应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 01_0104_07

金融衍生产品的力学方法分析(Ⅰ) ——期指价格基本方程*

云天铨

(华南理工大学 工程力学系, 广州 510641)

(我刊编委云天铨来稿)

摘要: 类似连续介质力学方法, 将期指价格变化看成是连续、有规律可寻的• 根据期指特点, 建立期指价格变化的基本方程• 这是一个微分方程, 其解显示时间与价格呈对数圆形关系• 若将时间理解为相应价格的概率, 则这一关系与基于统计理论分析的、著名的诺贝尔经济学奖(1997) 获得者的期权定价 Black_Scholes 公式中主要假设——基础资产(在此为期指) 价格呈对数正态分布——完全一致• 表明了依据完全不同的两种分析方法, 也会得到相同的结果• 只是 Black_Scholes 是用假设给出, 而作者则从微分方程的解推出•

关 键 词: 金融衍生产品; 期货; 股票指数期货(期指) ; Black_Sholes 模型; 微分方程
中图分类号: F224. 9; F830. 9 文献标识码: A

1 研究金融衍生产品的意义和方法

金融衍生产品(Financial Derivatives) 是指传统市场(股市, 债券, 货币等) 的基础资产(如股票, 债券, 外汇, 利率等) 派生出来的金融产品, 如期货(股票期货, 股指期货, 利率期货, 外汇期货等) , 期权(Option) (外汇期权, 利率期权, 指数期权等) 等•

近 20 年, 金融衍生产品以创新多, 发展快, 规模大, 影响广而深为特点• 其创新种类之多超过以往 200 年总和[1]; 其规模之大, 发展之快, 可由下列数据看出: 1973—1982, 期货市场交易额增加 100 倍以上[1], 年交易总额约为 140 万亿美元, 相当于 10 倍七大工业国的国民生产总值(GPD) [1]• 至于影响深远, 由下列例子可见: 投机炒卖期指, 期权在短短几天之内就使具有 233 年历史英国的 Baring 银行损失十亿美元计而导致破产, 从而震惊世界[1]; 国际炒家投机东南亚、香港的外汇, 期指市场[2] 以及亚州、东南亚金融危机等• 这些例子充分显示金融衍生产品对世界经济有着头等重要的意义• 现代的大企业集团• 大银行, 几乎没有不和金融衍生产品打交道的• 由于金融衍生产品交易具有"四高"(高杠杆比, 高风险, 高收益, 高智力角逐) 特点, 因而愈来愈吸引各界(不仅经济, 金融界, 且有数学, 物理界等人士) 精英参与研究和角逐• 纽约华尔街就有许多火箭专家从事投资和研究, 业绩非凡, 成为投资界及学术界神话[2]• 1997 年诺贝尔经济学奖授予 1973 年发表的, 对经济、金融有重要影响, 被誉为" 一条公式引起金融革命"[2] 的期权定价的 Black_Scholes 公式的制定人, 以及推广 Black_Scholes 公式的

* 收稿日期: 1999_10_29; 修订日期: 2000_11_20
作者简介: 云天铨(1936—) , 男, 海南文昌人, 教授, 已发表论文 90 余篇, 专著 2 本.

论文多达几千篇[1], 可见对金融衍生产品的研究已成为世界性的当前和今后的一个热点•

目前, 对金融衍生产品的研究多着重投资策略分析, 而且都基于把基础资产价格变化看成是如同分子布朗运动一样的无规律的随机现象• 应用统计理论来分析• 例如, 期权定价的 Black_Scholes 公式所用模型的主要假设之一是基础资产价格呈对数正态分布[1]• 还未见到有不同于上述观点的论文•

本文作者和上述观点不同, 认为基础资产价格变化以及金融衍生产品的交易活动是有规律可寻的• 从局部或小范围来看, 某时刻某价位的交易也许是"偶然的", "无规律的", "不连续的", 但从大些范围来看, 一个成熟的, 有非常多参与者的市场, 其交易活动变得"连续"和"有规律"• 这如同"微观力学"看分子运动无序, 不连续; 但"连续介质力学"角度来考察, 宏观的物体运动服从一定规律一样, 从偶然到必然, 从无规律的随机现象到有规律可寻• 这种转变的逻辑性, 就成为本文方法可行的逻辑依据•

金融衍生产品, 种类繁多• 其中最基本和重要的, 首推期货和期权• 期货中又以股市指数期货(简称"期指")最吸引• 本文只探讨期指分析, 其它期货交析亦类似• 在第 2 节, 应用作者在文[3~ 4]的方法, 建立期指的基本方程, 为期指走势分析提供依据• 在第 3 节, 讨论基本方程的解• 这是一个微分方程, 其解显示时间与价格呈对数圆形关系• 若将时间的大小比作相应价格出现概率的大小, 则这一关系与 Black_Scholes 模型把基础资产(在此为期指)价格变化呈对数正态分布的假定[1]完全一致• 这表明了两种依据完全不同的分析方法, 分析同一问题也会可能得到相同的结果• 只不过后者用假定方法结合, 而本文则由解微分方程推出•

至于期权则另文探讨•

2　期指的游戏规则, 特点和基本方程的建立

期货交易(Futures Trading)是标准化合约的远期交易• 期指合约是买卖股市指数的远期合约, 期限分当月, 下月及季月等• 股市指数, 如杜琼斯工业平均指数, 标准普尔 500, 日经 225, 香港恒生指数等, 是在股市中抽取一些有代表性股票将其市价按影响加权平均而得到的指标• 期指买卖的游戏规则主要有: 1) 平仓(offset)• 客户买(或卖)了一张合约, 必需在到期日或之前卖(或买)出一张合约, 称为平仓• 2) 买卖期指和平仓交割以现金结算, 盈亏金额等于盈亏指数点数乘每点金额(如香港恒生指数每点为港币 50 元, 标准普尔 500 每点为 500 美元等)• 3) 客户交保证金•

和现货市场(股市)比, 期货市场的游戏规则主要有如下分别: 1) 股市单向性, 期市双向性• 即股市投资者只有在股价上升才能获利; 而期市有双向选择, 看升或看跌, 对的话都可获利, 无需等待上升行情• 2) 股市只准持有股票才能卖出; 而期市可以卖空(先卖出后买回平仓)• 3) 股市需付全数金额才能购买股票, 而期市只需交付交易额的某个百分数的保证金就可进行交易, 即具有高杠杆比率• 4) 中国 A 股实行 T+ 1 制, 即买进的股票次日才能卖出; 而期市实行 T+ 0 制, 当日可买卖多次• 5) 期市到期日必需交割平仓, 而股市的股票可长期持有• 等待合适价格才卖出• 由上可见期市比股市更灵活, 更有效率, 更高风险和更大收益•

游戏规则的差异, 将使期市的基本方程和股市的基本方程有差异• 对于建立买入量和卖出量基本方程, 期市和股市有如下主要分别: 1) 股市从已发生的过往交易记录去预测未来走势; 而期市则由对未来走势的判断直接影响当前的价格• 2) 期市有平仓规定, 未平仓合约数

量变化影响价格升降• 3) 期市有双向选择, 不一定非要上升行情才能获利• 因此, 靠“从势原理”[4] 推动大市上升的作用不明显• 故“从势原理”所影响的项可略去不计•

期市和股市建立基本方程所用的共同的主要假设有: 1) 求供关系决定价格升降• 2) 买入量与价位成反比, 与价位变化率成正比; 卖出量与价位成正比, 与负的价位变化率成正比• 3)“最近时原理”和“从势原理”[3,4] 适用•

为方便阐述期指基本方程的建立, 先回顾股市的买入量和卖出量方程[3]:

$$A_p(t+\Delta t)=p_1v^{-1}(t)+p_2\dot{v}(t)+p_3A_p(t), \tag{1}$$

$$A_s(t+\Delta t)=s_1v(t)-s_2\dot{v}(t)+s_3A_s(t), \tag{2}$$

式中 A 代表量; v, $\dot{v}$ 分别代表股价和股价变化率; t 代表时间, Δt 为时间增量; 下标或字符 p, s 分别代表买入和卖出, $p_1\sim p_3$, $s_1\sim s_3$ 为系数• 1) 式表示 $t+\Delta t$ 时买入量与股价 $v(t)$ 成反比, 与 $\dot{v}(t)$ 成正比, 与 $A_p(t)$ 成正比• 2) 式表示 $t+\Delta t$ 时卖出量与股价成正比, 与 $-\dot{v}(t)$ 成正比, 与 $A_s(t)$ 成正比• 上述式中 Δt 为最小的时间间隔, 显示买入和卖出量仅受最近时间的诸因素影响, 亦即[4] 称之为“最近时原理”• 上述式中的末项代表“从势原理”[4] 的影响•

期指的买入量和卖出量方程

类似(1), (2), 根据期市的特点, 得:

$$A_{fp}(t)=c_1v_f^{-1}(t+\Delta t)+c_2\dot{v}_f(t+\Delta t)+c_3\Delta A_0(t)\dot{v}_f(t+\Delta t), \tag{3}$$

$$A_{fs}(t)=d_1v_f(t+\Delta t)-d_2\dot{v}_f(t+\Delta t)-d_3\Delta A_0(t)\dot{v}_f(t+\Delta t), \tag{4}$$

式中 A, v, $\dot{v}$ 及下标 p, s 的意义与上述同; 为区别股市, 加下标 f 代表期市• (3) 式表示时刻 t 的买入量 $A_{fp}(t)$ 与时刻 $t+\Delta t$ 的价格 $v_f(t+\Delta t)$ 成反比, 与价格变化率 $\dot{v}_f(t+\Delta t)$ 成正比, 与未平仓合约数的变化 $\Delta A_0(t)$ 和 $\dot{v}_f(t+\Delta t)$ 的乘积成正比[5,6]• (4) 式表示时刻 t 的卖出量 $A_{fs}(t)$ 与 $v_f(t+\mathrm{t})$ 成正比, 与 $-\dot{v}_f(t+\Delta t)$ 成正比, 与 $-\Delta A_0(t)$ 和 $\dot{v}_f(t+\Delta t)$ 乘积成正比• $c_1\sim c_3$, $d_1\sim d_3$ 为系数•

和(1), (2) 式不同, (3), (4) 式的左边为时刻 t 的量受右边诸因素在时刻 $t+\Delta t$ 的影响, 表明期市的特点为当前的买入及卖出量受投资者(市场) 对未来时刻走势估计而定, 其中只受 $t+\Delta t$ 时间影响表示“最近时原理” 仍适用• 但(3), (4) 式中没有(1), (2) 式的末项, 表示在此略去“从势原理” 的影响, 而代以未平仓合约(Open interest) 数的变化量 $\Delta A_0(t)$ 与 $\dot{v}_f(t+\Delta t)$ 的乘积• 这是根据期市经验总结有如下特点[5,6]:

1) 在价格上升中(即当前买入量 $A_{fp}(t)$ 增, 且卖出量 $A_{fs}(t)$ 减), 若未平仓合约增量 $\Delta A_0(t)$ 为正($\Delta A_0(t)>0$) 表示看好情绪有涨无退, 后市价格仍可维持一段升势(即 $\dot{v}_f(t+\Delta t)>0$); 若未平仓合约增量为负($\Delta A_0(t)<0$), 表示不敢看好太远, 早一步平仓了结为佳• 后市升势缓减($\dot{v}_f(t+\Delta t)<0$)•

2) 在价格下跌中(即当前买入量 $A_{fp}(t)$ 减, 且卖出量 $A_{fs}(t)$ 增), 若未平仓合约增量 $\Delta A_0(t)$ 为正($\Delta A_0(t)>0$), 表示看淡情绪支配大市, 无需急于平仓, 后市价格继续下跌($\dot{v}_f(t+\Delta t)<0$); 若未平仓合约增量 $\Delta A_0(t)$ 为负($\Delta A_0(t)<0$) 表示看淡减少, 后市价格跌势减缓($\dot{v}_f(t+\Delta t)>0$)•

综合上述经验, 概括表示为(3), (4) 式的末项•

期指价格基本方程

根据求供差决定价格升降的假定, 有

$$\Delta A_f(t)=A_{fp}(t)-A_{fs}(t)=g\cdot \dot{v}_f(t+\Delta t),\tag{5}$$

式中 g 为因数，使(5)式两边量纲相同。(5)式表示现时的求供差决定下一时刻 $t+\Delta t$ 的价格变化率 $\dot{v}_f(t+\Delta t)$。后者定义为

$$\dot{v}_f(t+\Delta t)\equiv[v_f(t+\Delta t)-v_f(t)]/\Delta t\quad(\min \Delta t).\tag{6}$$

至于期指价格 $v_f(t)$ 为

$$v_f(t)=I(t)\cdot a\tag{7}$$

式中 $I(t)$ 为期指的点数，a 为每点的价格。如香港恒生指数 $a=50$ 港元；S&P500 的 $a=500$ 美元等。

将(3)，(4)代入(5)，(6)式并将 $t+\Delta t$ 换记为 t，得

$$K\dot{v}_f(t)=c_1v_f^{-1}(t)-d_1v_f(t),\tag{8}$$

式中

$$K=g-[c_2+d_2+(c_3+d_3)\Delta A_0(t-\Delta t)],\tag{9}$$

其中 $\Delta A_0(t-\Delta t)$ 由市场行情资料(荧屏)给出。(8)式这一微分方程就是期指价格变化的基本方程。

3　基本方程(8)的解和讨论

1. 基本方程(8)的解

令

$$X(t)=A+Bv_f^2(t),\tag{10}$$

式中 A,B 为待定常数。两边求导得

$$\dot{X}(t)=2Bv_f(t)\dot{v}_f(t),\tag{11}$$

式中 $(\dot{\ })=\partial(\quad)/\partial t$。将(11)代入(8)式得，

$$\frac{-K}{2d_1}\dot{X}(t)=\frac{-Bc_1}{d_1}+Bv_f^2(t),\tag{12}$$

和(10)式比较，取 $B=1, A=-c_1/d_1$，则(12)式写成

$$\frac{-K}{2d_1}\dot{X}(t)=X(t)\tag{13}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{X(t)}=-\frac{2d_1}{K}\mathrm{d}t,\tag{14}$$

两边由 0 至 t 积分，得

$$\ln[X(t)/X(0)]=-\frac{2d_1}{K}t\tag{15}$$

或

$$X(t)=X(0)\mathrm{e}^{-(2d_1/K)t},\tag{16}$$

$$v_f^2(t)=\frac{c_1}{d_1}+\left(-\frac{c_1}{d_1}+v_f^2(0)\right)\mathrm{e}^{-(2d_1/K)t}.\tag{17}$$

(15)，或(16)或(17)是微分方程(8)的解，其中 $X(0)$ 或 $v_f(0)$ 由初始条件 $t=0$ 给出。

2. 解的讨论

1) 不同 K 值的影响

由(17)知: $K>0,\quad t\nearrow v_f(t)\searrow$,

$K<0,\quad t\nearrow v_f(t)\nearrow$,

$$K=0,\ v_f(t)=\sqrt{c_1/d_1}=v_f^*\quad 对\ \forall t(\nearrow\infty), \tag{18}$$

称 v_f^* 为“平衡价位”。此时只要 $K=0$ 任何时刻 t 价格 $v_f(t)$ 将保持 v_f^* 不变。而 K 的数值由(9)式知在所有系数 $c_1\sim c_3$, $d_1\sim d_3$, g 为常数时, 取决于 $\Delta A_0(t-\Delta t)$。即荧屏上显示的未平仓合约数的改变量将影响 K 的符号, 也就是影响价格 $v_f(t)$ 的近期走势。这一点在炒卖期指操盘中很有参考价值。

图1和图2分别表示不同坐标时基本方程(8)的解的形态。

2) 基本方程(8)的解与 Black_Sholes 模型假设的关联

本文的解是以确定的函数型式提供, 与“概率”完全无关。但若将 t 看成是相应的解 $X(t)$ 出现的概率, 则(10)式表明 $X(t)$ 出现的概率呈对数分布, 如图2的向右倾斜直线所示。而 $X(t)$ 和价格 $v_f(t)$ 的关系, 由(10), (18)式知

$$X(t)=v_f^2(t)-v_f^{*2} \tag{19}$$

图3表示 $X(t)$ 和 $v_f(t)$ 之间关系。也就是以原点 O 为心, v_f^* 为半径所作的下半圆, 圆上任一点的纵横坐标分别代表 $\sqrt{x(t)}$ 和 $v_f(t)$。这个圆与 $v_f(t)=0$ 对称, 自然基础资产价格 $v_f(t)$ 不会是负的, 只有 $v_f(t)>0$ 部份适合。将(19)式代入(15)式, t 理解为 $v_f(t)$ 出现的概率, 则价格 $v_f(t)$ 出现概率为对数圆形分布。

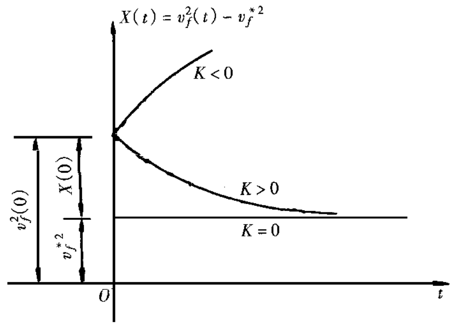

图1 解(16)式的形态图

再来看 Black_Sholes 期权定价公式。这公式讨的是期权, 而不是它的基础资产(在此为期指)。但基础资产价格如何变化对期权定价有影响。在对基础资产(期指)价格如何变化一无所知的情况下, 别无选择, 只能依赖假设。Black_Sholes 模型主要假设之一是: 基础资产价格呈对数正态分布[1]。正态分布又称锤形(吊锤)分布[1], 是工程, 经济, 金融中最重要的一种分布。正态分布有正有负, 但基础资产价格只有正, 为此采用对数正态分布, 它不是以原点为对称而是斜向右边[1]。

由上可见, Black_Sholes 模型的假设和本文基本方程的解在 t 看作是 $v_f(t)$ 出现的概率时二者完全一致。这表明了两种完全不同的途径也会存在某种联系, 会得到相同的结果。不过 Black_Sholes 模型由假设给出结果, 而本文则由微分方程的解推出。

3) 期指价与股指价之间关联

一般情况下期指价与股指现货价的走势大致相同, 价格差别通常小于百分之一[2]。按一般传统看法, 期指价高于股指价, 表示市场对后市看好; 反之, 看淡。

本文的基本方程(8)是最简单的一种, 并未考虑现货价对期货价的影响。若将二者价格用一不等式联系起来, 即

$$|v_f(t)-v(t)|\leqslant\delta, \tag{20}$$

则问题变为解期货和现货相联系的一组微分方程, 且带有不等式, 十分复杂, 不在此讨论。

4) 其它的基本方程

文[3]讨论股市基本方程时，除了买入卖出量方程之外，还有利率一流通量方程，股市利率、股价及股价变化率方程等• 类推，期市也应可建立类似方程• 但由于期市比股市更灵活多变，很难准确估计流入期市的资金流通量，以及投资期市利率• 因而这些方程将更不切实际• 本文不加以讨论•

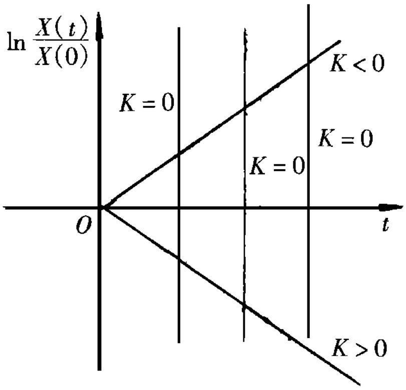

图 2 解(15)式形态图

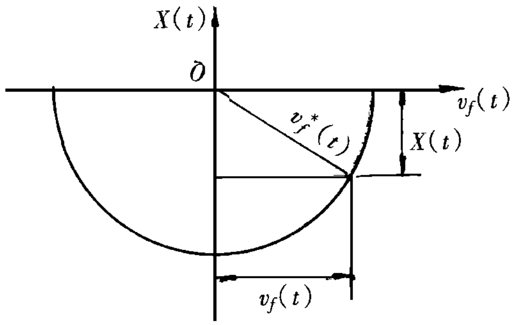

图 3 $X(t)$ 和 $v_f(t)$ 的关系图

5) 基本方程诸系数的确定

基本方程中系数 $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ 和 g 一共七个系数，可用市场资料建立七个方程来定出• 具体做法可参照作者在文[7]中确定5个系数的做法• 为减少系数，也可假定买和卖是相反的交易行为应具有同样系数，即 $c_1 = d_1, c_2 = d_2, c_3 = d_3$• 这样就剩下4个未知系数，由市场最近期的资料建立4个方程就能确定•

[参 考 文 献]

[1] 张光平．霸菱破产与金融衍生产品[M]．新加坡：八方文化企业公司，1996，27，33—95.

[2] 郭宇权．香港金融衍生市场——分析认股证，恒指期货及期权投资策略[M]．香港：明报出版社，1998，5～8，163—170.

[3] 云天铨．计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅰ)——基本方程[J]．应用数学和力学，1999，**20**(2)：145—152.

[4] 云天铨．计算股市的基本方程、理论和原理(Ⅱ)——基本原理[J]．应用数学和力学，1999，**20**(7)：675—681.

[5] 李杰，王文军，刘霞辉，等．期货价格分析[M]．北京：北京工业大学出版社，1994，82—85.

[6] 钱可通．当代投资权威理论[M]．香港：香港出版集团有限公司，1990，281—283.

[7] 云天铨．常规情形的股价短期预测[J]．华南理工大学学报，1997，**25**(5)：47—51.

Analysis of Financial Derivatives by Mechanical Method (Ⅰ)——Basic Equation of Price of Index Futures

YUN Tian_quan
(Department of Mechanics, South China University of Technology,
Guangzhou 510641, P R China)

Abstract: Similar to the method of continuum mechanics, the variation of the price of index futures is viewed to be continuous and regular. According to the characteristic of index futures, a basic equation of price of index futures was established. It is a differential equation, its solution shows that the relation between time and price forms a logarithmic circle. If the time is thought of as the probability of its corresponding price, then such a relation is perfectly coincided with the main assumption of the famous formula of option pricing, based on statistical theory, established by Black and Scholes, winner of 1997 Nobel' prize on economy. In that formula, the probability of price of basic assets (they stand for index futures here) is assummed to be a logarithmic normal distribution. This agreement shows that the same result may be obtained by two analytic methods with different bases. However, the result, given by assumption by Black_Scholes, is derived from the solution of the differential equation.

Key words: financial derivatives; future trading; stock index futures (index futures); Black_Scholes model; differential equation