

文章编号: 1000-0887(2001) 01-0079-06

关于晶体旋转的误解及合理塑性应变速度^{*}

赵祖武

(天津大学力学系, 天津 300072)

(本刊编委赵祖武来稿)

摘要: 指出晶体是离散的而不是连续的材料, 因此在极分解 $F = RU$ 中的旋转 R 及 UF^{-1} 中的旋率 W 不是正确的. 塑性变形速度若直接以滑移系中的滑移速度来表示, 如 $v \times n$, 则差错将会产生. 滑移后的晶格几何形状并不改变, 基于此概念提出了连续介质力学范围内的一个简单途径来表达滑移产生的塑性应变速度. 建议了大变形下的本构方程.

关键词: 大应变; 旋转; 误解; 多晶体; 塑性变形速度

中图分类号: O344.3 文献标识码: A

1 引言及前人工作

当讨论有限变形下的本构关系时, 首先要定义一个合理的塑性应变速度, 它与变形分解为弹性及塑性两部分的问题有关. 近年来这方面有两种方案, 即乘法分解及加法分解. 下面给予简单介绍.

F. H. Lee^[1] 提出在空间固定坐标系中变形梯度的乘法分解

$$F = F^e F^p, \tag{1}$$

此处上标“e”及“p”分别标志弹性及塑性部分. 速度梯度也分解为二部分

$$L = \dot{F}F^{-1} = \dot{F}^e F^{e-1} + F^e \dot{F}^p F^{p-1} F^{e-1} = L^e + F^e L^p F^{e-1}, \tag{2}$$

若选 F^e 为对称的, 即 $F^e = V^e$, 则变形速度 D 及旋律 W 可写为

$$D = D^e + D^p + (V^e W^p V^{e-1})_S, \tag{3}$$

$$W = W^e + (V^e W^p V^{e-1})_A, \tag{4}$$

此处 S 及 A 表示对称及反对称部分. 此处值得注意(3) 包含塑性旋律 W^p , 这看来是可疑的. 基于式(1), 有不少论文发表, 其中一部分列于本文末的参考文献中^[2-13].

Th. Lehmann^[14] 提出随体坐标中度量张量的乘法分解, 但它并未引起多少反应.

应变的弹塑性加法分解通常在随体坐标中进行. 初始(参考) 和当时的基向量分别以 $\{g_i\}$ 和 $\{g_i\}$ 表示. 经过弹性卸载后的基向量以 $\{g_i\}$ 表示. 弹性应变和 ϵ_{ij}^e 塑性应变 ϵ_{ij}^p 为

$$\epsilon_{ij}^{(e)} = (g_{ij} - \mathcal{G}_{ij})/2, \tag{5}$$

$$\epsilon_{ij}^{(p)} = (\mathcal{G}_{ij} - \mathcal{G}_{ij}^0)/2, \tag{6}$$

通常 ϵ_{ij}^e 和 ϵ_{ij}^p 的基向量是不同的, 例如 $\epsilon_{ij}^e g_i^0 g_j^0$ 和 $\epsilon_{ij}^p g_i^0 g_j^0$. 在文献[15] 它们都配以相同的 $g_i^0 g_j^0$.

* 收稿日期: 2000_02_22; 修订日期: 2000_09_20

作者简介: 赵祖武(1919—), 男, 杭州人, 教授.

看起来时至今日对这些基向量尚未曾作较细致的讨论以找到足够合理的应变度量。

在以后几节中将提出考虑晶体滑移的新方案。

2 旋转与塑性应变速度

我们来看一个简单例子,即在简单立方单晶中发生水平滑移,如图1所示。滑移之后,晶体的形状从图1(a)的 $OABC$ 变为图1(b)的 OAB_1C_1 (弹性变形略去)。在连续介质力学中,它近似地以图1(c)的平行四边形代替。变形梯度的极分解 $F = RU$ 中有刚体旋转 R 。 R 是物体变形中各线素的一种旋转的加权平均值。但在图1(b)中各晶格内的任何线素都未发生旋转。实际上在滑移平面之上部,第一线素仅仅水平移动而没有任何旋转并且变形是不连续的。这是因为晶体是离散的而不是连续的材料。因此,所谓的旋转并无真实的含意。所以 Mandel 的方向子^[16]在连续介质中并不能保持,这是因为方向子中任何一对向量之间的夹角在变形时都可能改变。式(3)及(4)中的 W^p 是按 $W^p = RR^{-1}$ 关系与 R 相关,所以文献[3, 17]中的讨论至少也是可疑的。某些论文^[18-24]用滑移系上的滑移速度,即 $v \wedge n$ 直接表示塑性变形速度,此处 v 是滑移方向, n 为滑移面的法向量。然而这些滑移系也不能保持下来。通常在变形中不止一个滑移系开动,尤其是非比例加载情况,不同的滑移系可互相影响,以至于在连续介质力学中它们的方向会被改变。例如图1中的竖向滑移面会由于水平滑移而变为倾斜或弯曲。此外,在多晶体情况,势必要用某些等效的宏观滑移系来代替如此众多晶粒的滑移系,而宏观滑移系又不是唯一的^[25],同时我们势必要还要面临如何选择最佳者。另外如何由晶粒的滑移性质来求实宏观的模量,也是问题。

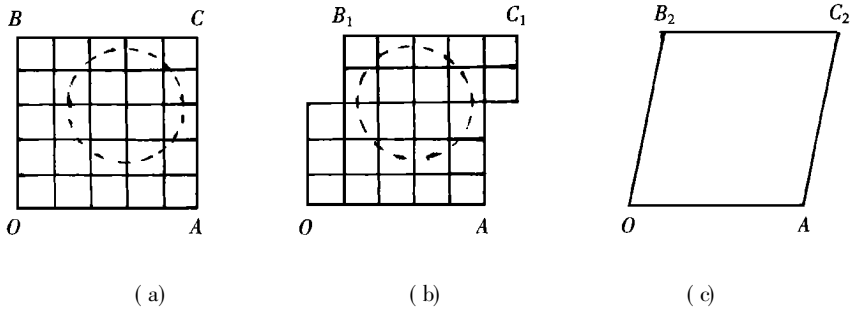


图 1

由于以上所述,在晶体的实际情况与连续介质力学的理论描述之间出现了一个基本矛盾。既要表达实际情况又要仍然使用连续介质力学,就要对本构方程中的塑性应变速度作适当处理才有可能,这就是本文的主要目的。我们建议如下的塑性变形速度表达式。

我们取随体(拖带)坐标来表达塑性变形以使极分解中出现的旋转 R 从根本上被排除。考虑滑移后的晶格形状不变,取当时构形和基向量为参考,因此当时的塑性应变瞬时为零,因此当时的应变速度可简化为[参阅附录]

$$\dot{\mathcal{E}}^p = \mathcal{E}_j g^i g^j, \quad (7)$$

$$\text{此处 } \mathcal{E}_j = 2^{-1} \partial (g_{ij} - \mathcal{G}_{ij}) / \partial t = \mathcal{G}_{ij} / 2 = (\dot{v}_j + \dot{v}_i v_j) / 2, \quad (8)$$

其中 \dot{v}_j 为速度向量 v 的协变分量 v_j 的协变导数。(7) 实际上是变形速度,它与歌西应力相匹配^[26]。由于 Drucker 公设及法向律是建立在某一组不变的基向量之上的,因此(7) 可用来建立本构方程。

对于滑移系与图 1 不同的材料, 例如 FCC 的滑移面为 (111), 滑移方向为 [111], 式 (7) 仍适用, 因为它是个张量, 而张量是独立于观察者和参考构架 (基向量) 之外的。例如图 1 中水平滑移产生的实际效果并不会因基向量变换为其它任一组倾斜的基向量而改变。反之, 按一组指定的基向量写成的张量可以表达各种滑移系上任何滑移产生的应变。因此, 虽然多晶体材料是由大量的具有随体方向的单晶粒组成, (7) 仍适用。塑性本构方程必须用张量表达, 这是因为如此表达的关系是客观的, 对于任何的坐标变换, 这个关系都是不变的。式 (7) 满足这样的要求。

式 (7) 不能直接积分以求塑性应变, 因为变形过程中基向量是变化的。然而 (8) 可以积分以求得度量张量的最后值, 利用此值可以在只差一个刚体运动的范围内求得最终的基向量。再给 $\tau^{-1}(g_{ij} - \bar{g}_{ij}^0)$ 配以适当的基向量并得到应变张量。似选择 g^i 为基向量并得到欧拉应变较好。这非是唯一的选择, 更好的是找到更加合理的应变度量, 才是期待的更值得研究的课题。

3 塑性本构方程

本构方程中的应力需作修正。如 F. H. Lee 所指出的^[1], 静水压力按照 $\det[F]$ 尺度来影响塑性功。 $\det[F]$ 表达了初始单位体元的缩小, 因此也影响施加于其上的作用力。他建议屈服函数以 $\bar{\sigma}^j \det[F] = \rho_0 \rho^{-1} \sigma^j$ 来表示, 此处 ρ 及 ρ_0 为材料的当时及初始的密度。我们使用一个新的置换应力 $\bar{\tau}^j = \rho_0 \rho^{-1} \sigma^j$ 来代替歌西应力 σ^j 。此处作者强调 $\bar{\tau}^j$ 不是 Kirchhoff 应力, 也与未变形的初始构形无关。在曲线坐标情况下, 屈服函数写为

$$f(\bar{\tau}^j g_j, T, k_m) = 0, \quad (9)$$

此处 T 为温度, k_m 为硬化参数或内变量, g_i 为基向量, 它是必需的因为当时的坐标通常不是正交笛卡尔坐标而且已硬化了的材料也将不是各向同性的。屈服函数常常用不变量来表达, 它们是由应力的混合分量组成的标量, 因此基向量被排除, 例如各向同性硬化动模型硬化。

塑性流动理论通常表为速度方程, 其中应变速度为 (7) 及 (8)。应力速度的表达式常不能简化到类似 (7), 这是因为应力速度并非由于晶体内部结构的变化引起的, 其当时的数值不能视为零。应力的 Jauhmann 速度 (参阅附录) 为

$$\dot{\tau}_i = (\bar{\tau} + d_m^i \tau^{ij} + d_n^j \tau^{in}) g_j \cdot \quad (10)$$

等温过程的中的塑性本构方程如下

$$\mathfrak{S}_j^{(p)} g^i g^j = \alpha h \frac{\partial f}{\partial \tau^{mn}} \dot{\tau}^{mn} \frac{\partial f}{\partial \tau_y} g^i g^j, \quad (11a)$$

$$\text{加载: } \alpha = 1, \text{ 当 } \frac{\partial f}{\partial \tau^{mn}} \dot{\tau}^{mn} > 0 \text{ 时,} \quad (11b)$$

$$\text{中性变载或卸载: } \alpha = 0, \text{ 当 } \frac{\partial f}{\partial \tau^{mn}} \dot{\tau}^{mn} \leq 0, \quad (11c)$$

此处 h 为硬化因子, α 示加载准则。

4 弹性应变速度

弹性应变是由晶格畸变引起的, 在图 1 中未示出。滑移系中的滑移是产生塑性应变的主要因素, 其它的位错运动更加复杂, 本文未予考虑。弹性及塑性两种形式的变形在连续介质力学中混在一起。将这两种形式分别表示于不同的式子, 将较为清楚。通常这可由设想中的卸

载来实现。全部弹性卸载之后,塑性变形将以残余变形的形式保留在中间构形之中,其基向量为 \mathbf{g}^i 。随即再加载到当时构形并且基向量再次为 \mathbf{g}^i 。这两部分应变可用欧拉应变表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{p}_j - \mathbf{g}_j^i) \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{g}_j - \mathbf{p}_j) \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j, \quad (13)$$

此处上标(p)及(e)表示塑性及弹性。

在当时构形塑性应变速度仍为(7),即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(p)} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j. \quad (14)$$

弹性应变速度将是 Jaumann 导数(参阅附录)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} = [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(e)} - d_i^m \varepsilon_{mj} - \varepsilon_{in} d_j^n] \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j, \quad (15)$$

括号内最后二项是基向量变化的影响,所以它们不分解为弹性及塑性二部分。塑性应变瞬时为零,因此 ε_{ij} 及 ε_{in} 等于弹性应变。弹性应变通常元小于 1,这两项常可以略去,这时本构方程将大为简化如下,

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{(p)}] \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = \left[M_{ijmn} + \alpha h \frac{\partial f}{\partial \tau^{mn}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau^{ij}} \right] \dot{\tau}^{mn} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j, \quad (16)$$

此处 M_{ijmn} 为弹性模量。

弹性应变很大以至于(15)中最后二项不能忽略,可用弹性势能函数来描述弹性反应^[27]。

5 例: 各向同性硬化

一个应力张量由二部分组成,即应偏量 s_j^i 及球张量 $I_\tau \delta_j^i$

$$\mathbb{T}_j^i = s_j^i + I_\tau \delta_j^i / 2, \quad (17)$$

此处 I_τ 是 \mathbb{T}_j^i 的第一不变量

$$I_\tau = \mathbb{T}_j^j. \quad (18)$$

球张量是静水压力, s_j^i 的正应力分量的平均值为零。通常假定塑性应变是仅由偏应力 s_j^i 引起的,除非静水压力很大或是用于特殊材料。

现将各向同性硬化材料的本构方程作为一个例子写出如下。屈服函数为

$$f = s_j^i s_j^i / 2 - \Phi(k) = 0, \quad (19)$$

函数 $\Phi(k)$ 标志着硬化程度,它随着硬化参量 h 的增长而增长, k 可考虑采用应力作的塑性功。当 $\Phi(k)$ 增长时, s_j^i 也成比例地增长并且屈服曲面在 s_j^i 空间中向各向膨胀,故为各向同性硬化。由(19)

$$\partial f / \partial s_j^i = s_j^i, \quad (20)$$

塑性本构方程写出如下

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = \alpha h s_m^n s_n^m s_i^j \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j. \quad (21)$$

应变也分解为二部与应力相对应

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^j + I_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^j, \quad (22)$$

此处 $I_e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^j$ 。 (23)

是应变的第一不变量。

我们只考虑小变形情况并且虎克定律可以应用,弹塑性本构方程为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = \left[\frac{1}{2G} \dot{s}_j^i + \alpha h s_i^m s_m^n s_n^j \right] \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j. \quad (24)$$

弹性体积变化速度为

$$I_e = \frac{1 - 2\mu}{E} I_\tau, \quad (25)$$

此处 G 和 μ 为剪切模量和波桑比。

附 录

文献[28]介绍了任意的二阶张量 A 的时间导数如下:

$$\dot{A} = [A^j + d_m^i A^m + A^n d_n^i] g_i g_j = [A^j - d_i^m A_{mj} - A_{in} d_j^n] g^i g^j = [A^j + d_m^i A_j^m - A_n^i d_j^n] g g^j \quad (a \sim c)$$

此处 $d_s^i = \frac{1}{2} [\dot{v}^r p^r + \dot{v}^s p^s]$ (d)

是变形速度, $\dot{v}^r p^r$ 是质点速度向量 v 的逆变分量的协变导数。

导数(a)~(c)考虑了基向量的变化,故常称为 Jauhmann 导数或速度,它们与张量系数的导数 $A^j g_i g_j$ 不同,除非基向量是固定不变的。

[参 考 文 献]

- [1] Lee E H. Elastic-plastic deformation at finite strain[J]. ASME Appl Mech, 1969, 36: 1—6.
- [2] Casey J, Naghdi P M. A remark on the use of decomposition $F = F_e F_p$ in plasticity[J]. ASME J Appl Mech, 1980, 47: 672—675.
- [3] Lubarda V A, Lee E H. A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance[J]. J Appl Mech, 1981, 48: 35—40.
- [4] Lee E H, Mallett R L, Wertheimer T B. Stress analysis for kinematic hardening in finite deformation plasticity[J]. J Appl Mech, 1983, 50: 554—.
- [5] Paulum J, Hannover, Bundesrepublik Deutschland. Plastische inkompressibilitat formanderugen[J]. Acta Mech, 1980, 37: 43—51.
- [6] Sidoroff F. Incremental constitutive equation for large strain elasto-plasticity[J]. Int J En gn g Sci, 1982, 20: 19—26.
- [7] Lee E H. Concerning elastic and plastic components of deformation[J]. Int J Solids and Struc, 1980, 16: 715—721.
- [8] Dafalias Y F. Issues on constitutive formulation at elastic-plastic deformation, Part 1: Kinematics [J]. Acta Mech, 1987, 69: 119—138.
- [9] Bammann D J, Johnson G C. On the kinematics of finite deformation plasticity[J]. Acta Mech, 1987, 69: 1—13.
- [10] LIANG Hao-yuan, Lehmann Th. Decomposition of elastic-plastic deformation[J]. S M Archives, 1988, 13: 239—249.
- [11] Lammering R, Pecherski R B, Stein E. Theoretical and computational aspect of large plastic deformations involving strain-induced anisotropy and developing voids[J]. Arch Mech, 1990, 42: 347—375.
- [12] Aravas N, Afrantis E C. On the geometry of slip and spin in finite plastic deformation[J]. Int J Plasticity, 1991, 7: 141—160.
- [13] Obata M, Yashiaki Goto, Sei Matsaura. Micromechanical consideration on the theory of elasto-plasticity at finite deformations[J]. Int J En gn g Sci, 1990, 28: 241—253.
- [14] Lehmann Th. On Large Elasto-Plastic Deformation [M]. A Sawczuk Ed. Leyden: Nordhoff Publ Comp, 1973, 571—585.
- [15] Kondaurov V I, Kukudianov V N. On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic-plastic media with finite demormations

- [J]. Arch Mech, 1979, **31**: 623—647.
- [16] Mandel J, Relations de comportement des milieux elastiques plastiques et elastques viscoplastiques, Notion de repere directeur[A]. In: Sawczuk A Ed. Foundation of Plasticity [C]. Leyden: Noordhoff Intl, 1973.
- [17] Dafalias Y F. The plastic spin[J]. J Appl Mech, 1985, **52**: 865—871.
- [18] Havner K S. The theory of finite plastic deformation of crystalline solids[A]. In: Hopkins H G, Swell M J Eds. The Rodney Hill 60th Anniverssay Volume [C]. Swell Pergamon Press, 1982, 265—302.
- [19] Asaro R J, Crystals plasticity[J]. J Appl Mech, 1983, **50**: 921—934.
- [20] Bammann D J, Aifantis E C. A model for finite deformation plasticity[J]. Acta Mech, 1987, **69**: 97—117.
- [21] Boyce M C, Weber G G, Parks D M. On the kinematics of finite strain in plasticity[J]. J Mech Phys Solids, 1989, **37**: 647—665.
- [22] Aravas N, Aifantis E C. On the geometry of slip and spin in finite plastic deformation[J]. Int J of Plasticity, 1991, **7**: 141—160.
- [23] Gissen E. Micromechanical and thermodynamic aspects of the plastic spin[J]. Int J Plasticity, 1991, **7**: 365—386.
- [24] 王自强. 近代塑性力学发展概况[J]. 力学进展, 1986, **16**: 210—220.
- [25] ZHAO Zu_wu. Theory of Gvozjev and macroscopic glide systems[A]. Proc of the Num eta Int Conf [C]. UK: University College of Swansea, 1985, 543—547.
- [26] Palgen L, Drucker D C. The structure of stress_strain relations in finite elasto_plasticity[J]. Int J Solids Struc, 1983, **19**: 519—531.
- [27] Green A E, Zerba W. Theoretical Elasticity [M]. Clarendon Press, 1, 1954.
- [28] Lehmann Th. General frame for the definition of constitutive law for large non_isothermmic elastic_plastic and elastic_visco_plastic deformation[A]. In: Lehmann Th Ed. The Constitutive in Thermo-plasticity [C]. CISM Udine, 1984, 379—464.

Some Misunderstandings on Rotation of Crystals and Reasonable Plastic Strain Rate

ZHAO Zu_wu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: It is pointed out that crystals are discrete but not continuous materials. Hence the rotation R in decomposition $F = RU$ and spin W in $\dot{F}F^{-1}$ are not correct. Errors will arise in plastic deformation rate if it is directly expressed with amounts of velocity of slips in glide systems such as $\dot{\nu} \neq n$. The geometrical figure of crystal lattices does not change after slips and based on this idea a simple way in mechanics of continuous media to get the plastic deformations rate induced by slips is proposed. Constitutive equations are recommended.

Key words: finite strain; rotation; misunderstanding; polycrystals; plastic deformation rate