

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0032-15

压电基体中部分脱开的刚性 导体椭圆夹杂分析*

王 旭, 沈亚鹏

(西安交通大学 工程力学系, 西安 710049)

(本刊编委沈亚鹏来稿)

摘要: 通过利用八维 Stroh 公式以及共形映射、解析延拓和奇点分析技术, 获得了对一压电基体中已部分脱开的刚性导体椭圆夹杂二维问题的闭形式全场解答。也推导了一些新的恒等式和求和式, 通过这些恒等式及求和式可获得沿界面应力和电位移分布以及刚性夹杂转动的实形式表示。正如所预料的, 在脱开界面的端部应力及电位移显现出与在压电材料 Griffith 界面裂纹的研究中所发现的相似的奇异行为。最后也给出了几个算例以展示所得解答的一般性以及各种载荷条件、几何参数和机电常数等对界面处应力及电位移分布的影响。

关键词: 全纯函数; Stroh 公式; 共形映射; 刚性导体椭圆夹杂
中图分类号: O343.1 文献标识码: A

引 言

压电陶瓷体由于其固有的机电耦合特性已被广泛应用于传感器和作动器等各种电子和机电器件的设计。由于压电固体中位错、裂纹、孔洞及夹杂的存在将显著影响一系统的机电耦合响应并对这些器件的性能产生不利影响, 近年来对这些宏细观缺陷的力学分析已引起了许多研究者的广泛关注。Deeg^[1], McMeeking^[2], Pak^[3,4], Kuo 和 Barnett^[5], Wang^[6], Suo 等^[7], Chen^[8], Chung 和 Ting^[9], Sosa 和 Khutoryansky^[10], Meguid 和 Zhong^[11], Meguid 和 Deng^[12], Deng 和 Meguid^[13,14]的工作是对这类问题近期研究的几个代表。最近人们已投入大量精力发展压电介质中的各种夹杂模型以充分利用压电陶瓷体的优越性^[4,8-14]。由于数学上所遇到的困难, 以上所列举的大多数研究都是针对第一及第二类边值问题(Neumann 型和 Dirichlet 型边界条件), 如一绝缘孔洞或一导体刚性夹杂; 即使是第三类混合边值问题, 也只是针对两半无限大不同压电介质间的绝缘界面裂纹问题^[7]或导体刚性片状夹杂^[13]。另外, 在压电介质中关于缺陷体间相互作用的解析或数值结果仍然十分稀少。

本文的目的在于将以前的研究工作进行推广, 详细研究一无限大压电基体中已部分脱开的刚性导体椭圆夹杂这一具有曲线边界的二维混合边值问题。对于该简化模型的研究将有可

* 收稿日期: 2000_03_21; 修订日期: 2000_10_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59635140)

作者简介: 王旭(1969—), 男, 博士研究生, 研究方向: 断裂力学与细观力学;

沈亚鹏(1936—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 智能结构与系统。

能使我们更好地理解压电固体中沿夹杂及基体界面处的损伤扩展机理。本文的分析是基于八维 Stroh 公式以及共形映射、解析延拓和奇点分析技术并且在分析时将各种可能的机电载荷条件都一并考虑进去。这里所考虑的载荷条件有四种: a) 带电刚性夹杂受到一集中力以及力矩的作用; b) 在界面的脱开部分(裂纹)存在一位错及电势间断(或电势位错); c) 压电基体受到一奇点作用, 该奇点由位错、电势间断(或电势位错)、集中力和点电荷所组成; d) 压电基体也受到远场均布机电载荷的作用。在分析中椭圆刚性夹杂可发生绕 x_3 轴的旋转, 其旋转角 ω 可由作用在刚性夹杂上的力矩平衡条件获得。本文获得了在以上四种机电载荷作用下表征机械场和电场复势的解析表达式, 并由所求得的复势进而得到了在界面处应力及电位移的表达式。

1 Stroh 公式

对于一均匀的各向异性压电材料, 在固定的直角坐标系中其本构方程和相应的控制场方程由下述两式给出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\bar{j}} &= C_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \phi_{,k}, \\ D_i &= e_{ikl} u_{k,j} - \epsilon_{ik} \phi_{,k}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_{\bar{j},j} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (2)$$

在方程(1)和(2)中重复指标意味着求和; $u_k, \phi, \sigma_{\bar{j}}, D_i$ 分别表示机械位移、电势、应力及电位移分量; $C_{ijkl}, e_{ijk}, \epsilon_j$ 分别为弹性常数、压电常数和介电常数, 逗号表示对 x_i 求导。如果广义位移矢量 $U = [u_1 u_2 u_3 \phi]^T$ 仅依赖于坐标 x_1 和 x_2 , 则应力张量和电位移矢量也仅依赖于坐标 x_1 和 x_2 。考虑到(2)式, 则可引入一广义应力函数矢量 $\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4]^T$, 使其满足以下关系式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i1} &= -\Phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \Phi_{i,1} \quad (i = 1, 2, 3), \\ D_1 &= -\Phi_{4,2}, \quad D_2 = \Phi_{4,1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 得

$$\left. \begin{aligned} QU_{,1} + RU_{,2} &= -\Phi_{,2}, \\ R^T U_{,1} + TU_{,2} &= \Phi_{,1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在上式中 Q, R 和 T 被分别定义为

$$Q = \begin{bmatrix} Q^e & e_{11} \\ e_{11}^T & -\epsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R^e & e_{21} \\ e_{12}^T & -\epsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T^e & e_{22} \\ e_{22}^T & -\epsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

并且

$$\left. \begin{aligned} (Q^e)_{ik} &= C_{i1k1}, \quad (R^e)_{ik} = C_{i1k2}, \quad (T^e)_{ik} = C_{i2k2} \quad (i, k = 1, 2, 3), \\ e_{\bar{j}} &= [e_{i\bar{j}} \quad e_{2\bar{j}} \quad e_{3\bar{j}}]^T \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \right\}$$

(4)式可被改写为以下标准的状态空间形式

$$W_{,2} = NW_{,1}, \quad (6)$$

此处

$$W = \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4^T \end{bmatrix}, \quad (8)$$

并且

$$N_1 = -T^{-1}R^T, \quad (9)$$

$$N_2 = T^{-1} = N_2^T, \quad (10)$$

$$N_3 = RT^{-1}R^T - Q = N_3^T. \quad (11)$$

由于假定存在广义位移矢量 U , 则一阶偏微分方程(6) 的解是协调的; 同时由于假定存在广义应力函数矢量 Φ , 则一阶偏微分方程(6) 的解又是平衡的。满足式(6) 的一个通解可被取为^[7,9]

$$\left. \begin{aligned} U &= Af(z) + \overline{Af(z)}, \\ \Phi &= Bf(z) + \overline{Bf(z)}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这里 $f(z) = [f_1(z_1) \ f_2(z_2) \ f_3(z_3) \ f_4(z_4)]^T$ 是由四个全纯函数 $f_a(z_a)$ ($a = 1, 2, 3, 4$) 所组成的一个四维全纯函数向量, 而这四个全纯函数将通过满足问题的边界条件和奇性条件被加以确定。每个分量函数 $f_a(z_a)$ 的自变量 z_a 可被表达为 $z_a = x_1 + p_a x_2$, 其中 p_a 为材料的特征值并且 p_a 的虚部大于零;

$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ 和 $B = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]$ 为 4×4 复矩阵。四维复数向量 a 和 b 以及复数标量 p 分别被称为 Stroh 特征向量和 Stroh 特征值并满足以下本征关系

$$N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (13)$$

在由下式所表示的共形映射下

$$z_a = m_a(\zeta_a) \quad (a \text{ 不求和}). \quad (14)$$

式(12)变为

$$\left. \begin{aligned} U &= Af(\zeta) + \overline{Af(\zeta)}, \\ \Phi &= Bf(\zeta) + \overline{Bf(\zeta)}, \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

这里

$$f(\zeta) = [f_1(\zeta_1) \ f_2(\zeta_2) \ f_3(\zeta_3) \ f_4(\zeta_4)]^T. \quad (15b)$$

2 问题叙述及分析

现在考虑在一无限大的压电基体中嵌入一个已经部分脱开的刚导体椭圆夹杂, 如图 1 所示。在界面 $C = L \cup CL$ 上, 假设这两相介质 i) 在 L 部分理想联接, 在跨越该部分界面时广义位移向量连续; ii) 在 CL 部分脱开, 在这部分界面上表面力及电位移法向分量为零的自由边界条件得到满足。该椭圆夹杂的长短半轴分别为 a 和 b , 并且长短轴分别沿着 x_1 和 x_2 轴。该导体夹杂总带电量为 q 且在点 $[x_0, y_0]$ 处受到一集中力 f_1 的作用并将二者统一表示为 $f_0 = \begin{bmatrix} f_1 \\ -q \end{bmatrix}$, 并且该夹杂同时受到一大小为 M_0 的力矩作用; 在界面的脱开部分存在一位错及电势位错, 其广义 Burgers 矢量为 b_0 ; 压电基体在点 $[\hat{x}, \hat{y}]$ 受到一奇点作用, 该奇点由位错、电势间断、集中力和点电荷组成, 另外压电基体也受到远场均匀机电载荷的作用。

可以很容易证明以下共形映射函数 $m_a(\zeta_a)$

$$z_a = m_a(\zeta_a) = \frac{1}{2} \left\{ (a - ibp_a) \zeta_a + (a + ibp_a) \frac{1}{\zeta_a} \right\}, \quad (16)$$

可将 z_a 平面上椭圆以外的区域一一映射到 ζ_a 平面上单位圆以外的区域。

在界面的脱开部分 CL 上表面力及电位移法向分量为零的自由边界条件可被表示为

$$Bf^-(t) + Bf^+(1/t) = \mathbf{0} \quad (t \in CL), \quad (17)$$

在上式中上标‘+’意味着从 ζ_- 平面上单位圆以内趋近于边界点 t ; 类似地, 上标‘-’意味着从 ζ_- 平面上单位圆以外趋近于边界点 t 。

当对方程(17) 沿着界面 $|t| = 1$ 的切向求导后, 并引入如下一辅助函数 $\Omega(\zeta)$

$$\Omega(\zeta) = \begin{cases} B \frac{1}{\zeta} f'(1/\zeta) - Bs_1(\zeta) - Bs_2(\zeta) & (|\zeta| < 1), \\ B \zeta f'(\zeta) - Bs_1(\zeta) - Bs_2(\zeta) & (|\zeta| > 1), \end{cases} \quad (18a)$$

在上式中:

$$s_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} [4] \frac{\zeta_a}{\zeta - \zeta_a} [6] (B^T \mathbf{b} + A^T \mathbf{f}) + \frac{\zeta}{2} [4] a - i b p_a [6] \mathbf{q} + \gamma, \quad (18b)$$

$$s_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} [4] \frac{1/\zeta_a}{\zeta - 1/\zeta_a} [6] (B^T \mathbf{b} + A^T \mathbf{f}) + \frac{1}{2\zeta} [4] a + i b p_a [6] \mathbf{q}, \quad (18c)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} [B^T (\mathbf{b} + \mathbf{b}_0) + A^T (\mathbf{f} + \mathbf{f}_0)], \quad (18d)$$

$$\mathbf{q} = B^T \boldsymbol{\varepsilon}_1^\infty + A^T \mathbf{t}_2^\infty, \quad (18e)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^\infty = [\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^\infty \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^\infty \quad 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13}^\infty \quad -E_1^\infty]^T, \quad \mathbf{t}_2^\infty = [\sigma_{12}^\infty \quad \sigma_{22}^\infty \quad \sigma_{32}^\infty \quad D_2^\infty]^T. \quad (18f)$$

(在以上各方程及以下的表达中, 中括号 [4] [6] 表示 4×4 对角矩阵, 该对角阵中的每一个对角线元素根据希腊指标 α 而改变), 我们可以得到

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \mathbf{0} \quad (t \in CL). \quad (19)$$

从以上关于辅助函数 $\Omega(\zeta)$ 的定义, 我们可以发现 $\Omega(\zeta)$ 在单位圆内以及包含无穷远点在内的单位圆外都是全纯(解析)的, 它只是在界面的理想联接部分 L 上有间断, 则该辅助函数 $\Omega(\zeta)$ 在全平面上分片全纯。 $\Omega(\zeta)$ 在点 $\zeta = 0$ 的值必须被指出以便于以后的分析。 注意到(18) 式及正交性条件, 我们可以得到:

$$\Omega(0) = -\frac{1}{2\pi i} \mathbf{f}_0, \quad (20)$$

在界面的理想联接部分 L 上机械位移和电势的边界条件可被表示为

$$A\mathbf{f}^-(t) + A\mathbf{f}^+(1/t) = \begin{bmatrix} -\omega x_2 \\ \omega x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} bi(t - t^{-1}) \\ a(t + t^{-1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in L). \quad (21)$$

在上式中 ω 表示刚性椭圆夹杂绕 x_3 轴的旋转角。

对(21) 式沿着界面 $|t| = 1$ 的切向求导并代入(18a), 我们可最终可得:

$$M^{-1} \Omega^+(t) + M^{-1} \Omega^-(t) = \mathbf{h}(t) \quad (t \in L), \quad (22a)$$

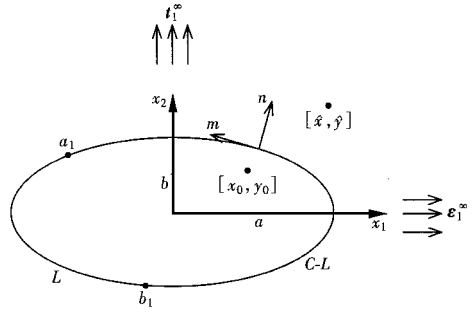


图 1 部分脱开的椭圆夹杂构形

在上式中

$$\mathbf{h}(t) = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} -b(t + t^{-1}) \\ ai(t - t^{-1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{B} \mathbf{s}_1(t) - (\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{B} \mathbf{s}_2(t) \quad (22b)$$

并且 $\mathbf{M} = -i\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ 为阻抗矩阵 (impedance matrix)^[7, 9]。

(22a) 与 (19) 式构成向量形式的具有间断系数的相互间耦合的 Riemann-Hilbert 问题, 则必需将其解耦。引入如下的坐标变换

$$\Omega(\zeta) = \Psi \Omega(\zeta), \quad (23)$$

在上式中 Ψ 满足以下的本征关系

$$\mathbf{M}^{-1} \Psi = -\mathbf{M}^{-1} \Psi \Lambda, \quad (24a)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 \exp[2\pi i \delta_a] & \\ & 6 \end{bmatrix} \quad (24b)$$

并且应用以下的正交正则化关系(此关系可由 \mathbf{M} 以及 \mathbf{M} 为厄尔米特矩阵导出)

$$\mathbf{J} \Psi^H \mathbf{M}^{-1} \Psi = \mathbf{I}, \quad (25a)$$

$$\mathbf{J} \Psi^H \mathbf{M}^{-1} \Psi = -\Lambda, \quad (25b)$$

在上式中上标 'H' 表示对相应的矩阵进行共轭转置, 并且矩阵 \mathbf{J} 定义为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25c)$$

(δ_a 的显式解答以及关于 (25a, b) 的证明可见附录 B)

方程 (22a) 可在新坐标下被解耦为

$$\Omega^+(t) - \Lambda \Omega^-(t) = \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{h}(t). \quad (26)$$

以上解耦的 Riemann-Hilbert 问题的积分形式解答为 (Muskhelishvili^[15])

$$\Omega(\zeta) = \frac{\mathbf{X}(\zeta)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t - \zeta} [\mathbf{X}^+(t)]^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{h}(t) dt + \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{c}, \quad (27a)$$

在上式中常向量 \mathbf{c} 待定, 并且 $\mathbf{X}(\zeta)$ 是如下定义的沿 L 割开的基本 Plemelj 函数

$$\mathbf{X}(\zeta) = \begin{bmatrix} 4(\zeta - a_1)^{-(1+\delta_a)}(\zeta - b_1) \delta_a & \\ & 6 \end{bmatrix} \quad (27b)$$

应用 (23) 式, 我们得到在原物理坐标下

$$\Omega(\zeta) = \frac{\Psi \mathbf{X}(\zeta)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t - \zeta} [\mathbf{X}^+(t)]^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{h}(t) dt + \Psi \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{c} \quad (28)$$

在 (28) 式中出现的 Cauchy 型积分可被精确完成, 并且最终结果为

$$\Omega(\zeta) = \Psi (\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{h}(\zeta) - \Psi (\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{h}_1(\zeta) + \Psi \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{c}, \quad (29a)$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(\zeta) = & [[\mathbf{X}(0)]^{-1} \zeta^{-1} + \mathbf{I}] \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 + \begin{bmatrix} 4 \zeta + [(b_1 - a_1) \delta_a - a_1] & \\ & 6 \end{bmatrix} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_0 + \\ & \begin{bmatrix} 4 \zeta^2 + [(b_1 - a_1) \delta_a - a_1] \zeta + \delta_a(1 + \delta_a) & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_1 - b_1)^2 & \\ & 6 \end{bmatrix} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 + \\ & \sum_{j=1}^4 \left[\frac{1}{\zeta - \xi_j} [\mathbf{X}(\xi_j)]^{-1} + \mathbf{I} \right] \xi_j \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j - \sum_{j=1}^4 \left[\frac{1}{\zeta - 1/\bar{\xi}_j} [\mathbf{X}(1/\bar{\xi}_j)]^{-1} + \mathbf{I} \right] 1/\bar{\xi}_j \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (29b)$$

$$d_0 = - (M^{-1} + M^{-1}) B \mathbf{y}, \quad (29c)$$

$$d_1 = \frac{\omega}{2} [-b \quad ai \quad 0 \quad 0]^T - \frac{1}{2} (M^{-1} + M^{-1}) B [\mathbb{4}a - ibp_a \mathbb{6}q], \quad (29d)$$

$$k_j = - \frac{1}{2\pi i} (M^{-1} + M^{-1}) B I_j (B^T \mathbf{b} + A^T \mathbf{f}) \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (29e)$$

$$I_1 = \text{diag}(1 \ 0 \ 0 \ 0), \quad I_2 = \text{diag}(0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad (29f)$$

$$I_3 = \text{diag}(0 \ 0 \ 1 \ 0), \quad I_4 = \text{diag}(0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

到现在为止, 除过两个未知常量 ω 和 c 外, 分片全纯函数 $\Omega(\zeta)$ 已被找到. 而这两个未知量可通过刚性夹杂上的力矩平衡条件以及(20) 式获得.

将(29) 式代入(20) 式并且应用在(25a) 和(25b) 中的正交正则化关系, 我们得到

$$c = (I - \Lambda)^{-1} \left\{ [\mathbb{4}(b_1 - a_1) \delta_a - a_1 \mathbb{6}J \Psi^H d_0 - [X(0)]^{-1} J \Psi^H d_0 + \frac{(a_1 - b_1)^2}{2} \mathbb{4} \delta_a (1 + \delta_a) \mathbb{6}J \Psi^H d_1 + [I - [X(0)]^{-1} \mathbb{4}(b_1^{-1} - a_1^{-1}) \delta_a - a_1^{-1} \mathbb{6}J \Psi^H d_1 + \sum_{j=1}^4 [\xi_j I - [X(\xi_j)]^{-1}] J \Psi^H k_j - \sum_{j=1}^4 [1/\bar{\xi}_j I - [X(1/\bar{\xi}_j)]^{-1}] J \Psi^H k_j \right\}. \quad (30)$$

很明显, 以上方程是用 ω 所表示的 c . 以下的分析将表明以上所得到的全纯函数向量 $\Omega(\zeta)$ 已自动满足夹杂上的力与电荷平衡条件以及环绕裂纹面的位错及电位错条件.

在夹杂上力及电荷的平衡条件可被表示为

$$- \oint_L \frac{1}{t} \Omega(t) dt + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad (31)$$

在上式中环绕 L 的积分取逆时针方向. 注意到 $\Omega(\zeta)$ 在全平面中是一分片全纯函数, 则以上积分可被表达为

$$- \oint_L \frac{1}{t} \Omega(t) dt = - \oint_{\infty} \frac{1}{t} \Omega(t) dt + \oint_0 \frac{1}{t} \Omega(t) dt. \quad (32)$$

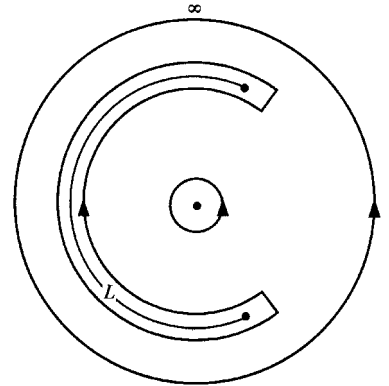


图 2 环路积分图

以上方程中的三个环路积分如图 2 所示. 由于当 $|\zeta| = \infty$ 时 $\Omega(\zeta) = O(\zeta^{-1})$, 则环绕无穷点的第一个环路积分为零; 注意到式(20) 并利用残值定理^[16], 则环绕 $\zeta = 0$ 点的第二个环路积分为 $-\mathbf{f}_0$. 则在夹杂上力及电荷的平衡条件已自动满足.

现引入另一个辅助函数 $\Pi(\zeta)$

$$\Pi(\zeta) = \begin{cases} -M^{-1} \Omega(\zeta) + \frac{\omega \zeta}{2} [-b \quad ai \quad 0 \quad 0]^T - (M^{-1} + M^{-1}) B s_1(\zeta) & (|\zeta| < 1), \\ M^{-1} \Omega(\zeta) - \frac{\omega}{2\zeta} [-b \quad -ai \quad 0 \quad 0]^T + (M^{-1} + M^{-1}) B s_2(\zeta) & (|\zeta| > 1). \end{cases} \quad (33)$$

不难发现 $\Pi(\zeta)$ 也是一个分片全纯函数, 并且它只在界面的脱开部分 CL 部分有间断. $\Pi(\zeta)$ 在点 $\zeta = 0$ 处的值为

$$\Pi(0) = - \frac{1}{2\pi} \mathbf{b}_0 \quad (34)$$

围绕界面脱开部分 CL 的广义位错条件可表示为

$$- \oint_{CL} \frac{1}{t} \Pi(t) dt + i \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad (35)$$

在上式中围绕 CL 的环路积分取逆时针方向。注意到 $\Pi(\zeta)$ 在全平面分片全纯, 则以上积分可被表达为

$$- \oint_{CL} \frac{1}{t} \Pi(t) dt = - \oint_{\infty} \frac{1}{t} \Pi(t) dt + \oint_0 \frac{1}{t} \Pi(t) dt \quad (36)$$

由于当 $|\zeta| = \infty$ 时 $\Pi(\zeta) = O(\zeta^{-1})$, 则上式中环绕无穷远点的第一个环路积分为零; 注意到(34)式, 则环绕 $\zeta = 0$ 点的第二个环路积分为 $-i \mathbf{b}_0$ 。这样环绕界面脱开部分 CL 的广义位错条件也已自动满足。

夹杂上的力矩平衡条件可被表示为

$$- \oint_L \left[\begin{array}{ccc} \frac{bi}{2}(1-t^{-2}) & \frac{a}{2}(1+t^{-2}) & 0 \end{array} \right] \Omega(t) dt + [-y_0 \ x_0 \ 0 \ 0] \mathbf{f}_0 + M_0 = \mathbf{0} \quad (37)$$

以上方程中的环路积分可被表达为

$$\begin{aligned} & - \oint_L \left[\begin{array}{ccc} \frac{bi}{2}(1-t^2) & \frac{a}{2}(1+t^2) & 0 \end{array} \right] \Omega(t) dt = \\ & - \left[\begin{array}{ccc} \frac{bi}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{array} \right] \oint_{\infty} \Omega(t) dt + \left[\begin{array}{ccc} -\frac{bi}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{array} \right] \oint_0 \frac{1}{t^2} \Omega(t) dt = \\ & - 2\pi i \left[\begin{array}{ccc} \frac{bi}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{array} \right] \Psi_{\mathbf{k}} + 2\pi i \left[\begin{array}{ccc} -\frac{bi}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{array} \right] \Psi_{\mathbf{c}} = \\ & 2\pi \text{Im} \left\{ [bi \ a \ 0 \ 0] \Psi_{\mathbf{k}} \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

在以上方程(38)式的推导过程中, 应用了 $\Omega(\zeta)$ 在无穷远点及零点处的如下性态(该性态可由(28)及(18a, b, c)获得)

$$\Omega(\zeta) = \zeta^{-1} \Psi_{\mathbf{k}} + O(\zeta^{-2}) \quad (\text{当 } |\zeta| \rightarrow \infty), \quad (39a)$$

$$\Omega(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \mathbf{f}_0 + \zeta \Psi_{\mathbf{k}} + O(\zeta^2) \quad (\text{当 } |\zeta| \rightarrow 0), \quad (39b)$$

这样(37)式可被最终化简为

$$2\pi \text{Im} \left\{ [bi \ a \ 0 \ 0] \Psi_{\mathbf{k}} \right\} + [-y_0 \ x_0 \ 0 \ 0] \mathbf{f}_0 + M_0 = \mathbf{0} \quad (40)$$

将(30)式代入(40)式, 则刚性夹杂的旋转角 ω 可被唯一确定并可进而确定出未知常向量 \mathbf{c} 。

将(29a)和(30)式代入(18a), 则全纯函数向量 $\mathbf{f}'(\zeta)$ 可被求得为

$$\mathbf{f}'(\zeta) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g}_1(\zeta) - \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{X}(\zeta) \mathbf{g}_2(\zeta) \quad (41a)$$

在上式中

$$\mathbf{g}_1(\zeta) = \frac{\omega}{2} (\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1})^{-1} [-b(1+\zeta^{-2}) \ ai(1-\zeta^{-2}) \ 0 \ 0]^T. \quad (41b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2(\zeta) = & \zeta^{-2} [\mathbf{X}(0)]^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 + \zeta^{-1} [\mathbf{X}(0)]^{-1} \left\{ \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_0 + \right. \\ & \left. [4(b_1^{-1} - a_1^{-1}) \ \delta_a - a_1^{-1} [6] \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1] + \left\{ \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_0 + [4(b_1 - a_1) \ \delta_a - a_1 [6] \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1] \right\} + \right. \\ & \left. \zeta \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 + \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_j} [\mathbf{X}(\bar{\zeta}_j)]^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j - \frac{1}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_j} [\mathbf{X}(1/\bar{\zeta}_j)]^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (41c)$$

注意到在以上推导中, $\mathbf{f}(\zeta)$ 中每一个分量函数的自变量没有按照其相对应的特征值加以书写。由(41)式所表达的函数向量 $\mathbf{f}'(\zeta)$ 与(15b)中所示的解答形式不一致并且该表达式只在单位圆 $|t| = 1$ 上是正确的。为了获得显式的全场解答, 可在(41)式中应用一平移技术, 可

获得:

$$\begin{aligned}
 f'(\zeta) = & \frac{\omega}{2} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^1)^{-1} [-b \quad ai \quad 0 \quad 0] \mathbf{J}^T - \mathbb{4} \zeta_a^{-2} \mathbb{6} \frac{\omega}{2} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \\
 & \mathbf{M}^1)^{-1} [b \quad ai \quad 0 \quad 0] \mathbf{J}^T - \sum_{k=1}^4 \mathbb{4} \zeta_a^{-2} \mathbf{X}_k(\zeta_a) \mathbb{6} \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{I}_k [X(0)] \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 - \\
 & \sum_{k=1}^4 \mathbb{4} \zeta_a^{-1} \mathbf{X}_k(\zeta_a) \mathbb{6} \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{I}_k [X(0)] \mathbf{J}^{-1} \left\{ \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_0 + \right. \\
 & \left. \mathbb{4} (b_1^{-1} - a_1^{-1}) \delta_a - a_1^{-1} \mathbb{6} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 \right\} - \sum_{k=1}^4 \mathbb{4} \mathbf{X}_k(\zeta_a) \mathbb{6} \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{I}_k \cdot \\
 & \left\{ \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_0 + \mathbb{4} (b_1 - a_1) \delta_a - a_1 \mathbb{6} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 \right\} - \sum_{k=1}^4 \mathbb{4} \zeta_a \mathbf{X}_k(\zeta_a) \mathbb{6} \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \cdot \\
 & \mathbf{I}_k \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 - \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbb{4} \frac{1}{\zeta_a - \bar{\zeta}_j} \mathbf{X}_k(\zeta_a) \mathbb{6} \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{I}_k [X(\bar{\zeta}_j)] \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j + \\
 & \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbb{4} \frac{1}{\zeta_a - 1/\bar{\zeta}_j} \mathbf{X}_k(\zeta_a) \mathbb{6} \mathbf{B}^{-1} \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{I}_k [X(1/\bar{\zeta}_j)] \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j. \quad (42)
 \end{aligned}$$

这样该问题已被完全求解。由方程(42), 诸如应力及电位移等物理量可被方便地获得。

经过一较繁的代数运算后, 在界面 $|t|=1$ 的理想联接部分 L 上作用于刚性夹杂上的表面力的法向, 切向和纵向分量以及电位移的法向分量的表达式可被最终化简为以下形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nm} \\ \sigma_{nz} \\ D_n \end{bmatrix} = -2k^{-2} \begin{bmatrix} \frac{b}{2}(t + t^{-1}) & \frac{ai}{2}(t^{-1} - t) & 0 & 0 \\ \frac{ai}{2}(t - t^{-1}) & \frac{b}{2}(t + t^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{Im} \left\{ t \Psi \mathbf{X}^{-}(t) \mathbf{F}_1(t) \right\}. \quad (43a)$$

在上式中

$$k = \sqrt{(b^2 - a^2)(t^2 + t^{-2}) + 2(a^2 + b^2)/2}, \quad (43b)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1(t) = & \left\{ \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_0 + \mathbb{4} (b_1 - a_1) \delta_a - a_1 \mathbb{6} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 \right\} + t \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{d}_1 + \\
 & \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{1}{t - \bar{\zeta}_j} [X(\bar{\zeta}_j)] \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J} \Psi^H \mathbf{k}_j \right\}. \quad (43c)
 \end{aligned}$$

在界面 $|t|=1$ 上作用于其法向为沿着界面的表面上的面力的法向, 切向和纵向分量以及电位移的切向分量的表达式可被最终化简为以下形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_{mn} \\ \sigma_{nm} \\ \sigma_{nz} \\ D_m \end{bmatrix} = -4k^{-2} \begin{bmatrix} \frac{b}{2}(t + t^{-1}) & \frac{ai}{2}(t^{-1} - t) & 0 & 0 \\ \frac{ai}{2}(t - t^{-1}) & \frac{b}{2}(t + t^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{Re} \left\{ t \mathbf{F}_2(t) \right\}, \quad (44a)$$

$$\mathbf{F}_2(t) = \mathbf{B} \mathbb{4} \frac{ap_a(1 - t^{-2}) + bi(1 + t^{-2})}{a(1 - t^{-2}) - ibpa(1 + t^{-2})} \mathbb{6} \mathbf{B}^T \mathbf{L}^{-1} \left\{ \mathbf{g}_1(t) - \Psi(\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \mathbf{X}^{-}(t) \mathbf{g}_2(t) \right\}, \quad (44b)$$

在上式中 $\mathbf{g}_1(t)$ 和 $\mathbf{g}_2(t)$ 已在(41b) 和(41c) 中被分别定义。

很明显, 在界面上脱开部分的端部应力及电位移分量显现出与平直的 Griffith 界面裂纹相

同的奇异行为。我们可以发现当在基体中无奇点作用时, 通过将在附录 A 中得到的恒等式代入刚性夹杂的旋转 ω 以及沿界面 $|t|=1$ 应力及电位移分布的表达式, 可无需对 Stroh 本征值问题进行求解; 而这意味着所得到的表达式对任何退化材料(如各向同性材料)都将是成立的。

从方程(42), (43), (44) 以及 ω 的表达式中, 我们可注意到出现许多形如 $\Psi \mathbb{4}_{g_a} \mathbb{6} \mathbf{J} \Psi^H$ 的项。通过应用以下可从(25a) 和(25b) 容易得到的恒等式

$$\left. \begin{aligned} \Psi \mathbf{J} \Psi^H &= \mathbf{M}, & \Psi \Lambda \mathbf{J} \Psi^H &= -\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}, \\ \Psi \Lambda^{-1} \mathbf{J} \Psi^H &= -\mathbf{M}, & \Psi \Lambda^{-2} \mathbf{J} \Psi^H &= \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

并且注意到 $\mathbb{4}_{g_a} \mathbb{6}$ 可由 $\Lambda^{-2}, \Lambda^{-1}, \mathbf{I}, \Lambda$ 的线性组合唯一表出

$$\mathbb{4}_{g_a} \mathbb{6} = c_{-2} \Lambda^{-2} + c_{-1} \Lambda^{-1} + c_0 \mathbf{I} + c_1 \Lambda. \quad (46)$$

则我们可获得下式

$$\Psi \mathbb{4}_{g_a} \mathbb{6} \mathbf{J} \Psi^H = c_{-2} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} - c_{-1} \mathbf{M} + c_0 \mathbf{M} - c_1 \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}. \quad (47)$$

方程(47) 意味着 $\Psi \mathbb{4}_{g_a} \mathbb{6} \mathbf{J} \Psi^H$ 可直接由阻抗矩阵 \mathbf{M} 获得而无需求解本征方程 (B1)。

当椭圆夹杂退化为线夹杂并且该线夹杂的上部已完全脱开而其下部仍与压电基体理想联接, 此时夹杂端部的应力及电位移奇异性将发生变化。以下将特别对这种变化的奇异性进行讨论。与 Ting 针对各向异性介质所展开的讨论^[17] 相似, 假设在夹杂端部应力及电位移正比于 r^δ , 则在满足夹杂上的边界条件后将得到关于奇异性指数 δ 的如下方程

$$\| \mathbf{S} + i\beta \mathbf{V} \| = 0, \quad (48)$$

$$\beta = \frac{1 + \exp[4\pi \delta]}{1 - \exp[4\pi \delta]}. \quad (49)$$

解以上方程可获得奇异性指数 δ 的显式表达如下

$$\delta_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta_{3,4} = -\frac{3}{4} \pm i \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta_{5,6} = -\frac{1}{4} \pm \frac{k}{2}, \quad \delta_{7,8} = -\frac{3}{4} \pm \frac{k}{2}, \quad (50)$$

在上式中 ε 和 k 的定义与附录 B 中方程 (B9) 相同。由上式可见在这种特殊情况下有八个应力及电位移奇异性而不是一般情况下的四个奇异性。另外也可发现无论是一般情况还是特殊情况, 这些应力及电位移奇异性将不随该各向异性压电体绕 x_3 轴的坐标旋转而变化, 这与 Ting^[17] 在对各向异性介质的讨论时所得到的结果相类似。

3 数值结果及讨论

在本节中, 我们将给出几个具体的数值算例以显示本文所得到解答的一般性并同时指出各种载荷条件、椭圆夹杂的几何参数和机电常数等对界面处应力及电位移分布的影响。本文取压电基体为 PZT₄, 其材料常数为

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1.402 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}, & c_{12} &= 7.892 \times 10^{10} \text{Nm}^{-2}, & c_{13} &= 7.565 \times 10^{10} \text{Nm}^{-2} \\ c_{33} &= 1.1577 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}, & c_{44} &= 2.525 \times 10^{10} \text{Nm}^{-2} \\ e_{31} &= -5.2677 \text{Cm}^{-2}, & e_{33} &= 15.4455 \text{Cm}^{-2}, & e_{15} &= 12.0000 \text{Cm}^{-2}, \\ \varepsilon_{11} &= 6.359 \times 10^{-9} \text{VC}^{-1} \text{m}^{-1}, & \varepsilon_{33} &= 5.523 \times 10^{-9} \text{CV}^{-1} \text{m}^{-1}. \end{aligned}$$

在第一个算例中, 椭圆夹杂的几何参数取为 $(a, b) = (1.5, 0.5)$, $a_1 = [a \cos \phi, b \sin \phi]$, $b_1 = [a \cos \phi, -b \sin \phi]$, $\phi = \frac{\pi}{3}$; 并且载荷条件为夹杂在 $[0, 0]$ 点处受到水平方向集中力 $\mathbf{f}_0 = [10 \text{N} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 的作用。图 3 所示为应力及电位移在夹杂与基体界面上的分布。由该图显

见脱开部分界面上表面力及电位移法向分量确实为零并且应力及电位移的值在裂尖处趋于无穷;同时环向力 $\sigma_{\theta\theta}$ 在脱开部分主要是压应力,而在联接部分主要是拉应力;在裂尖附近法向正应力 σ_{nn} 由正突然变到负,这是由在裂尖附近存在不同的奇异性指数造成的;电位移不为零是由于机械场和电场的耦合所致。图4给出在基体上 σ_{11} 的等值线分布图。由于载荷条件、椭圆夹杂的几何参数及压电基体的取向都关于 x_1 轴对称,则在该等值线图上的 σ_{11} 也关于 x_1 轴对称;我们也可观察到在两个裂尖 a_1 和 b_1 点附近应力梯度较大,这是由裂尖处应力的奇异性所致;在夹杂的右半部分 σ_{11} 以压应力为主而在夹杂的左半部分 σ_{11} 以拉应力为主。

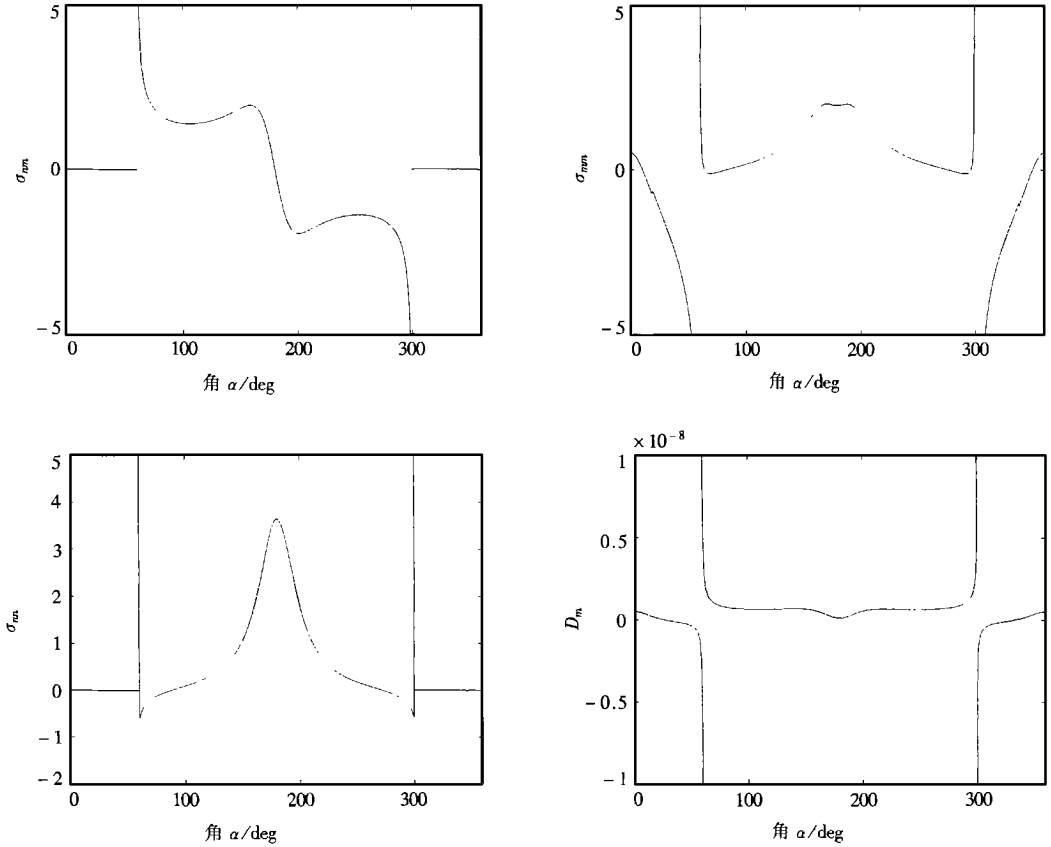


图3 椭圆夹杂在[0, 0]点外受到集中力 $f_0 = [10N \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 作用时在界面上应力及电位移的分布

本文所研究的椭圆夹杂模型可以包含一大类缺陷。当该椭圆的长轴和短轴相等时,它就变为圆夹杂;而当该椭圆的短轴减小为零时,此时它就退化为线型片状夹杂。针对这两种特殊的情况,本文也给出了计算结果。

在第二个算例中椭圆夹杂变为圆夹杂,其几何参数取为 $a = b = 1, a_1 = \exp[i\phi], b_1 = \exp[-i\phi], \phi = \frac{\pi}{3}$;并且载荷条件为夹杂在[0, 0]点处受到集中力 $f_0 = [-10N \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 的作用,同时基体在[1, 0]点受到另一集中力 $f = [10N \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 的作用,可见这两个集中力大小相等而方向相反并作用于同一条直线 x 轴上(自平衡力系)。图5所示为在这种载荷条件下 σ_{11} 的等值线分布图。可以看到除过在两个裂尖处应力有奇异性外,在基体上集中力的作用点[1, 0]处应力也存在奇异性(r^{-1})。与图4类似的原因,在该图中 σ_{11} 也关于 x_1 轴对称。拉

应力区主要位于夹杂上部和夹杂下部; 压应力区主要位于夹杂正前方和夹杂正后方。

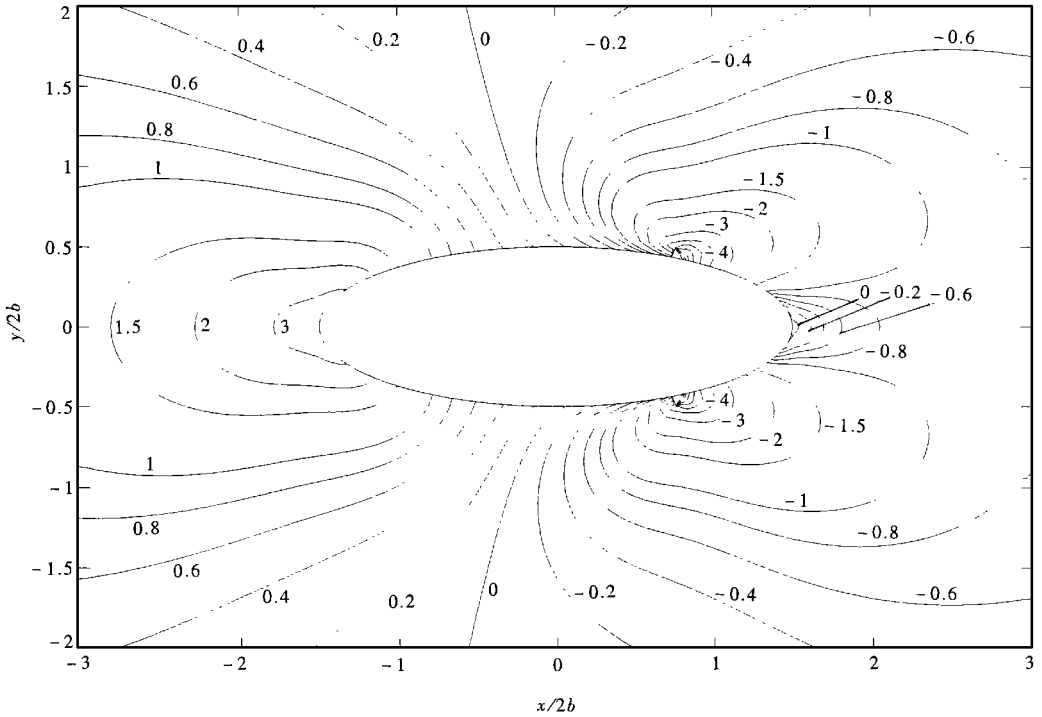


图4 椭圆夹杂在 $[0, 0]$ 点处受到集中力 $f_0 = [10N \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 作用时在压电基体上 σ_{11} 等值线图

在第三个算例中椭圆夹杂退化为一线性薄片状夹杂, 其几何参数取为 $a = 1, b = 0, a_1 = [-0.5, 0], b_1 = [0.5, 0]$; 并且此时载荷条件为压电基体在无穷远处受到均匀载荷 $\varepsilon_1^\infty = 0, t_2^\infty = [0 \ 1N/m^2 \ 0 \ 0]^T$ 的作用。在本算例中, 该薄片状夹杂上岸的中间部分 $x_1 \in [-0.5, 0.5]$ 已经脱开, 上岸的其余部分仍与基体理想联接, 而下岸的全部都与基体理想联接。图6所示为在这种载荷作用下 σ_{22} 的等值线分布图。由于外载条件及几何参数等均关于 x_2 轴对称, 则 σ_{22} 也关于 x_2 轴对称。从该图可以看到 σ_{22} 在夹杂的上岸 $x_1 \in [-0.5, 0.5]$ 的部分为零, 满足该部分边界上应力自由条件; 在上岸的其余部分和整个下岸 σ_{22} 均大于零(拉应力)。同时也可观察到除了在 a_1 和 b_1 两点处应力有奇异性外, 在线夹杂的两个端点上同时存在着应力奇异性。当然在脱开点和夹杂端点处的应力奇异性指数是不同的。本节中所进行的计算只是初步结果, 对于应力及电位移如何随绕 x_3 轴的坐标旋转而变化等问题有待进一步的分析计算。

4 结 论

通过应用八维 Stroh 公式分析了一压电基体中已部分脱开的刚性导体椭圆夹杂问题, 初步计算结果显示分析的正确性。这里所进行的分析有以下几个特点: 1) 通过引入一分片全纯函数向量 $\Omega(\zeta)$, 可直接获得针对该问题的复势向量的闭合形式解答; 2) 在对向量形式的 Hilbert 问题进行解耦的过程中由于充分利用了阻抗阵 M 的厄尔米特特性从而避免了对模态阵 Ψ 求逆, 这种解耦方法应优于 Suo 等所采用的方法^[7]; 3) 所推导的一些新的恒等式可被用以得到沿界面应力及电位移分布的实形式解答。

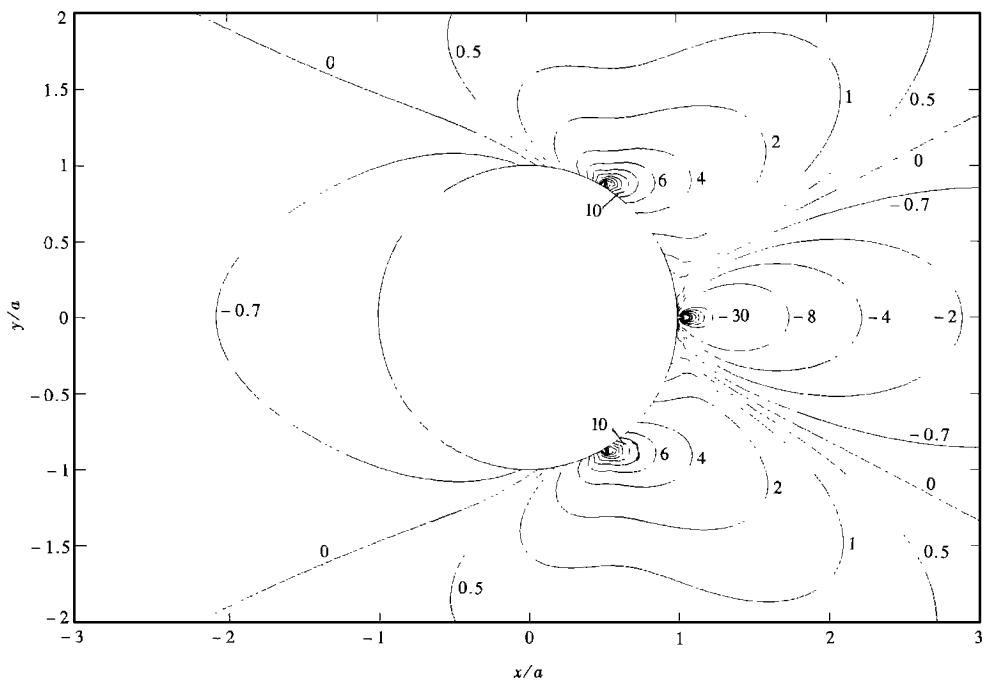


图 5 圆夹杂在 $[0, 0]$ 点处受到集中力 $f_0 = [-10N \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 作用, 同时压电基体在 $[1, 0]$ 点处受到集中力 $f = [10N \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 作用时在压电基体上 σ_{11} 等值线图

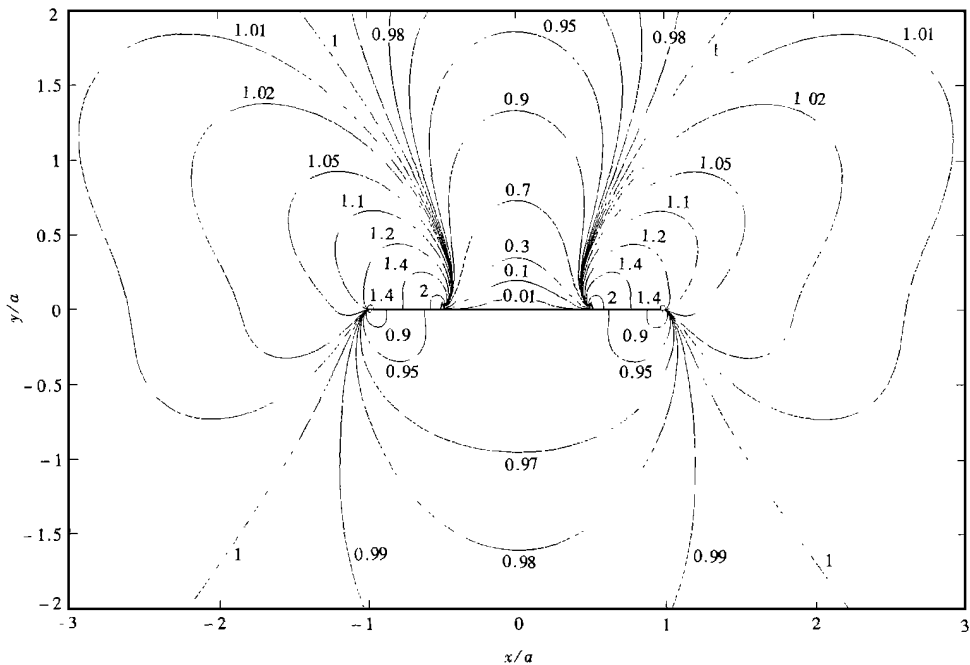


图 6 线型片状夹杂在无穷远处受到均布载荷 $\varepsilon_1^\infty = 0, t_2^\infty = [0 \ 1N/m^2 \ 0 \ 0]^T$ 的作用时压电基体上 σ_{22} 等值线图

[附录 A]

考虑以下 Stroh 特征关系

$$N \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbb{4}p_a \mathbb{6} \quad (\text{A1})$$

将(A1)右乘以 $[\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T]$ 并应用以下恒等式

$$S = i(2\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{I}), \quad \mathbf{H} = 2i\mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{L} = -2i\mathbf{B}\mathbf{B}^T. \quad (\text{A2})$$

则我们可获得以下恒等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbb{4}p_a \mathbb{6} \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \mathbb{4}p_a \mathbb{6} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \mathbb{4}p_a \mathbb{6} \mathbf{B}^T & \mathbf{B} \mathbb{4}p_a \mathbb{6} \mathbf{A}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} N \left\{ \mathbf{I} - i \begin{bmatrix} S & \mathbf{H} \\ -L & S^T \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{A3})$$

令

$$\mathbb{4} \frac{ap_a(1-t^{-2}) + ib(1+t^{-2})}{a(1-t^{-2}) - ibp_a(1+t^{-2})} \mathbb{6} = \mathbb{4}u_a \mathbb{6} \mathbb{4}v_a \mathbb{6}^{-1}, \quad (\text{A4})$$

在上式中

$$\begin{cases} \mathbb{4}u_a \mathbb{6} = \mathbb{4}ap_a(1-t^{-2}) + ib(1+t^{-2}) \mathbb{6} \\ \mathbb{4}v_a \mathbb{6} = \mathbb{4}a(1-t^{-2}) - ibp_a(1+t^{-2}) \mathbb{6} \end{cases} \quad (\text{A5})$$

注意到 Stroh 本征问题, 可得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbb{4}u_a \mathbb{6} \mathbb{4}v_a \mathbb{6}^{-1} = \left\{ ib(1+t^{-2})\mathbf{I} + a(1-t^{-2})\mathbf{N} \right\} \times \left\{ a(1-t^{-2})\mathbf{I} - ib(1+t^{-2})\mathbf{N} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{A6})$$

将(A6)右乘以 $[\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T]$ 并应用在(A2)中的恒等式, 则可得到以下恒等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbb{4}u_a \mathbb{6} \mathbb{4}v_a \mathbb{6}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \mathbb{4}u_a \mathbb{6} \mathbb{4}v_a \mathbb{6}^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B} \mathbb{4}u_a \mathbb{6} \mathbb{4}v_a \mathbb{6}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{B} \mathbb{4}u_a \mathbb{6} \mathbb{4}v_a \mathbb{6}^{-1} \mathbf{A}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ ib(1+t^{-2})\mathbf{I} + a(1-t^{-2})\mathbf{N} \right\} \left\{ a(1-t^{-2})\mathbf{I} - ib(1+t^{-2})\mathbf{N} \right\}^{-1} \left\{ \mathbf{I} - i \begin{bmatrix} S & \mathbf{H} \\ -L & S^T \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{A7})$$

(A3)及(A7)显示在这两个方程中的左端项可由方程中的直接与材料常数相关的右端项表出

[附录 B]

考虑如下的本征问题

$$(\mathbf{M}^{-1} + \exp(2\pi i \delta / J) \mathbf{M}^{-1}) \phi = \mathbf{0}. \quad (\text{B1})$$

将以下恒等式代入(B1)

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - i\mathbf{S})\mathbf{L}^{-1}, \quad (\text{B2})$$

则对于 ϕ 的一个非平凡解, 我们得到

$$\|\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1} + i\beta\mathbf{L}^{-1}\| = 0, \quad (\text{B3})$$

在上式中 β 被定义为

$$\beta = \frac{1 + \exp(2\pi i \delta / J)}{1 - \exp(2\pi i \delta / J)}, \quad (\text{B4})$$

注意到 $\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1}$ 为一反对称矩阵以及 \mathbf{L}^{-1} 为一对称矩阵, 将(B3)展开可得到

$$\beta^4 - k_2\beta^2 - k_0 = 0, \quad (\text{B5})$$

在上式中

$$k_2 = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^2), \quad k_0 = -\|\mathbf{S}\|. \quad (\text{B6})$$

(B5) 的四个根由下式给出

$$\beta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{k_0^2 + 4k_0} + k_0}{2}}, \quad \beta_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{k_0^2 + 4k_0} - k_0}{2}} \quad (B7)$$

从(B4), δ_α 可被求得为

$$\delta_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\varepsilon, \quad \delta_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm k \quad (B8)$$

这里

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}, \quad k = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{1 - \beta_3}{1 + \beta_3} \right) \quad (B9)$$

令 λ_α 和 λ_β 为特征值问题(B1) 的两个特征根, ϕ_α 和 ϕ_β 为其相应的特征向量. 注意到 M^{-1} 和 M^{-1} 均为厄尔米特矩阵, 则我们可得到

$$\phi_\alpha^H M^{-1} \phi_\alpha = \lambda_\alpha \phi_\beta^H M^{-1} \phi_\alpha, \quad (B10a)$$

$$\phi_\beta^H M^{-1} \phi_\alpha = \lambda_\beta \phi_\beta^H M^{-1} \phi_\alpha \quad (B10b)$$

以上两式相减得到

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \phi_\beta^H M^{-1} \phi_\alpha = 0, \quad (B11)$$

则我们可得到以下正交关系

$$\phi_\beta^H M^{-1} \phi_\alpha = 0 \quad \text{对于 } \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \quad (B12)$$

注意到(B1) 的四上根的分布, 则我们可获得以下的正交正则化关系式

$$J \Psi^H M^{-1} \Psi = I \quad (B13a)$$

$$J \Psi^H M^{-1} \Psi = -\Lambda \quad (B13b)$$

在上式中 $\Psi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4]$.

[参 考 文 献]

- [1] Deeg W F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids[D]. Ph D thesis. CA: Stanford University, 1980.
- [2] McMeeking R M. On mechanical stresses at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown[J]. J Appl Phys, 1987, **62**(8): 3116—3122.
- [3] Pak Y E. Force on a piezoelectric screw dislocation[J]. J ASME J Appl Mech, 1990, **57**(4): 863—869.
- [4] Pak Y E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity[J]. Int J Solids and Structures, 1992, **29**(19): 2403—2419.
- [5] Kuo C M, Barnett D M. Stress singularities of interfacial cracks in bonded piezoelectric half_spaces [A]. In: Wu J J, Ting T C T, Barnett D M Eds: Modern Theory of Anisotropic Elastic Elasticity and Applications [C]. Philadelphia: SIAM Proceedings Series, 1991, 33—50.
- [6] Wang B. Three dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in piezoelectric material[J]. Int J Solids and Structures, 1992, **29**(3): 293—308.
- [7] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. J Mech Phys Solids, 1992, **40**(4): 739—765.
- [8] Chen T. The rotation of a rigid ellipsoidal inclusion embedded in an anisotropic piezoelectric medium [J]. Int J Solids and Structures, 1993, **30**(15): 1983—1995.
- [9] Chung M Y, Ting T C T. Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole[J]. Int J Solids and Structures, 1996, **33**(23): 3343—3361.
- [10] Sosa H, Kutoryansky N. New developments concerning piezoelectric materials with defects[J]. Int J Solids and Structures, 1996, **33**(23): 3399—3414.
- [11] Meguid S A, Zhong Z. Electroelastic analysis of a piezoelectric elliptical inhomogeneity[J]. Int J

- Solids and Structures, 1997, **34**(23): 3401—3414.
- [12] Meguid S A, Deng W. Electro_elastic interaction between a screw dislocation and an elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials[J]. Int J Solids and Structures, 1998, **35**(13): 1467—1482.
- [13] Deng W, Meguid S A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials[J]. ASME J Appl Mech, 1998, **65**(1): 76—84.
- [14] Deng W, Meguid S A. Analysis of a screw dislocation inside an elliptical inhomogeneity in piezoelectric solids[J]. Int J Solids and Structures, 1999, **36**(10): 1449—1469.
- [15] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity [M]. Groningen: Noordhoff, 1953.
- [16] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数[M]. 北京: 北京大学出版社, 1984.
- [17] Ting T C T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites[J]. Int J Solids and Structures, 1986, **22**(9): 965—983.

Analysis of a Partially Debonded Conducting Rigid Elliptical Inclusion in a Piezoelectric Matrix

WANG Xu, SHEN Ya_peng

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University,
Xi'an 710049, P R China)

Abstract: A closed_form full_field solution for the problem of a partially debonded conducting rigid elliptical inclusion embedded in a piezoelectric matrix is obtained by employing the eight_dimensional Stroh formalism in conjunction with the techniques of conformal mapping, analytical continuation and singularity analysis. Some new identities and sums for anisotropic piezoelectric media are also derived, through which real_form expressions for the stresses and electric displacements along the interface as well as the rotation of the rigid inclusion can be obtained. As is expected, the stresses and electric displacements at the tips of the debonded part of the interface exhibit the same singular behavior as in the case of a straight Griffith interface crack between dissimilar piezoelectric media. Some numerical examples are presented to validate the correctness of the obtained solution and also to illustrate the generality of the exact solution and the effects of various electromechanical loading conditions, geometry parameters and material constants on the distribution of stresses and electric displacements along the interface.

Key words: holomorphic function; Stroh formalism; conformal mapping; conducting rigid elliptical inclusion