(t, X)$ 。对于(10)式的三次函数近似 ($m = 3$), 有

$$\left. \begin{aligned} r_0^i &= f_i(t_k, X(t_k)), \\ r_1^i &= [-11f_i(t_k, X_k) + 18f_i(t_{k+1/3}, X_{k+1/3}) - 9f_i(t_{k+2/3}, X_{k+2/3}) + 2f_i(t_{k+1}, X_{k+1})] / (2\tau), \\ r_2^i &= \frac{9}{2\tau^2} [2f_i(t_k, X_k) - 5f_i(t_{k+1/3}, X_{k+1/3}) + 4f_i(t_{k+2/3}, X_{k+2/3}) - f_i(t_{k+1}, X_{k+1})], \\ r_3^i &= \frac{9}{2\tau^3} [-f_i(t_k, X_k) + 3f_i(t_{k+1/3}, X_{k+1/3}) - 3f_i(t_{k+2/3}, X_{k+2/3}) + f_i(t_{k+1}, X_{k+1})], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 $t_{k+i/3} \equiv t_k + i \cdot \tau / 3, X_{k+i/3} \equiv X(t_k + i \cdot \tau / 3), \quad (14)$

在(13)式中未知的 $X_{k+i/3}$ 等均可以借助于(12)式计算其预测值。

将(11)式和(13)式在时刻 t_k 用 Taylor 级数展开, 有

$$\begin{aligned} r_1^i &= f_i'(t_k, X(t_k)) + o(\tau^3), \quad r_2^i = f_i''(t_k, X(t_k)) / 2 + o(\tau^2), \\ r_3^i &= f_i'''(t_k, X(t_k)) / 6 + o(\tau). \end{aligned}$$

于是(10)式成为

$$f_i(t, \mathbf{X}(t)) = f_i(t_k, \mathbf{X}(t_k)) + f_i'(t_k, \mathbf{X}(t_k)) \cdot (t - t_k) + f_i''(t_k, \mathbf{X}(t_k)) \cdot (t - t_k)^2/2 + f_i^{(3)}(t_k, \mathbf{X}(t_k)) \cdot (t - t_k)^3/6 + o(\tau^4) \tag{15}$$

因此(10)式的近似具有截断误差 $o(\tau^4)$ 。

将(10)式代入(8)式, 令 $t = t_{k+1} = t_k + \tau$, 并由于(15)式, 积分后有

$$\begin{Bmatrix} x_i(t_k + \tau) \\ x_{\dot{i}}(t_k + \tau) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}(\tau) \cdot \begin{Bmatrix} x_i(t_k) \\ x_{\dot{i}}(t_k) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i & a_3^i \\ b_0^i & b_1^i & b_2^i & b_3^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_0^i \\ r_1^i \\ r_2^i \\ r_3^i \end{Bmatrix} + o(\tau^5), \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} a_0^i &= (1 - \cos \omega_i \tau) / \omega_i^2, & a_2^i &= \tau^2 / \omega_i^2 - 2(1 - \cos \omega_i \tau) / \omega_i^4, \\ a_1^i &= \tau / \omega_i^2 - \sin \omega_i \tau / \omega_i^3, & a_3^i &= \tau^3 / \omega_i^2 - 6\tau / \omega_i^4 + 6\sin \omega_i \tau / \omega_i^5, \\ b_0^i &= \sin \omega_i \tau / \omega_i, & b_2^i &= 2(\tau / \omega_i^2 - \sin \omega_i \tau / \omega_i^3), \\ b_1^i &= (1 - \cos \omega_i \tau) / \omega_i, & b_3^i &= 3\tau^2 / \omega_i^2 - 6(1 - \cos \omega_i \tau) / \omega_i^4. \end{aligned}$$

因此本文方法所给出的解具有四阶精度, 其截断误差是 $o(\tau^5)$, 而文献[1]所介绍的中心差分等具有二阶精度, 其截断误差是 $o(\tau^3)$ 。

表 1 几种方法所计算的 x_1 值的比较

t_k	1 Δt	2 Δt	3 Δt	4 Δt	5 Δt	6 Δt	7 Δt	8 Δt	9 Δt	10 Δt	11 Δt	12 Δt
C	0	0.030 7	0.168	0.487	1.02	1.70	2.40	2.91	3.07	2.77	2.04	1.02
H	0	0.030 7	0.167	0.461	0.923	1.50	2.11	2.60	2.86	2.80	2.40	1.72
W	0.006 05	0.052 5	0.196	0.490	0.952	1.54	2.16	2.67	2.92	2.82	2.33	1.54
N	0.006 73	0.050 4	0.189	0.485	0.961	1.58	2.23	2.76	3.00	2.85	2.28	1.40
I	0.002 53	0.038 2	0.175 8	0.486 3	0.996 6	1.657	2.338	2.860 5	3.051 2	2.805 3	2.130 3	1.157 2
A	0.002 51	0.038 1	0.175 6	0.486 0	0.996 4	1.657	2.338	2.860 8	3.051 7	2.805 7	2.130 6	1.157 2

C: 中心差分法; H: Houbolt 方法; W: Wilson_θ 法; N: Newmark 法; I: 本文解; A: 解析解

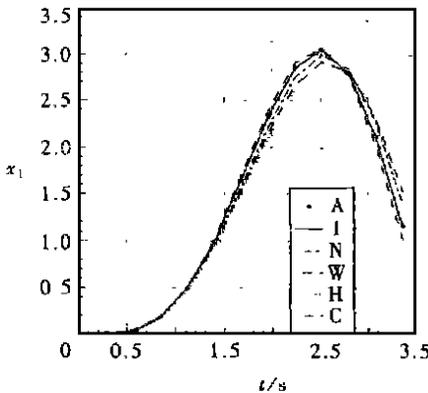


图 1 各种方法结果的比较

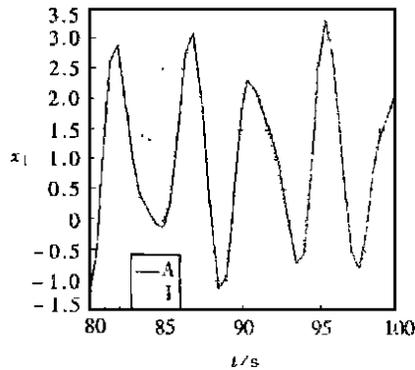


图 2 本文解与解析解比较 (步长 $\Delta t = 0.5$)

3 算 例

3.1 求解下面方程^[1]

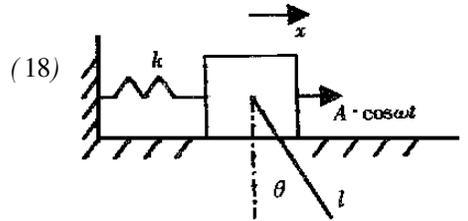
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

初始条件 $x_1(0) = x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ 。文献[1]用了中心差分法、Houbolt 法、Wilson_θ法和 Newmark 法,对于时间步长 $\Delta t = 0.28$ s 计算了该方程,本文解与以上各种方法的解及解析解的比较见表 1 和图 1。图 1 中本文解与解析解已看不出差别,只有从表 1 的数字才能看出它们之间的差别。对于时间步长 $\Delta t = 0.5$ s 计算了 100 s,为了清楚,在图 2 中只给了最后 20 s 的本文解和解析解的结果。由图可见,对于大的时间步长本文解也很接近解析解,同时也看出本文方法具有很好的稳定性。

3.2 滑块的非线性运动

一质量 m 、长度 l 的均匀杆,铰接一滑块上,如下图,滑块与刚性壁有刚度为 k 的弹簧连接。滑块运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} + \omega_1^2 u + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta &= A \cos \omega t, \\ \ddot{\theta} + \omega_2^2 \sin \theta + \frac{3}{2} \ddot{u} \cos \theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

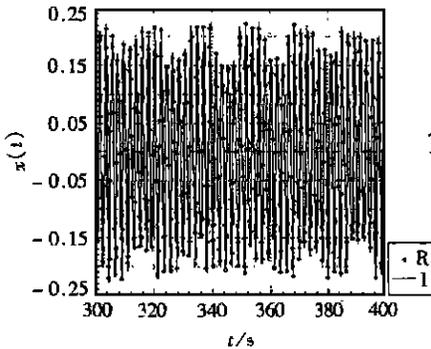


其中 $u = x/l, \omega_1^2 = k/m, \omega_2^2 = 3g/2l$ 。

将方程(18)改写成

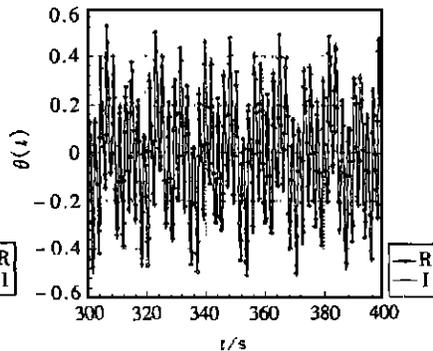
$$\ddot{u} + \omega_1^2 u = \omega_1^2 u + q_1 \equiv f_1(u, \theta, \dot{u}, \dot{\theta}), \quad (19)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta = \omega_2^2 \theta + q_2 \equiv f_2(u, \theta, \dot{u}, \dot{\theta}), \quad (20)$$



I: 本文解, R: Runge_Kutta 解

图 3 滑块的振动 $x(t)$



I: 本文解, R: Runge_Kutta 解

图 4 杆的摆动角 $\theta(t)$

其中

$$f_1(u, \theta) \equiv \omega_1^2 u + \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{1}{4} \omega_2^2 \sin 2\theta - \omega_1^2 u + A \cdot \cos \omega t \right] \left/ \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta \right) \right. = \omega_1^2 u + \ddot{u}, \quad (21)$$

$$f_2(u, \theta) \equiv \omega_2^2 \theta - \omega_2^2 \sin \theta - \frac{3}{2} \ddot{u} \cos \theta = \omega_2^2 \theta + \ddot{\theta}. \quad (22)$$

可以用(16)式求解(19)和(20)式。这时其右端项 $f_1(u, \theta, \dot{u}, \dot{\theta})$ 和 $f_2(u, \theta, \dot{u}, \dot{\theta})$ 不再是 u 和 θ

的线性函数而是非线性函数, 求它们对时间的导数较冗繁, 为了避免求导数, 这时求(10)式中的系数 r_k^i ($k = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2$) 时, 可以用(13)式, 对于本算例, (14)式中 $\eta_1 = 1$ 。取 $\omega_1 = \omega_2 = 3$, $\omega_2 = 1$, 用本文方法和 Runge_Kutta 法分别作了计算, 计算结果如图 3 和图 4。计算时间步长 $\tau = 0.01$ s, 计算初始值 $u = 1.3/9$, $\theta = 0.0$, $\dot{u} = 0.0$, $\dot{\theta} = 0.0$, 外载荷 $A \cdot \cos \omega t$, 其中 $A = 1.3$ 。本算例计算了 400 s, 为了显示其稳定性图中只给出了最后 100 s 的结果。

4 结 论

本文提出了求解动力学问题的一个新方法, 该方法具有显式、四阶精度和自起动的优点。如果动力系统是集中质量, 本方法将不需要形成总体质量阵和总体刚度阵。算法简单, 易于程序编制。算例表明, 本文方法的精度均高于中心差分法、Houbolt 法、Newmark 法和 Wilson_θ 法。本方法适用于强非线性、非保守系统。

[参 考 文 献]

- [1] Bathe Klaus_Jurgen, Wilson Edward L. Numerical Methods in Finite Analysis [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice_Hall, Inc, 1976.
- [2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- [3] 钟万勰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.
- [4] ZHONG Wan_xie, ZHU Jian_ping, ZHONG Xiang_xiang. A precise time integration algorithm for non-linear systems[A]. In: The Third World Congress on Computational Mechanics, Chiba, Japan, 1994, Proce of WCCM_3[C]. 1. 5_4_6, Minamidia, Nakano_ku, Tokyo 164, Japan: Tezuka Microfilm Co, Ltd, 1994, 12—17.
- [5] 蔡志勤. 精细逐步积分及其部分演化[D]. 博士论文. 大连: 大连理工大学工程力学系, 1998.
- [6] 孔向东. 常微分方程的精细积分法及其在多体系统动力学中的应用[D]. 博士论文. 大连: 大连理工大学工程力学系, 1998.
- [7] Nayfeh AH, Moot D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley_Interscience, 1979.
- [8] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

Direct Integration Methods With Integral Model for Dynamic Systems

LÜ He_xiang, YU Hong_jie, QIU Chun_hang

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: A new approach which is a direct integration method with integral model (DIM_IM) to solve dynamic governing equations is presented. The governing equations are integrated into the integral equations. An algorithm with explicit and predict_correct and self_starting and four order accuracy to integrate the integral equations is given. Theoretical analysis and numerical examples show that DIM_IM discribed in this paper suitable for strong non_linear and non_conservative system have higher accuracy than central difference, Houbolt, Newmark and Wilson_Theta methods.

Key words: numerical integration; step_by_step integration; non_linear; integral equation