

文章编号: 1000_0887(2000) 12_1227_11

流体动力学方程的三维旋涡解的可叠加性*

黄永念, 胡欣

(北京大学 湍流研究国家重点实验室; 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

(本刊编委黄永念来稿)

摘要: 给出了流体动力学方程的轴对称流动的一类精确解, 讨论了一些例子并综述了目前已知的
的基本涡元精确解. 发现三维空间内的某些旋涡解可以叠加成仍然满足非线性方程的新的精确
解. 由此可以用来分析旋涡的产生、演化和相互作用. 此外还讨论了旋涡解的对称性.

关键词: 涡元; 球涡; 柱涡; 可叠加性; 对称性

中图分类号: O351.3 文献标识码: A

引 言

众所周知, 一些非线性动力学方程, 例如 KdV 方程, sine_Gordon 方程, 都有精确的孤立波解. 这种非线性方程的孤立波解的一个非常重要的特性是具有可叠加性, 即该非线性方程具有多个孤立波同时存在的精确解. 我们知道, 流体运动中最常见的运动状态是波和涡. 人们早就发现湍流是由许多大涡和小涡组成. 从理论上讲, 我们已经知道了很多精确的单个旋涡解, 例如, Hill 球涡, Moffatt 球涡, Beltrami 球涡和柱涡, Rankine 涡等, 但流场中多个旋涡解的叠加至今未有人讨论过. 最近, 我们发现定常的欧拉方程或不定常的纳维-斯托克斯方程的某种特殊类型的旋涡解也具有可叠加性. 由于旋涡解一般是三维结构, 它们叠加时的非线性相互作用远比一维和二维情况要复杂得多. 例如, 一个涡球除了它的中心位置以外, 还有一个对称轴的方向或是该涡球中心移动的速度方向. 旋涡的叠加可以包括同心同向的叠加, 同心异向的叠加, 异心同向的叠加和异心异向的叠加四种. 但是, 我们注意到如果将某种特殊的直螺旋涡管解与轴对称的 Beltrami 流动的旋涡解进行同向叠加, 其叠加后的结果仍然是流体动力学方程的精确解. 而且由于 Beltrami 流动本身还具有可叠加性, 因而, 我们可以得到很多接近真实流动的精确解来.

1 一般的三维旋涡解

在文献[1~3]中, 我们已经给出了理想流体的定常 Beltrami 流动的一般解的形式和许多典型的旋涡精确解. 它们满足线性方程

$$\omega_i^* = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} = \alpha u_i^*, \quad (1)$$

* 收稿日期: 1999_09_03; 修订日期: 2000_07_05

基金项目: 国家攀登项目《非线性科学》和《流体与空气动力学关键基础问题研究》资助项目

作者简介: 黄永念(1939—), 男, 上海市人, 教授, 湍流研究国家重点实验室副主任.

其中 ω_i^* 是涡量分量, u_i^* 是速度分量。

我们发现如果将轴对称的 Beltrami 流动解叠加一个同样满足定常欧拉方程的一种特殊的直螺旋涡管解

$$u_i^{(1)} = \frac{2\Omega}{\alpha^2} l_i + \frac{\Omega}{\alpha} \varepsilon_{ijk} l_j x_k, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\Omega^2}{2\alpha^2} [x_n x_n - (x_n l_n)^2] + c_0, \quad (2)$$

其中 l_i 是对称轴的方向余弦, 则同向叠加的

$$u_i = u_i^* + u_i^{(1)}, \quad \omega_i = \alpha u_i - \Omega \varepsilon_{ijk} l_j x_k \quad (3)$$

仍然满足定常欧拉方程。例如, 已被多次提及的 Moffatt 球涡解(见[4])

$$u_i = \Gamma_{in} l_n - \frac{\alpha}{2} G \varepsilon_{ijk} l_j x_k, \quad (4)$$

其中

$$\Gamma_{in} = \frac{1}{2R} \frac{dG}{dR} x_n - \left[G + \frac{R}{2} \frac{dG}{dR} \right] \delta_{in}, \quad (5)$$

$$G = -2 \left[\frac{\Omega}{\alpha^2} + C \left(\frac{\alpha}{R} \right)^{3/2} J_{3/2}(\alpha R) \right]. \quad (6)$$

就是 Beltrami 流动的一阶球涡解与上述螺旋涡管解的叠加。这里给出的函数 G 与通常在文献中表示的流函数 Ψ 之间的关系为

$$\Psi = -\frac{1}{2} GR^2 \sin^2 \theta, \quad (7)$$

这里 $R^2 = x_i x_i$, $R \cos \theta = x_i l_i$ 。

由于 Beltrami 流动本身还具有可叠加性, 我们可以利用文献[3]中给出的 Beltrami 球形涡的一般解构造出一类轴对称流动的精确解。只要把上面的函数 G 表示为

$$G = -2 \left[\frac{\Omega}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\alpha}{R} \right)^{3/2} J_{i+1/2}(\alpha R) \frac{dP_i(\mu)}{d\mu} \right], \quad \mu = \cos \theta \quad (8)$$

即可。Zheligovsky(1993) 也给出了类似的球形涡解^[5]。

我们还发现如果我们在定常 Beltrami 流动解上乘以一个阻尼因子 $e^{-\alpha^2 t}$, 则

$$v_i^* = u_i^* e^{-\alpha^2 t}$$

是不定常纳维-斯托克斯方程的精确解, 即满足方程

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \Delta \omega_i, \quad (9)$$

其中 $\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ 。

把它与上述直螺旋涡管解叠加, 同样可得到仍满足不定常纳维-斯托克斯方程的精确解。例如, 我们可以得到在粘性流体运动中的不定常 Moffatt 球涡, 它的流函数是

$$\Psi = R^2 \sin^2 \theta \left[\frac{\Omega}{\alpha^2} + C \left(\frac{\alpha}{R} \right)^{3/2} J_{3/2}(\alpha R) e^{-\alpha^2 t} \right]. \quad (10)$$

这表明粘性流体中 Moffatt 球涡的球半径随着时间的演化而逐渐减小, 这种球涡是在逐渐收缩的。粘性越大, 收缩得越快。

事实上, Batchelor 在他所著的《流体动力学引论》一书[6]中已经考虑到解的可叠加性。他在假定分别定义为

$$\frac{1}{2} u_{iii} + \frac{p}{\rho} = H, \quad R \sin \theta u_\varphi = C \quad (11)$$

的函数 H 和 C 是流函数 Ψ 的线性函数的特殊情况下, 可将流函数 Ψ 分成两部分. 一部分对应直螺旋涡管解, 也是流函数方程的非齐次特解. 另一部分恰恰对应 Beltrami 流动解, 也是流函数方程的齐次线性方程的通解. 尽管 Batchelor 已提到在轴对称流动时有两个速度分量与两个相应的涡量分量成正比, 但却没有注意到此时第三个速度分量中也包含了与相应的涡量分量成正比的部分, 而且其比例系数均相同, 这恰恰就是前面提到的 Beltrami 流动.

现在我们讨论一些新的例子. 首先, 如果我们将 Beltrami 流动的柱形涡解

$$u_i^* = u_z^* l_i + u_r^* (\delta_{in} - l_i l_n) \frac{x_n}{r} + u_\varphi^* \epsilon_{ijk} l_j \frac{x_k}{r}, \quad (12)$$

其中

$$u_z^* = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r}, \quad u_r^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z}, \quad u_\varphi^* = \frac{\alpha}{r} \Psi^*, \quad (13)$$

$$\Psi^* = \frac{1}{\alpha} A r J_1(\alpha \beta r) \sin(\alpha \sqrt{1 - \beta^2} z), \quad 0 < \beta < 1, \quad (14)$$

$$z = x_i l_i, \quad r^2 = R^2 - z^2, \quad (15)$$

与上述的直螺旋涡管解叠加, 则可以得到一种周期波纹状的螺旋涡管解或周期性轴对称涡球解. 它的流函数为

$$\Psi = \frac{\Omega}{\alpha} r^2 + \frac{A}{\alpha} r J_1(\alpha \beta r) \sin(\alpha \sqrt{1 - \beta^2} z), \quad (16)$$

这种流动可以与孔口出流对应.

其次, 我们考虑一种 Beltrami 流动的特解

$$\Psi^* = A r^2 \cos(\alpha z), \quad (17)$$

则我们有

$$\Psi = r^2 [B + A \cos(\alpha z)]. \quad (18)$$

如果 $A^2 > B^2$, 我们得到一种周期旋涡片流解(见图 1), 而如果 $A^2 < B^2$, 则我们得到一种涡管解(见图 2).

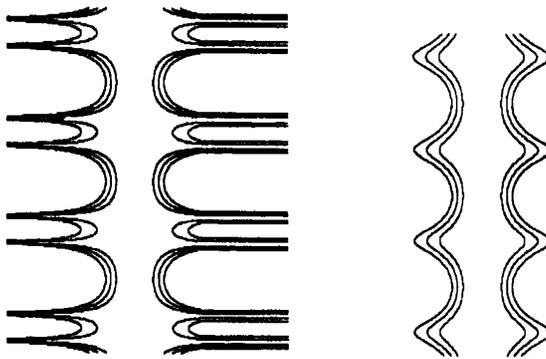


图 1 $A = 15.0, B = 10.0, \alpha = 0.7$ 图 2 $A = 10.0, B = 15.0, \alpha = 0.7$

最后, 我们考虑一种螺旋片流解

$$u_1^{**} = A \sin(\alpha z), \quad u_2^{**} = A \cos(\alpha z), \quad u_3^{**} = 0. \quad (19)$$

因为它是非对称的, 它不能与 $u_i^{(1)}$ 叠加, 但它能与另一种直螺旋涡管流

$$u_i^{(2)} = \frac{\Omega}{\alpha} l_i + \frac{\Omega}{\alpha} \epsilon_{ijk} l_j x_k \quad (20)$$

叠加, 即

$$u_i = u_i^{**} + u_i^{(2)} \quad (21)$$

满足定常欧拉方程。不难验证, 叠加后的这种流动也是一个螺旋涡管解, 只是其横截面是一个椭圆, 其流体质点的轨线方程为

$$x_1 = \left[C - \frac{\alpha A}{2\Omega} \right] \cos\left(\frac{\Omega}{\alpha} t\right), x_2 = \left[C + \frac{\alpha A}{2\Omega} \right] \sin\left(\frac{\Omega}{\alpha} t\right), x_3 = \frac{\Omega}{\alpha^2} t,$$

其中 C 和 A 均为常数。

2 某些基本的涡元

现在已知有很多旋涡的精确解。现在我们将其中最重要的一些用张量形式表示为:

2.1 球涡和涡环

2.1.1 Hill 球涡(无粘流动)

它的速度分量是

$$u_i = U\alpha_{in}l_n = U\left[\xi_i\xi_n + (1 - 2\xi^2)\delta_{in}\right]l_n, \quad (22)$$

这里, $\xi_i = x_i/a$, $\xi^2 = R^2/a^2$, a 是球涡的半径。它的流函数是

$$\Psi = \frac{U}{2a^2}r^2(a^2 - R^2). \quad (23)$$

Syngé 和 Lin 曾用 Hill 球涡作为均匀各向同性湍流的基元(见[7]), 他们的模型是

$$u_i = \alpha_{in}l_n, \quad (24)$$

其中

$$\alpha_{in} = \begin{cases} U\left[\xi_i\xi_n + \left(\frac{5}{3} - 2\xi^2\right)\delta_{in}\right], & r \leq a, \\ U\frac{1}{\xi^3}\left[\xi_i\xi_n - \frac{1}{3}\xi^2\delta_{in}\right], & r > a, \end{cases} \quad (25)$$

涡量分量是

$$\omega_i = \begin{cases} 5\frac{U}{a^2}\varepsilon_{iml}n_l x_k, & r \leq a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad \omega^2 = 50\frac{U^2}{a^4}r^2. \quad (26)$$

2.1.2 Zhou 球涡(Stokes 流动)

周培源和蔡树棠在他们的均匀各向同性湍流的统计理论^[8,9]中, 给出了一个不定常球涡解。它的速度分量为

$$u_i = U\alpha_{in}l_n, \quad (27)$$

其中

$$\alpha_{in} = \frac{1}{2\xi}\frac{dG}{d\xi}\xi_i\xi_n - \left[G + \frac{\xi}{2}\frac{dG}{d\xi}\right]\delta_{in}, \quad (28)$$

$$G = \frac{1}{\xi^3}\int_0^\xi \eta^2 e^{-\eta^2/2} d\eta, \quad \xi^2 = \frac{R^2}{4\mathcal{M}}. \quad (29)$$

它的涡量分量为

$$\omega_i = -\frac{U}{2a^2}e^{-\xi^2/2}\varepsilon_{ijk}l_j x_k, \quad \omega^2 = \frac{U^2}{2a^4}r^2 e^{-\xi^2}. \quad (30)$$

但是他们选取了另一种轴对称旋涡作为湍流元, 他们的模型是

$$u_i = U\beta_{imnl}l_n, \quad (31)$$

其中

$$\beta_{im} = \left(\frac{1}{\xi^2} \frac{dH}{d\xi} - \frac{H}{\xi^3} \right) \xi \xi_m \xi_i + \frac{H \xi}{\xi} \delta_{im} - \left(\frac{H}{\xi} + \frac{1}{2} \frac{dH}{d\xi} \right) (\xi_m \delta_n + \xi_i \delta_m) \quad (32)$$

和
$$H = \frac{1}{\xi^4} \int_0^\xi \eta^4 e^{-\eta^2/2} d\eta \quad (33)$$

它的流量分量为

$$\omega_i = -\frac{U}{a^3} e^{-\xi^2/2} x_n l_n \epsilon_{ip} l_p, \quad \omega^2 = \frac{U^2}{a^4} r^2 z^2 e^{-\xi^2} \quad (34)$$

2.1.3 Batchelor 球涡(均匀旋转和纯剪切流动中)

Batchelor 在他的书[6]中选用的一个球型液滴解是一种球涡,它的速度分量为

$$u_i = \begin{cases} U[(5\xi^2 - 3)e_{io}\xi_o - 2e_{op}\xi\xi_o\xi_p] + \epsilon_{ip}\Omega_o\xi_o, & \xi \leq 1, \\ U\frac{1}{\xi^7}[2\xi^2 e_{io}\xi_o + (3\xi^2 - 5)e_{op}\xi\xi_o\xi_p] + \frac{1}{\xi^2}\epsilon_{ip}\Omega_o\xi_o, & \xi > 1, \end{cases} \quad (35)$$

这里

$$e_{ij} = \frac{a}{U} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (i \neq j), \quad e_{ii} = 0 \quad (36)$$

其流量分量为

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{7U}{2a}\epsilon_{iop}\xi_o e_{pn}\xi_n + \frac{2}{a}\Omega_i, & \xi \leq 1, \\ 0, & \xi > 1. \end{cases} \quad (37)$$

2.1.4 Moffatt 球涡(无粘流动)

这种旋涡在前面已经提到,它的速度分量是

$$u_i = \Gamma_{in} l_n - \frac{\alpha}{2} G \epsilon_{ink} l_n x_k, \quad (38)$$

其中

$$\alpha_{in} = \frac{1}{2R} \frac{dG}{dR} x_i x_n - \left[G + \frac{R}{2} \frac{dG}{dR} \right] \delta_{in}, \quad (39)$$

$$G = -2 \left[\frac{\Omega}{\alpha^2} + c \left(\frac{\alpha}{R} \right)^{3/2} J_{3/2}(\alpha R) \right], \quad (40)$$

这里 c , Ω 和 α 为常数。函数 G 和流函数 Ψ 的关系为

$$\Psi = r^2 \left[\frac{\Omega}{\alpha^2} + c \left(\frac{\alpha}{R} \right)^{3/2} J_{3/2}(\alpha R) \right] = -\frac{1}{2} r^2 G \quad (41)$$

而涡分量是

$$\omega_i = \alpha u_i - \Omega \epsilon_{ink} l_n x_k \quad (42)$$

事实上, Moffatt 球涡是一阶 Beltrami 球涡和直螺旋涡管的叠加。对于二阶 Beltrami 球涡, 可得出一轴对称涡:

$$u_i = U \beta_{ink} l_n l_k + \frac{2}{\alpha} \Omega l_i + \frac{\Omega}{\alpha} \epsilon_{ink} l_n x_k \quad (43)$$

和
$$\omega_i = \alpha U \beta_{ink} l_n l_k + \frac{2}{\alpha} \Omega l_i \quad (44)$$

其流函数为

$$\Psi = \sin^2 \theta \left[R^2 - k \sqrt{\frac{\pi R}{2}} J_{5/2}(R) \cos \theta \right] \quad (45)$$

2.1.5 椭球涡(无粘流动)

最近,我们发现一种椭球涡,它的速度分量为

$$u_i = U \left[\left(1 - c \frac{r^2}{a^2} - 2 \frac{z^2}{a^2} \right) l_i + \frac{x_i x_n}{a^2} l_n \right], \quad (46)$$

而它的涡量分量为

$$\omega_i = (1 + 2c) \frac{U}{a} \varepsilon_{ink} l_n x_k. \quad (47)$$

这里常数 c 决定椭球长短轴的比值。当 $c = 2$ 时,它就是 Hill 球涡。 $c = 0$ 时,它是飓风涡, $c \rightarrow \infty$ 时,它是半径为 a 的盘涡。

其对应的流函数 Ψ 为

$$\Psi = \frac{U}{2a^2} r^2 \left(a^2 - \frac{1}{2} cr^2 - z^2 \right). \quad (48)$$

2.1.6 Helmbolz 涡环

这是一个众所周知的精确解。它的速度分量为

$$u_i = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} l_i - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} (\delta_{in} - l_i l_n) x_n, \quad (49)$$

其中流函数 Ψ 为

$$\Psi = \frac{1}{2} \kappa a r \int_0^\infty e^{-kz} J_1(kr) J_1(ka) dk. \quad (50)$$

它的涡量分量只有一个,即

$$\omega = \omega_\varphi = \begin{cases} \infty, & r = a, \\ 0, & r \neq a. \end{cases} \quad (51)$$

2.2 柱涡和涡管

2.2.1 Rankine 涡

著名的 Rankine 涡的速度分量为

$$u_i = \begin{cases} \frac{U}{a} \varepsilon_{ink} l_n x_k, & r \leq a, \\ \frac{Ua}{r} \varepsilon_{ink} l_n x_k, & r > a. \end{cases} \quad (52)$$

其涡量分量为

$$\omega_i = \begin{cases} 2 \frac{U}{a} l_i, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (53)$$

2.2.2 直螺旋涡管

最近,我们发现一种直螺旋涡管,它的速度分量为

$$u_i = \begin{cases} \frac{U_1}{2a^2} (a^2 - r^2) l_i + \frac{U_2}{2a} \varepsilon_{ink} l_n x_k, & r \leq a, \\ \frac{U_2 a}{2r^2} \varepsilon_{ink} l_n x_k, & r > a. \end{cases} \quad (54)$$

它的涡量分量是

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{U_1}{a} \varepsilon_{ink} l_n x_k + \frac{U_2}{a} l_i, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (55)$$

2.2.3 Lamb-Oseen 涡(粘性流动)

这种涡管的速度和涡量分布为

$$u_i = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1 - e^{-r^2/4\mathcal{M}}) \varepsilon_{nk} l_n x_k, \tag{56}$$

$$\omega_i = \frac{\Gamma}{4\pi \mathcal{M}} e^{-r^2/4\mathcal{M}} l_i. \tag{57}$$

2.2.4 Taylor 涡 (粘性流动)

这种涡管的速度和涡量分布为

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi \mathcal{M}^2} e^{-r^2/4\mathcal{M}} \varepsilon_{nk} l_n x_k, \tag{58}$$

$$\omega_i = \frac{\Gamma}{2\pi \mathcal{M}^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\mathcal{M}} \right) e^{-r^2/4\mathcal{M}} l_i. \tag{59}$$

2.2.5 Bergers 涡 (粘性流动)

上面提到的 Oseen 涡和 Taylor 涡都没有轴向和径向速度分量。有一种 Bergers 涡, 它的速度和涡量分量分别为

$$u_i = 3 \frac{U}{a} \left[l_i l_n - \frac{1}{3} \delta_{in} \right] x_n + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (1 - e^{-U r^2/2\mathcal{M}}) \varepsilon_{nk} l_n x_k + C [b^2 - x_n x_n + (x_n l_n)^2] l_i, \tag{60}$$

$$\omega_i = \frac{\Gamma U}{2\pi \mathcal{M} a} e^{-U r^2/2\mathcal{M}} l_i + 2C \varepsilon_{ijk} x_j x_k. \tag{61}$$

3 旋涡解的叠加

旋涡在很多方面与孤立波不同, 最重要的是在于它的三维特性。每一个旋涡都有一个中心和一个对称轴。因此, 旋涡可以有多种不同方式的叠加。上面我们讨论的是同一位置 (即旋涡的中心位置) 和同一方向 (即旋涡的对称轴方向) 的叠加。我们称同心同向叠加。实际上, 我们还可以进行异心同向 (或反向) 叠加, 同心异向叠加和异心异向叠加。

很容易发现, 前面我们给出的叠加结果还可以推广到异心同向的叠加, 只要将不同中心的旋涡放置在同一条对称轴线上。同向叠加后的解仍然是欧拉方程的精确解。按照孤立波的反散射理论, 孤立波可以有离散 ($\lambda < 0$) 和连续 ($\lambda > 0$) 两种形式的叠加。同样, 这里的旋涡也可以分别进行离散和连续的叠加。它们分别是

$$u_i(x_k) = u_i^{(1)}(x_k) + \sum_{j=1}^n c_j u_i^*(x_k + d_j l_k) \tag{62}$$

和
$$u_i(x_j) = u_i^{(1)}(x_j) + \int_{-\infty}^{\infty} f(k) u_i^*(x_j + k l_j) dk. \tag{63}$$

其中 u_i^* 为 Beltrami 流轴对称涡解。我们可以通过选取不同强度的旋涡进行叠加来分析旋涡的相互作用的演化规律。这里, 我们只考虑一种特殊的情况, 即一个直螺旋涡管和两个一阶 Beltrami 球涡的叠加。例如, 我们考虑不定常 N-S 方程的一个精确特解

$$u_i(x_j) = u_i^{(1)}(x_j) + k_1 u_i^*(x_j + d_l j) + k_2 u_i^*(x_j - d_l j), \tag{64}$$

其中 u_i^* 和 u_i^{**} 为一阶 Beltrami 流球涡。

图 3 到图 8 给出了一些计算机的计算结果, 其中包括同向和反向叠加。计算结果发现, 随着旋涡强度的变化, 流场会出现很复杂的大范围分岔现象, 其中包括封闭涡丝和涡环的产生和破坏。

如果考虑同心异向的叠加, 也会发现一些有趣的现象。这里, 我们以 Beltrami 流动为例,

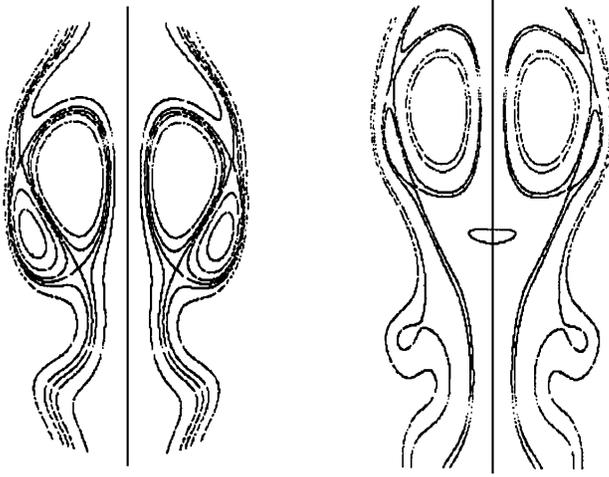


图 3 $k_1 = 10, k_2 = 30, d = 3.0$ 图 4 $k_1 = 10, k_2 = 30, d = 6.3$

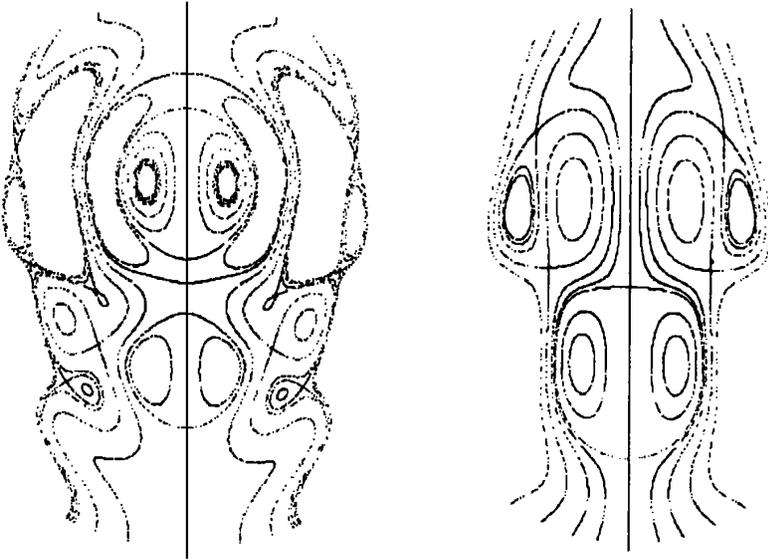


图 5 $k_1 = -30, k_2 = 80, d = 6.0$ 图 6 $k_1 = -30, k_2 = 30, d = 4.0$

根据我们以前的分析(见[10]), n 阶 Beltrami 球涡的速度分量可以写成

$$u_i^* = \beta_{imn \dots rslmnl \dots lds}, \tag{65}$$

这里 $\beta_{imn \dots rs}(x_j)$ 是各向同性张量, 它满足连续方程并与方向无关。显然, 所有奇阶球涡都有一个特性是两个反向同阶球涡叠加后完全抵消掉。

偶阶球涡也有下面的特性。设 l_i, m_i, n_i 为三维直角坐标系的三个坐标轴方向的单位矢量。可以很容易证明,

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij}, \tag{66}$$

$$\begin{aligned} & (l_j + m_j + n_j)(l_k + m_k + n_k)(l_p + m_p + n_p)(l_q + m_q + n_q) + \\ & (l_j + m_j - n_j)(l_k + m_k - n_k)(l_p + m_p - n_p)(l_q + m_q - n_q) + \\ & (l_j - m_j + n_j)(l_k - m_k + n_k)(l_p - m_p + n_p)(l_q - m_q + n_q) + \\ & (l_j - m_j - n_j)(l_k - m_k - n_k)(l_p - m_p - n_p)(l_q - m_q - n_q) = \end{aligned}$$

$$4(\zeta_k \zeta_p + \zeta_p \zeta_{kq} + \zeta_q \zeta_p) - 8(l_j l_k l_p l_q + m_j m_k m_p m_q + n_j n_k n_p n_q) \quad (67)$$

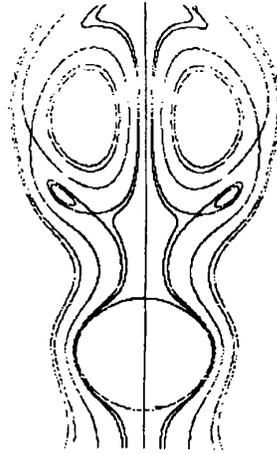
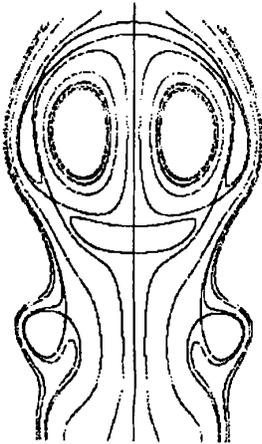


图7 $k_1 = 10, k_2 = 36, 28, d = 6.0$ 图8 $k_1 = -10, k_2 = 30, d = 6.0$

和

$$\begin{aligned} & (l_j + m_j)(l_k + m_k)(l_p + m_p)(l_q + m_q) + (l_j - m_j)(l_k - m_k)(l_p - m_p)(l_q - m_q) + \\ & (m_j + n_j)(m_k + n_k)(m_p + n_p)(m_q + n_q) + \\ & (m_j - n_j)(m_k - n_k)(m_p - n_p)(m_q - n_q) + \\ & (n_j + l_j)(n_k + l_k)(n_p + l_p)(n_q + l_q) + (n_j - l_j)(n_k - l_k)(n_p - l_p)(n_q - l_q) = \\ & 2(\zeta_k \zeta_p + \zeta_p \zeta_{kq} + \zeta_q \zeta_p) - 2(l_j l_k l_p l_q + m_j m_k m_p m_q + n_j n_k n_p n_q) \cdot \end{aligned} \quad (68)$$

因此, 对于二阶和四阶球涡我们有

$$u_{1i}^* + u_{2i}^* + u_{3i}^* = \beta_{jk} l_j l_k + \beta_{jk} m_j m_k + \beta_{jk} n_j n_k \equiv 0, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & u_{1i}^* + u_{2i}^* + u_{3i}^* + u_{4i}^* + 8u_{5i}^* + 8u_{6i}^* + 8u_{7i}^* = \\ & \beta_{jkpq}(l_j + m_j + n_j)(l_k + m_k + n_k)(l_p + m_p + n_p)(l_q + m_q + n_q) + \\ & \beta_{jkpq}(l_j + m_j - n_j)(l_k + m_k - n_k)(l_p + m_p - n_p)(l_q + m_q - n_q) + \\ & \beta_{jkpq}(l_j - m_j + n_j)(l_k - m_k + n_k)(l_p - m_p + n_p)(l_q - m_q + n_q) + \\ & \beta_{jkpq}(l_j - m_j - n_j)(l_k - m_k - n_k)(l_p - m_p - n_p)(l_q - m_q - n_q) + \\ & 8\beta_{jkpq} l_j l_k l_p l_q + 8\beta_{jkpq} m_j m_k m_p m_q + 8\beta_{jkpq} n_j n_k n_p n_q = \\ & 4\beta_{jjpp} + 4\beta_{jjkk} + 4\beta_{jjll} \equiv 0, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} & u_{1i}^* + u_{2i}^* + u_{3i}^* + u_{4i}^* + u_{5i}^* + u_{6i}^* + 2u_{7i}^* + 2u_{8i}^* + 2u_{9i}^* = \\ & \beta_{jkpq}(l_j + m_j)(l_k + m_k)(l_p + m_p)(l_q + m_q) + \\ & \beta_{jkpq}(l_j - m_j)(l_k - m_k)(l_p - m_p)(l_q - m_q) + \\ & \beta_{jkpq}(m_j + n_j)(m_k + n_k)(m_p + n_p)(m_q + n_q) + \\ & \beta_{jkpq}(m_j - n_j)(m_k - n_k)(m_p - n_p)(m_q - n_q) + \\ & \beta_{jkpq}(n_j + l_j)(n_k + l_k)(n_p + l_p)(n_q + l_q) + \\ & \beta_{jkpq}(n_j - l_j)(n_k - l_k)(n_p - l_p)(n_q - l_q) + \\ & 2\beta_{jkpq} l_j l_k l_p l_q + 2\beta_{jkpq} m_j m_k m_p m_q + 2\beta_{jkpq} n_j n_k n_p n_q = \\ & 2\beta_{jjpp} + 2\beta_{jjkk} + 2\beta_{jjll} \equiv 0 \end{aligned} \quad (71)$$

这表明几个同阶不同方向的旋涡叠加后完全抵消了。这个结论对任意偶次阶球涡都成立。

4 旋涡解的对称性

刚才我们讨论的这些旋涡解都是轴对称旋涡,但是在实际的流动状态中,旋涡往往是非轴对称的。这些非轴对称的旋涡的速度分量一般可以写成

$$u_i = \gamma_{i n_0 \dots q r \dots s t \dots w} l_p l_o \dots l_q m_r \dots m_s n_t \dots n_w n_v \cdot \quad (72)$$

现在仍以 Beltrami 流动为例。一阶球涡显然是轴对称的。但是二阶和高阶球涡可以有很多种不同的结构。例如,二阶球涡除了上面提到的轴对称球涡以外,还有两种非轴对称的球涡。它们是

$$u_i = \beta_{i q} l_o m_p, \quad (73)$$

和
$$u_i = \beta_{i q} m_o l_p. \quad (74)$$

它们之间互相镜面对称。容易证明这两种球涡叠加后的结果与文献[3]中提到的两个互相垂直的轴对称球涡在强度比 $B = 0.5$ 时的叠加结果相同。因为我们有

$$l_o m_p + m_o l_p = (l_o + m_o)(l_p + m_p) + n_o n_p - \delta_{q p} \quad (75)$$

和
$$\beta_{i p} = 0. \quad (76)$$

我们注意到周培源和蔡树棠曾指出^[9],二阶球涡(它们象 Beltrami 流动和 Stokes 流动那样满足线性微分方程)能通过对一阶球涡的微分来得到,

$$\beta_{i q} = \frac{\partial \alpha_{i o}}{\partial x_p}, \quad (77)$$

和
$$u_i = \beta_{i q} l_o m_p. \quad (78)$$

通常的 n 阶球涡可以通过 $n - 1$ 次偏微分

$$\gamma_{i n_0 \dots q r \dots w} = \frac{\partial^{n-1} \alpha_{i n}}{\partial x_o \dots \partial x_v} \quad (79)$$

和乘以 n 个不同的方向单位矢量 $l_p, m_p,$ 或 n_p 来得到。

容易发现 n 个不同的单位矢量 l_p, m_p, n_p 可以构成一个 n 阶张量的对称群。这个对称群总数为 3^n ,但是其中有许多是完全互相等价的,例如,三阶球涡有 27 个不同的形式,其中只有 5 个是不同的。它们是

$$\beta_{i q} q l_o l_p l_q, \beta_{i p} q l_o l_p m_q, \beta_{i p} q l_o l_p m_q, \beta_{i q} q l_o n_p n_q, \beta_{i q} q l_o m_p n_q.$$

证明如下。如果我们转动坐标轴,使 l_p 变为 m_p 或 n_p ,我们有下面的等价关系式

$$l_o l_p l_q \Leftrightarrow m_o m_p m_q \Leftrightarrow n_o n_p n_q, \quad l_o l_p m_q \Leftrightarrow m_o m_p n_q \Leftrightarrow n_o n_p l_q, \quad (80)$$

$$l_o m_p l_q \Leftrightarrow m_o n_p m_q \Leftrightarrow n_o l_p n_q, \quad l_o l_p n_q \Leftrightarrow m_o m_p l_q \Leftrightarrow n_o n_p m_q, \quad (81)$$

$$l_o n_p l_q \Leftrightarrow m_o l_p m_q \Leftrightarrow n_o m_p n_q, \quad l_o m_p m_q \Leftrightarrow m_o n_p n_q \Leftrightarrow n_o l_p l_q, \quad (82)$$

$$l_o n_p n_q \Leftrightarrow m_o l_p l_q \Leftrightarrow n_o m_p m_q, \quad l_o m_p n_q \Leftrightarrow m_o n_p l_q \Leftrightarrow n_o l_p m_q, \quad (83)$$

$$l_o n_p m_q \Leftrightarrow m_o l_p n_q \Leftrightarrow n_o m_p l_q. \quad (84)$$

再进一步,我们固定方向 l_p , 并让 m_p 变为 n_p , 我们就有

$$l_o l_p m_q \Leftrightarrow l_o l_p n_q. \quad (85)$$

然后,我们注意到张量 $\beta_{i o p q}$ 的下标 p 和 q 是对称的,我们还有等价关系式

$$l_o l_p m_q \Leftrightarrow l_o m_p l_q, \quad l_o l_p n_q \Leftrightarrow l_o n_p l_q, \quad l_o m_p n_q \Leftrightarrow l_o n_p m_q. \quad (86)$$

这样,我们只有 5 个不同的旋涡。证明完毕。

还有一个非常有趣的现象是这些不对称的旋涡的叠加不仅能得到对称的同阶旋涡解,而

且还能得到低阶旋涡解, 甚至能互相完全抵消。例如, 我们发现

$$\beta_{opql}d_p l_q + \beta_{opql}a_n p m q + \beta_{opql}o_n p n q = \beta_{opp}l_o = \Delta(\alpha_o l_o) = -\alpha^2 \alpha_d o, \quad (87)$$

$$\beta_{opql}d_p l_q + \beta_{opq}m_o m p l_q + \beta_{opq}n_o n p l_q = \beta_{ppq}l_q \equiv 0 \quad (88)$$

显然, 这种叠加属于同心异向的叠加。有关旋涡解的分岔和演化我们将在另文中给出。

[参 考 文 献]

[1] SHI Chang_chun, HUANG Yong_nian. Some properties of three-dimensional Beltrami flows[J]. Acta Mechanica Sinica, 1991, 7(4): 290—294.

[2] SHI Chang_chun, HUANG Yong_nian, CHEN Yao_song. On the Beltrami flows[J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, 8(4): 289—294.

[3] 黄永念, 是长春, 朱照宣, 等. Lagrange 湍流与 Beltrami 流动[A]. 见: 中国力学学会办公室编. 现代流体力学进展 II [C]. 北京: 科学出版社, 1993, 1—15.

[4] Moffatt H K. The degree of knottedness of tangled vortex lines[J]. J Fluid Mech, 1969, 35: 117—129.

[5] Zeligovsky V A. A kinematic magnetic dynamo sustained by a Beltrami flow in a sphere[J]. Geophys Astrophys Fluid Dynamics, 1993, 73: 217—254.

[6] Batchlor G K. An Introduction to Fluid Dynamics[M]. London: Cambridge University Press, 1967, 543—550.

[7] Synge J L, Lin C C. On a statistical model of isotropic turbulence[J]. Trans Roy Soc Canad, 3 Ser Sec 3, 1943, 37: 1—35.

[8] 周培源, 蔡树棠. 涡球在粘性流体中的运动[J]. 北京大学学报, 1956, 1(1): 39—49.

[9] 周培源, 蔡树棠. 均匀各向同性湍流在后期衰变时的涡性结构[J]. 力学学报, 1957, 1(1): 3—14

[10] 黄永念, 周培源. Navier-Stokes 方程的求解和均匀各向同性湍流理论[J]. 中国科学, 1981, (7, 8): 825—836, 953—964.

Superposition About the 3D Vortex Solutions of the Fluid Dynamic Equation

HUANG Yong_nian, HU Xin

(Department of Mechanics and Engineering Science & State Key Laboratory for Turbulence Research, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: A class of exact general solutions of an axisymmetric flow of the fluid dynamic equations is given. Then some examples are discussed. Some vortex solutions can be superposed to give other exact solutions. It can be used to analyse the generation and evolution of the vortex ring.

Key words: vortex elements; spherical vortices; cylindrical vortices; superposition; symmetry