

文章编号: 1000-0887(2000) 12_1215_12

弯曲圆管内漩涡结构分叉现象的理论研究^{*}

吴望一, 谭文长, 李娟, 谢文俊

(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

(本刊编委吴望一 来稿)

摘要: 利用拓扑结构分析方法, 分析了弯曲圆管内定常流在横截面上流线的奇点个数及分布规律, 给出了二次流的漩涡数目由 2 个变为 4 个, 流态结构发生分叉现象的理论判据。进而, 利用 Galerkin 方法, 得到了弯曲圆管内定常流的流函数和轴向速度的半解析表达式, 给出了流态结构发生分叉现象的临界 Dean 数, 所得结果与理论判则一致。

关键词: 弯曲圆管; 定常流; 分叉; 拓扑结构; Galerkin 方法
中图分类号: O29; TB11 **文献标识码:** A

引 言

弯曲圆管不仅工业上常见, 在生物力学上由于主动脉弓是动脉粥样硬化多发部位而引起研究人员格外重视^[1~3]。由于实际血管的生理特征非常复杂, 弯曲血管中的流动呈现十分复杂的流动图案。Dean^[4,5]在 1927 年首次提出了小曲率、圆形截面的弯曲血管模型, 并揭示了其中存在二次流。近几十年来, 弯曲血管内流动继续受到许多研究者的关注。总的说来, 过去的研究大致分为三种: 理论分析、数值计算和实验研究。理论研究大多采用摄动法和付立叶级数展开法, 近似求解流速的解析表达式, 但这种方法受到小参数的限制^[4~10]。数值计算大多采用有限差分法、有限元法等, 数值地模拟弯管内的流场^[11~15]。实验研究主要对弯管流动的流场进行测量^[16~19]。尽管研究工作取得很大进展, 但由于问题的复杂性, 仍存在不少问题有待进一步深入研究。

近年来, 数值计算和实验研究发现, 随着 Dean 数的增加, 弯曲圆管内定常流的二次流结构发生变化, 漩涡的数目由 2 个变为 4 个, 再变为 6 个等等, 出现流态结构的分叉现象。本文利用拓扑结构分析方法, 分析了弯曲圆管中对称流态的奇点分布和稳定性问题, 给出了二次流的漩涡数由 2 个变为 4 个时流态失稳的理论判则。进而, 采用 Galerkin 方法, 克服了摄动法受小参数的限制, 得到了纯数值方法无法求得的半解析表达式和二次流的漩涡数目由 2 个变为 4 个的临界 Dean 数, 所得结果与理论判则一致。本文的这一结果对进一步研究弯管二次流的分叉现象提供了理论途径。

* 收稿日期: 2000_03_21; 修订日期: 2000_07_11

基金项目: 国家教育部博士点基金资助项目; 高等学校骨干教师资助计划项目

作者简介: 吴望一(1933—), 男, 浙江镇海人, 教授, 博导, 在国内外刊物发表论文 82 篇;

谭文长(1966—), 男, 山东聊城人, 副教授, 已发表论文 20 余篇。

1 数学模型

对常曲率弯曲圆管建立如图 1 所示的圆环坐标系。假定, 1) 流体为不可压缩的均质牛顿流体; 2) 运动是完全发展的定常层流, 即物理量不依赖于 θ 和 t ; 3) 轴向压力梯度 $G = -\frac{1}{R} \cdot$

$\frac{\partial p}{\partial \theta}$ 是个常数值。

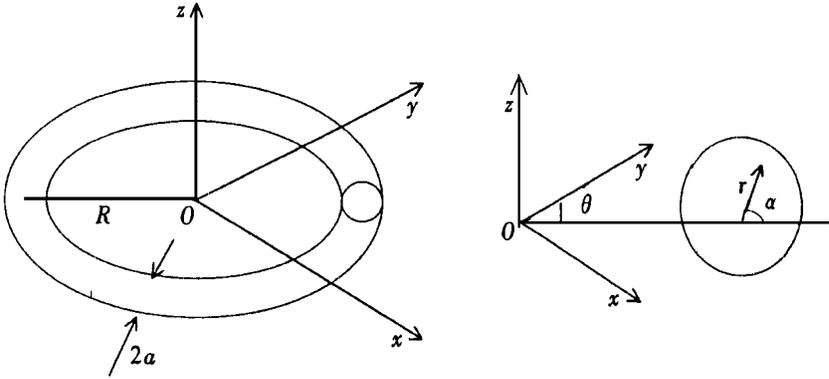


图 1 弯曲圆管流动模型简图

设 u, v, w 分别是 e_r, e_α, e_θ 方向的速度分量, 运动方程为:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{v^2}{r} - \frac{w^2 \cos \alpha}{R + r \cos \alpha} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \left[\frac{\sin \alpha}{R + r \cos \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{uv}{r} + \frac{w^2 \sin \alpha}{R + r \cos \alpha} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \left[\frac{\cos \alpha}{R + r \cos \alpha} + \frac{\partial}{\partial r} \right] \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{uw \cos \alpha}{R + r \cos \alpha} - \frac{vw \sin \alpha}{R + r \cos \alpha} = -\frac{1}{R + r \cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{w \cos \alpha}{R + r \cos \alpha} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w \sin \alpha}{R + r \cos \alpha} \right) \right], \quad (3)$$

这里, ν 是流体的运动学粘性系数, ρ 是流体密度。流体是不可压的, 连续方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\cos \alpha}{R + r \cos \alpha} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\sin \alpha}{R + r \sin \alpha} v = 0 \quad (4)$$

考虑管壁无滑移、无渗透, 边界条件为:

$$u = v = w = 0, \quad r = a \quad (5)$$

弯曲圆管横截面上的流线方程为:

$$\frac{dr}{r d\alpha} = \frac{u}{v} \quad (6)$$

2 弯曲圆管横截面上的流动结构分析

2.1 对称流动时, 对称轴 ($\alpha = 0, \pi$) 上流线的性状

1) 奇点的位置

不妨以 $\alpha = 0$ 时的情况为例来研究这个问题。由对称性:

$$\begin{cases} u(r, \alpha) = u(r, -\alpha), \\ v(r, \alpha) = -v(r, -\alpha). \end{cases} \quad (7)$$

在对称轴 $\alpha = 0$ 附近, 对 $u(r, \alpha)$, $u(r, -\alpha)$ 进行 Taylor 展开:

$$u(r, \alpha) = u(r, 0) + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots, \quad (8)$$

$$u(r, -\alpha) = u(r, 0) - \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} \alpha^2 \dots \quad (9)$$

由对称条件(7), 易得:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3}\right)_{\alpha=0} \alpha^3 + \dots = 0 \quad (10)$$

将(10)代入(8), 得到:

$$\begin{aligned} u(r, \alpha) &= u(r, 0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4}\right)_{\alpha=0} \alpha^4 + \dots = \\ &u(r, 0) + \alpha^2 h(r, \alpha), \end{aligned} \quad (11)$$

式中
$$h(r, \alpha) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4}\right)_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots$$

同理, 利用对称条件(7), 在对称轴 $\alpha = 0$ 附近, $v(r, \alpha)$ 可以表示为:

$$v(r, \alpha) = \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^3}\right)_{\alpha=0} \alpha^3 + \dots = \alpha g(r, \alpha), \quad (12)$$

式中
$$g(r, \alpha) = \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^3}\right)_{\alpha=0} \alpha^2 + \dots$$

把(11)和(12)代入(6), 得到对称轴 $\alpha = 0$ 附近的横截面流线方程:

$$\frac{dr}{r d\alpha} = \frac{u(r, 0) + \alpha^2 h(r, \alpha)}{\alpha g(r, \alpha)}. \quad (13)$$

因此, 某点 $s(r_s, 0)$ 为奇点的充分必要条件是: $u(r_s, 0) = 0$, 即: $u_s = 0$

2) 奇点的结构

在奇点 $s(r_s, 0)$ 的邻域里, 引入: $r = r_s + \xi$, $\alpha = 0 + \eta = \eta$, 这里 ξ, η 为小量. 对称轴 $\alpha = 0$ 附近的流线方程(13) 可以写为:

$$\frac{d\xi}{r d\eta} = \frac{u(r_s + \xi, 0) + \eta^2 h(r_s + \xi, \eta)}{\eta g(r_s + \xi, \eta)}. \quad (14)$$

对 $u(r_s + \xi, 0)$, $h(r_s + \xi, \eta)$, $g(r_s + \xi, \eta)$ 进行 Taylor 展开, 并略去二阶及二阶以上小量, 代入(14) 式, 得到:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s \xi}{\left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right]_s \eta}. \quad (15)$$

奇点 s 的结构由下列特征根 λ_1, λ_2 决定:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s - \lambda & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right]_s - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

即:

$$\lambda_1 = \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_s, \quad \lambda_2 = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right]_s. \quad (17)$$

由连续性方程(4)易得:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = - \left[\frac{u}{r} + \frac{u \cos \alpha}{R + r \cos \alpha} - \frac{v \sin \alpha}{R + r \cos \alpha} \right]_s = 0, \quad (18)$$

即: $\lambda_1 = -\lambda_2$, 因而奇点 $s(r_s, 0)$ 是鞍点. 同理可证: 对称轴 $\alpha = \pi$ 上的奇点 $s(r_s, \pi)$ 也是鞍点.

2.2 管壁 ($r = a$) 附近流线的性状

1) 奇点的位置

在管壁附近, 对速度分量 u, v 进行泰勒展开并利用边界条件得:

$$u(r, \alpha) = (r - a)^2 f(r, \alpha), \quad v(r, \alpha) = (r - a)[g(\alpha) + (r - a)h(r, \alpha)],$$

式中:

$$f(r, \alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right]_{r=a} + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right]_{r=a} (r - a) + \dots, \quad g(\alpha) = \left[\frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r=a},$$

$$h(r, \alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right]_{r=a} + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial r^3} \right]_{r=a} (r - a) + \dots$$

于是, 流线方程(6)在管壁附近可写成如下形式:

$$\frac{dr}{r d\alpha} = \frac{(r - a)f(r, \alpha)}{g(\alpha) + (r - a)h(r, \alpha)}. \quad (19)$$

由此可知, 管壁上某点 $s(a, \alpha_s)$ 为流线方程的奇点的充分必要条件为:

$$g(\alpha_s) = \left[\frac{\partial v}{\partial r} \right]_s = 0,$$

式中下标“s”表示在奇点 $s(a, \alpha_s)$ 处取值.

2) 奇点 $s(a, \alpha_s)$ 是鞍点

在奇点 $s(a, \alpha_s)$ 的邻域里, 令 $r = a + \xi, \alpha = \alpha_s + \eta$ 这里 ξ, η 为小量. 将 $f(a + \xi, \alpha_s + \eta), g(\alpha_s + \eta)$ 及 $h(a + \xi, \alpha_s + \eta)$ 对 ξ, η 泰勒展开并取主要项后(19)式变为:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right]_s \xi}{\left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} \right]_s \eta + \left[\frac{1}{2r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right]_s \xi}.$$

奇点 $s(a, \alpha_s)$ 的结构由特征根

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right]_s, \quad \lambda_2 = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} \right]_s$$

决定, 将连续方程对 r 微分可证 $\lambda_1 = -\lambda_2/2$, 由此立刻得知 $s(a, \alpha_s)$ 是鞍点(由于奇点 $s(a, \alpha_s)$ 位于弯曲血管边界上, 所以实际上它是半鞍点).

3 横截面上的奇点总数的拓扑规律

设 o 是某一封闭曲线 C 上一点(见图2), \vec{q} 是该处的速度向量, 另取一点 o' , 把 \vec{q} 用单位向量 \vec{op} 表示. 当 o 绕 C 逆时针方向移动一周时, p' 在单位圆上移动的圈数, 称为速度向量绕曲线 C 的 Poincaré 指数.

文献[20]中证明: 对于实际流动的任意一个截面, 设 n 是该截面流场的连通度, Γ_0 是其外边界, $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots)$ 是其内边界, Ω 是上述边界围成的区域, $I(C)$ 是绕某闭曲线 C 的

Poincaré 指数, 则该截面流线方程的奇点的总数满足如下拓扑规律^[20]:

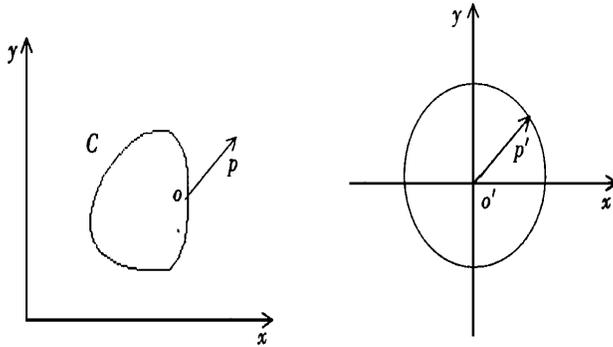


图 2 封闭曲线 C 的 Poincaré 指数的定义

$$\left[\sum N - \sum S \right]_{\Omega} + \frac{1}{2} \left[\sum N' - \sum S' \right]_{\Gamma} = I(\Gamma_0) - \sum_{i=1}^{n-1} I(\Gamma_i), \quad (20)$$

其中: $\sum N$, $\sum S$ 分别是 Ω 内的结点(包括中心点)、鞍点的总数, $\sum N'$, $\sum S'$ 分别是截面轮廓线 $\Gamma = \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_i$ 上的半结点和半鞍点的总数。

由于弯曲圆管的横截面是单连通区域, 即 $n = 1$, 又该截面没有内边界, 所以 $I(\Gamma_i) = 0$ 。另外, 因为横截面外边界 Γ_0 (即 $r = a$) 和流线重合, 所以有 $I(\Gamma_0) = 1$ 。由前面的分析知, 外边界 Γ_0 (即 $r = a$) 上不会出现半结点, 对称轴上也不会出现结点, 因此, 拓扑规律变成:

$$\sum N_e - \sum S_e = 1 + \frac{1}{2} \left[\sum S' \right]_{\Gamma_0} + \left[\sum S \right]_{l_0}, \quad (21)$$

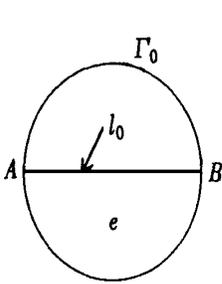


图 3

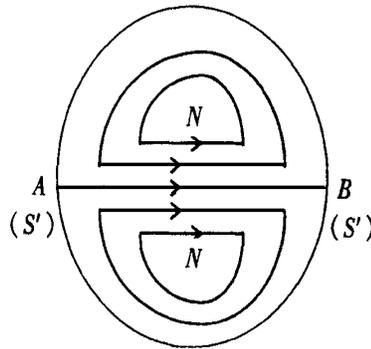


图 4

这里, l_0 为对称轴 $\alpha = 0, \pi$ 除去 A, B 两个端点), e 指区域 $r < a$ 除去 l_0 后的部分(见图 3)。

由实际流动知, 图 3 中 A, B 两点是半鞍点。最简单的情况, 即: Γ_0 上只有 A, B 两个半鞍点, l_0 上没有鞍点, 这时, (21) 式变为: $\sum N_e - \sum S_e = 2$, 又若 $\sum S_e = 0$, 则 $\sum N_e = 2$ 。由流动的对称性, 上、下半圆流场中有且只有一个结点(包括中心点)。由于弯曲圆管中的流体不可压缩, 在相空间中其体积保持不变, 因此是一个保守系统, 不可能存在结点, 所以奇点只可能是中心点。这种最简单的流场结构如图 4 所示。图 4 描述的就是经典的 Dean 氏二次流结构图^[4], 这和前人的计算结果也完全一致^[11~13]。

4 弯曲圆管内流态失稳漩涡结构发生分叉现象的理论判则

根据前面的分析, 如果对称轴 $\alpha = 0, \pi$ 上的流线上出现奇点的话, 那么该奇点必是鞍点。下面对对称轴 $\alpha = 0, \pi$ 上的速度进行分析, 研究对称轴上的奇点个数, 进而得到流态失稳漩涡结构发生分叉现象的理论判则。

由于惯性离心力的作用, 在弯曲圆管的内侧壁 $A(x = -a)$ 处: $u = 0, \partial u / \partial x = 0, \partial^2 u / \partial x^2 > 0$ (见图 5); 外侧壁 $B(x = a)$ 处: $u = 0, \partial u / \partial x = 0, \partial^2 u / \partial x^2 > 0$ (见图 5)。因而沿对称轴 $\alpha = 0, \pi$ 即 $y = 0$ 时, 速度 $u(x, 0)$ 有以下三种分布情况:

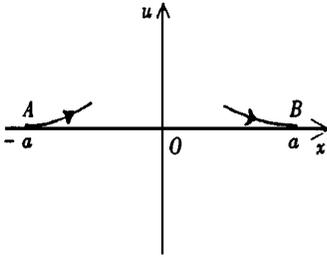


图 5

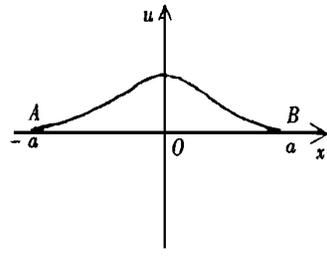


图 6

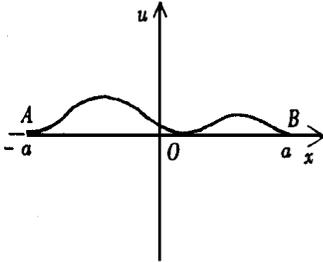


图 7

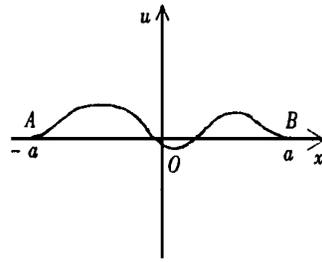


图 8

第一种情况如图 6 所示, 曲线 $u(x, 0)$ 和对称轴 $y = 0$ 在管壁以内没有交点, 即此时对称轴上的流线不出现奇点。

第二种情况如图 7 所示, 曲线 $u(x, 0)$ 和对称轴 $y = 0$ 除管壁外只有一个交点, 即与对称轴相切。在该切点, 下列关系式成立:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

第三种情况如图 8 所示, 在管壁以内有偶数个交点, 即出现多个奇点。

从图 6 到图 8, 系统的拓扑结构发生了本质上的变化。第一种情况, 根据前面的分析, 横截面的上、下半圆流场中有且只有一个结点(包括中心点), 即有两个漩涡的结构。第三种情况, 对称轴上有两个奇点, 管壁 A, B 两点也为奇点, 根据奇点分布规律(21), 若 $\sum S_e = 0$, 则 $\sum N_e = 4$ 。由流动的对称性, 上、下半圆流场中各有两个结点(包括中心点), 二次流变为有 4 个漩涡的结构。第二种情况(图 6) 可看成漩涡结构从 2 个变为 4 个临界状态。所以条件(22) 可视为流态失稳漩涡结构发生分叉的理论判则。

5 Galerkin 方法求解

5.1 流动模型的简化

取圆截面半径 a , $\rho v^2/a^2$ 分别作为长度和压力的特征量, 取 v/a 作为二次流速度 u, v 的特征量, 取 $(v/a) \sqrt{R/2a}$ 作为轴向速度 w 的特征量. 假定截面半径 a 与弯曲血管的曲率半径 R 的比值 $a/R \ll 1$, 则无量纲连续性方程(4) 可以化为简为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \quad (23)$$

引进二次流的流函数 $\Phi(r, \alpha)$, 令:

$$\begin{cases} ru = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \\ v = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases} \quad (24)$$

考虑到 $a/R \ll 1$, 轴向压力梯度 $G = -R^{-1} \cdot \partial p / \partial \theta$ 是个常数值. 无量纲运动方程(1), (2), (3) 可化为:

$$\begin{cases} \Delta^2 w + D = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right], \\ -\Delta^2 \Phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial r} \right] \Delta^2 \Phi + w \left[\frac{\partial w}{\partial r} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\cos \alpha}{r} \right], \end{cases} \quad (25)$$

其中:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2},$$

$$D = \frac{a^2 G}{\mu} \sqrt{\frac{2a^3}{v^3 R}} \text{ 即为 Dean 数.}$$

由(5) 得到 $r = 1$ 处的边界条件为:

$$w = \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad r = 1 \quad (26)$$

引入二次流的涡量 Ω 后, 可将无量纲方程组(23) 及(25) 改写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\Omega, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial w}{\partial r} \right] = -D, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right] = \\ w \left[\sin \alpha \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right]. \end{cases} \quad (27)$$

由于弯管中的定常层流是对称的, 即:

$$\begin{cases} w(r, \alpha) = w(r, -\alpha), \\ \Phi(r, \alpha) = -\Phi(r, -\alpha), \\ \Omega(r, \alpha) = -\Omega(r, -\alpha). \end{cases} \quad (28)$$

这种对称性使得我们将研究范围仅限于 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \alpha \leq \pi$ 的半圆区域, 而且由对称性可得到:

$$\begin{cases} \varphi(r, 0) = \Omega(r, 0) = 0, \\ \varphi(r, \pi) = \Omega(r, \pi) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

方程组(27)在 $r = 0$ 处有奇点, 这个奇点是几何性的, 而不是物理性的, 它是因采用极坐标 (r, α) 而人为出现的. 为此, 在以下研究中采用直角坐标系 (x, y) (见图 9) 是合适的, 此时方程组(27) 转换成:

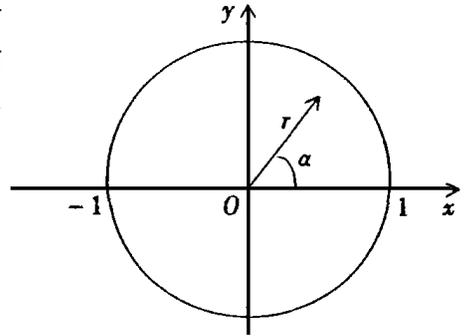


图 9

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\Omega, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] = -D, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] = w \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (30)$$

对称条件(29) 变成:

$$\varphi(x, 0) = \Omega(x, 0) = 0 \quad (31)$$

5.2 利用 Galerkin 方法求解临界 Dean 数

为了利用 Galerkin 方法求解模型(30) 满足(26)、(28)、(31)的解, 先引入以下算子:

$$\begin{cases} \Lambda_1 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + D, \\ \Lambda_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \varphi)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \varphi)}{\partial x} \right] - w \frac{\partial w}{\partial y}, \end{cases} \quad (32)$$

其中 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Λ_1, Λ_2 分别表示作用到 w, φ 的算子, 则方程(30) 变为:

$$\Lambda_1 w = 0, \quad \Lambda_2 \varphi = 0 \quad (33)$$

边界条件(26) 变为:

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (34)$$

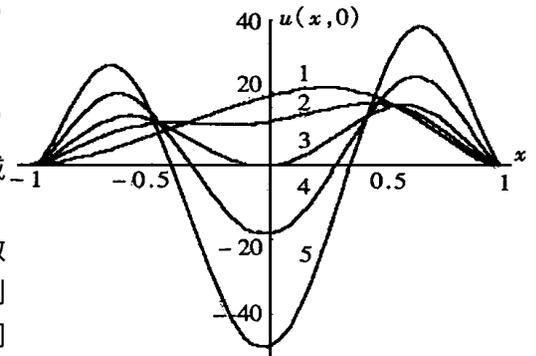
把 $(1 - x^2 - y^2)x^m y^n, m, n = 0, 1, 2, \dots$ 取成轴向速度 w 的基函数序列, 另取: $(1 - x^2 - y^2)^2 x^m y^n, m, n = 0, 1, 2, \dots$ 作为二次流的流函数 φ 的基函数序列. 容易验证这两个基函数序列满足边界条件(34), 而且易证它们都是二维空间内的完全序列, 因此满足 Galerkin 方法对基函数序列的要求.

设 w, φ 分别具有如下形式:

$$w = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (1 - x^2 - y^2) a_{mn} x^m y^n, \quad (35)$$

$$\varphi = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (1 - x^2 - y^2)^2 b_{mn} x^m y^n. \quad (36)$$

将(35)式和(36)式代入(33)式, 取基函数为权函数对(33)式等号两边在横截面上加权积



1: $D = 500$; 2: $D = 1000$; 3: $D = 1376.8$; 4: $D = 2000$; 5: $D = 3000$

图 10 速度 u 沿对称轴 $y = 0$ 的分布

分, 得到待定系数 a_{mn} 、 b_{mn} 代数方程组, 对于任意给定的 Dean 数 D , 上述代数方程组是封闭的, 数值求解后可得 a_{mn} 、 b_{mn} , 从而得到该 Dean 下的轴向速度 w 和流函数 φ 的解析表达式。在实际应用时(35)式和(36)式只能取有限项, 若取 $m+n \leq 1$, $m+n \leq 2$, $m+n \leq 3$, 则分别得到一级、二级、三级近似解。

6 结果与讨论

1) 二次流流函数

利用第 5 节中的方法对 $D = 100, 500, 1000, 1376.9, 2000, 5000$, 等情形进行了三级近似数值计算, 得到了二次流流函数 φ 的等值线图(见图 11)。从图 11 中, 可以发现: 当 Dean 数小于 1376.9 时, 二次流有上下对称的 2 个漩涡, 当 Dean 数大于 1376.9 时, 二次流有上下对称的 4 个漩涡, 流态结构发生了改变, 此点即为二次流由 2 个漩涡到 4 个漩涡临界分叉点。

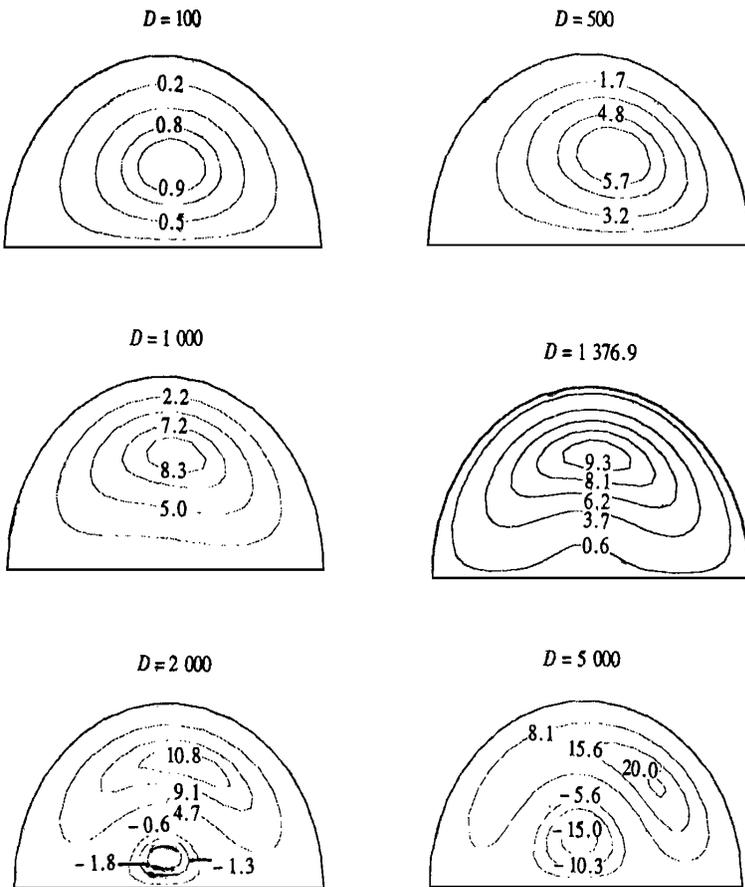


图 11 流函数等值线图

2) 轴向速度

图 12 给出了不同 D 值的轴向速度 w 的等值线图, 可以看到, 随着 Dean 数的增加, w 的最大值越来越远离圆心而靠近外侧壁, 这是惯性离心力作用的结果。特别地, 当 Dean 数增加到一定值时, 内侧壁附近开始出现滞留区, 并随着 Dean 数的增加, 滞留区越来越大, 这对管内流体的传热传质具有较大的影响。

3) 临界 Dean 数

由 $u(x, y) = \partial \varphi / \partial y$, 可以得到 $u(x, 0)$ 。图 10 是不同 Dean 数时, 速度 u 沿对称轴 $y = 0$ 的分布情况。由图 10 看出, 当 $D = 1376.9$ 时, $u(x, 0)$ 曲线和对称轴相切, 在切点处满足判别式(22)式, 此值可视为由 2 个涡到 4 个涡过渡的临界 Dean 数, 即分叉点, 可见本文的计算结果与理论判则完全一致。这个值与 Daskopoulos 等人^[15]用数值方法得到的临界 Dean 数 956 有一定的差距, 部分原因是本文采用 Galerkin 方法对表达式进行了三次截断, 不可避免地存在舍入误差, Daskopoulos 等人采用的是加权残值的配置法, 得到的是数值结果, 数值结果并不是精确解, 同样也不可避免地存在误差。但是, 两者都显示, 超过临界 Dean 数后, 流态变得不稳定, 微小的误差可以引起流态较大的变化, 因而, 从某种意义上说, 两者是基本一致的, 反映了分叉现象的本质。

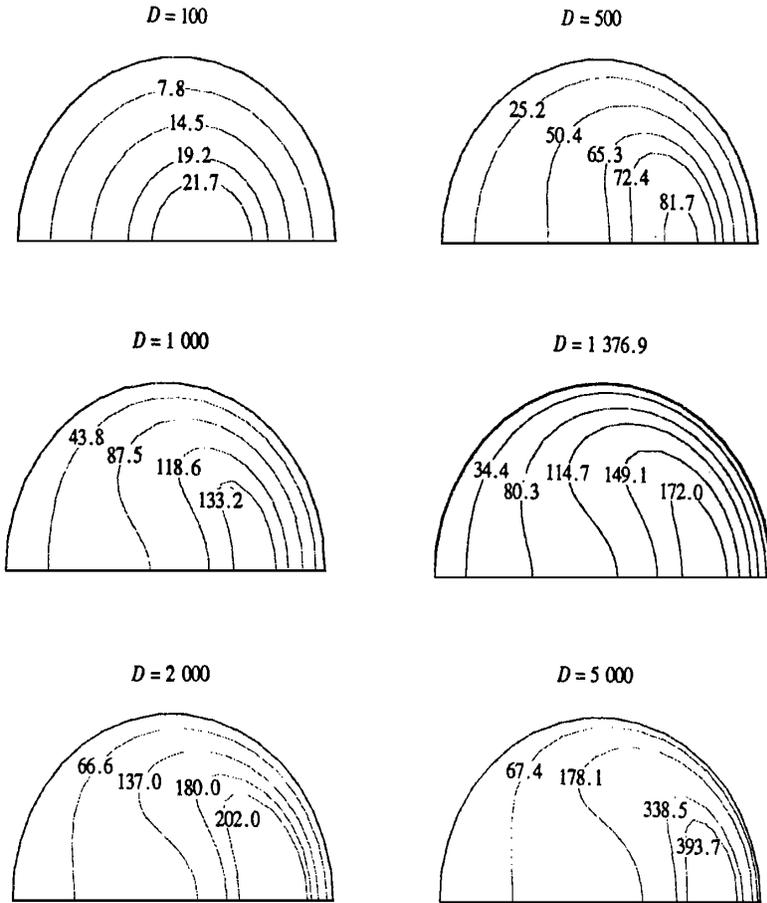


图 12 轴向速度等值线图

4) 管壁剪切力

无量纲化后, 管壁处的轴向剪切力 $\tau(\alpha)$ 可表示成:

$$\tau(\alpha) = - \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=1} \cdot$$

图 13 描述了不同 D 值时, 轴向剪切力 $\tau(\alpha)$ 沿管壁分布的情况。从图中我们可以看出: 同一 D 值时, 外侧壁的轴向剪切力总是大于内侧壁的轴向剪切力, 即: 弯曲血管的外侧壁是高

剪切区, 内侧壁是低剪切区。随着 D 值的增加, 外侧壁的轴向剪切力越来越大, 但是, 当 D 值高过临界值 1 376. 9 时, 内侧壁的轴向剪切力随着 D 值的增加却变得越来越低, 并且, 低剪切区越来越大。

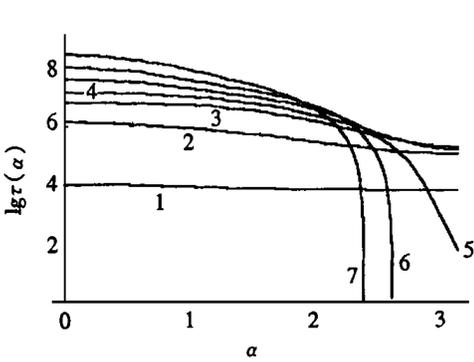


图 13 轴向剪切力沿管壁分布图(曲线 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 分别对应的 Dean 数为 100, 500, 1 000, 1 376. 9, 2 000, 3 000, 5 000)

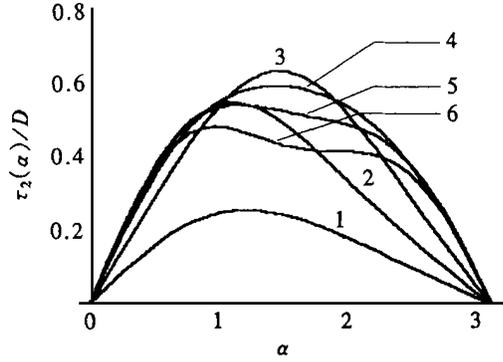


图 14 二次流剪切力沿管壁分布图(曲线 1, 2, 3, 4, 5, 6 分别对应的 Dean 数为 100, 500, 1 000, 2 000, 3 000, 5 000)

此外, 易证: 无量纲化后, 管壁处的二次流剪切力 $\tau_2(\alpha)$ 可写成:

$$\tau_2(\alpha) = -\Omega(1, \alpha)$$

不同 D 值时, 二次流剪切力 $\tau_2(\alpha)$ 沿管壁分布的情况如图 14 所示。可见, 二次流剪切力在管壁的上、下方达到最大值。

7 结 语

总之, 本文利用拓扑结构分析方法, 分析了弯曲圆管内定常流在横截面上流线的奇点个数及分布规律, 进而, 给出了二次流的漩涡数目由 2 个变为 4 个, 流态结构发生分叉现象的理论判据。利用 Galerkin 方法, 成功求解了弯曲圆管内的定常流动, 从而克服了摄动法的小参数局限性, 并得到了纯数值方法无法求得的流函数和轴向速度的半解析表达式, 并且, 计算了流态结构发生分叉现象的临界 Dean 数, 计算结果与理论判则完全一致。这为进一步认识弯曲圆管内流态结构的分叉现象提供了理论途径。

[参 考 文 献]

- [1] Nerem R M. Vascular fluid mechanics, the arterial wall, and atherosclerosis[J]. Transactions of the ASME, 1992, 114(3): 274—285.
- [2] Helmlinger G, Gerger R V, Schreck S, et al. Effects of pulsatile flow on cultured vascular endothelial cell morphology[J]. J Biomechanical Engineering, 1991, 113(2): 123—129.
- [3] 温功碧. 动脉粥样硬化成因和大分子跨血管的性质[J]. 力学进展, 1993, 23(2): 223—238.
- [4] Dean W R. Note on the motion of fluid in a curved pipe[J]. Phil Mag, 1927, 4(2): 208—223.
- [5] Dean W R. The stream line motion of fluid in a curved pipe[J]. Phil Mag, 1928, 5(6): 673—695.
- [6] Smith F T. Pulsatile flow in curved pipe[J]. J Fluid Mech, 1975, 71(1): 15—42.
- [7] Berger S A, Talbot L. Flow in curved pipes[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1983, 15(1): 461—512.
- [8] YANG Zhong_hua, Keller H B. Multiple laminar flow through curved pipes[J]. Applied Numerical Mathematics, 1986, 2(3): 257—271.

- [9] Jayaramen G, Tewari K. Flow in catheterised curved artery[J]. *Medical Bio Eng Com puting*, 1995, **33**(7): 720—724.
- [10] Jayaramen G, Singh M P, Anil Kumar, et al. Reversing flow in the aorta: a theoretical model[J]. *J Biomech*, 1984, **17**(5): 479—490.
- [11] Greenspan G. Secondary flow in a curved tube[J]. *J Fluid Mech*, 1973, **57**(1): 167—176.
- [12] Dennis S C R. Calculation of the steady flow through a curved tube using a new finite_difference method[J]. *J Fluid Mech*, 1980, **99**(3): 449—467.
- [13] Dennis S C R, Michael N G. Dual solutions for steady laminar flow through a curved tube[J]. *Quart J Mech Appl Math*, 1982, **35**(3): 305—324.
- [14] Chang I J, Tarbell J M. Numerical simulation of fully developed sinusoidal and pulsatile flow in curved tubes[J]. *J Fluid Mech*, 1985, **161**(1): 175—198.
- [15] Daskopoulos P, Lenhoff A M. Flow in curved ducts: bifurcation structure for stationary ducts[J]. *J Fluid Mech*, 1989, **203**(1): 125—148.
- [16] Nandakumar K, Masliyah J H. Bifurcation in steady laminar flow through curved tubes[J]. *J Fluid Mech*, 1982, **119**(1): 475—490.
- [17] Shigeru Tada, Shuzo Oshima, Ryuichiro Yamane, et al. Classification of pulsating flow patterns in curved pipes[J]. *J Biomech Eng*, 1996, **118**(3): 311—317.
- [18] Naruse T, Tanishita K. Large curvature effect on pulsatile entrance flow in a curved tube: model experiment simulating blood flow in an aortic arch[J]. *J Biomech Eng*, 1996, **118**(2): 180—186.
- [19] Zabielski L, Mestel A J. Unsteady blood flow in a helically symmetric pipe[J]. *J Fluid Mech*, 1998, **370**(1): 321—345.
- [20] 黎作武, 张涵信. 含激波、漩涡和化学非平衡反应的高超声速复杂流场的数值模拟[D]. 博士学位论文. 北京: 中国空气动力研究与发展中心, 1994.
- [21] Winters K. A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross_section[J]. *J Fluid Mech*, 1987, **180**(1): 343—369.
- [22] Zabielski L, Mestel A J. Steady flow in a helically symmetric pipe[J]. *J Fluid Mech*, 1998, **370**(1): 297—320.

Theoretical Study on the Bifurcation of Vortexes Structure for Flow in Curved Tube

WU Wang_yi, TAN Wen_chang, LI Juan, XIE Wen_jun

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: The number and distribution of the singular points of streamlines in the cross section of steady flow through a curved tube are discussed by using the method of topological structure analysis. And a theoretical criterion is obtained for the bifurcation of flow vortexes for the secondary flow turning from two_vortex structure into four_vortex structure. Furthermore, the critical Dean number for bifurcation and the semi_analytical expressions of stream function and axial velocity are given by using Galerkin technique. The result of calculation is consistent with the theoretical criterion.

Key words: curved tube; steady flow; bifurcation; topological structure; Galerkin technique