

文章编号: 1000\_0887(2000) 12\_1238\_09

# 非传播孤立波及其相互作用的数值模拟<sup>\*</sup>

周显初, 芮

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

(本刊编委周显初来稿)

摘要: 通过数值求解由 Miles 导出的目前公认的的非传播孤立波的控制方程——一个带复共轭项的非线性立方 Schrödinger 方程, 对非传播孤立波进行研究. 讨论了 Miles 方程中的线性阻尼系数  $\alpha$  的值, 计算表明, 线性阻尼  $\alpha$  对形成稳定的非传播孤立波影响很大, Laedke 等人关于非传播孤立波的稳定性条件只是一个必要条件, 而不是充分条件. 模拟了两个非传播孤立波的相互作用, 数值模拟表明, 两个波的作用模式依赖于系统的参数, 对不同的初始扰动及其演化的计算表明, 只有适当的初始扰动才能形成单个稳定的非传播孤立波, 否则扰动可能消失或发展成多个孤立波.

关键词: 孤立波; 非传播孤立波; 立方 Schrödinger 方程; 数值模拟  
中图分类号: O353.1 文献标识码: A

## 引 言

非传播孤波是南京大学赴美的访问学者吴君汝<sup>[1]</sup>博士于 1984 年发现的. 他将一个狭长的注入 2 cm 深水的水槽水平放置在一个扬声器上进行铅垂或水平的横向振动, 当振动频率约为液体固有频率的两倍时, 调节驱动振幅, 就可在水槽中得到一种不传播的孤立水波.

自从吴君汝首次报道非传播孤立波以来, 人们做了许多理论和实验研究工作以求解释和探索这一独特的孤立波现象. 1984 年, Larraza 和 Putteman<sup>[2]</sup>用多重尺度法从水波的基本方程出发导出了一个立方 Schrödinger 方程, 得到了非传播孤立波解. 同时, Miles<sup>[3]</sup>用变分法对非传播孤立波作了更为完善的理论分析. 他得到了与孤立波波幅成正比的复函数  $r$  所满足的带共轭项的非线性立方 Schrödinger 方程:

$$i(r_t + \alpha r) + Br_{xx} + (\beta + A|r|^2)r + \bar{r}^* = 0, \quad (1)$$

其中,  $r^*$  为  $r$  的复共轭;  $\alpha$  为线性阻尼;  $A, B$  是与系统几何特征有关的参数;  $\beta, \gamma$  与外驱动振幅和频率有关. Miles 的方程(1) 是目前为大多数人所接受的非传播孤立波的控制方程, 较好地描述了非传播孤立波的物理模型. 他考虑了系统强迫振动, 在方程中引入了代表振动激励的共轭项  $\bar{r}^*$ , 意味着系统通过外驱动不断有能量加入. 他还引入了一个耗散项  $i\alpha r$  与振动激励相平衡, 这样才能获得稳定的解, 事实上真实的物理系统中也必然存在耗散.

德国人 Laedke<sup>[4]</sup>等针对 Miles 方程(1), 考虑了小扰动的线性稳定性, 在不同的参数区对其

\* 收稿日期: 2000\_01\_03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572071); 国家基础性研究重大项目《非线性科学》资助项目

作者简介: 周显初(1939—), 男, 浙江奉化人, 研究员.

孤立波解的稳定性作了分析并做了一些数值验算工作。他们发现在某些参数下可以得到稳定的孤立波的解,但在很多情况下,该方程的孤立波解会发展成别的波动而不再是孤立波。

我国在非传播孤立波方面也作了不少工作。南京大学声学研究所魏荣爵院士为首,主要从事非传播孤立波的理论 and 实验研究。他们对孤立波波高的混沌状态<sup>[5]</sup>和两层流体<sup>[6]</sup>及颗粒物质中的非传播孤立波<sup>[7]</sup>进行了深入的研究。崔洪农<sup>[8,9]</sup>等人对非传播孤立波进行了实验研究。周显初<sup>[10,11]</sup>等人仔细考虑了表面张力对非传播孤立波的影响。颜家壬等人用多重尺度法研究了两层流体中的非传播孤立波<sup>[12]</sup>,并对两个非传播孤立波的相互作用作过分析<sup>[13]</sup>。

综上所述,目前对非传播孤立波的研究还主要集中在实验研究和理论的定性解释上。数值模拟方面还没有找到公开的文献报道。在理论方面,目前对两个非传播孤立波的相互作用还不能作出较为满意的解释。在数值模拟方面,带共轭项的非线性立方 Schrödinger 方程的数值求解是比较困难的。周显初等人<sup>[14]</sup>曾对带共轭项的非线性立方 Schrödinger 方程作过数值计算,他们用实验中能出现稳定的非传播孤立波的物理参数,把理论分析不能确定的线性阻尼  $\alpha$  当作 0,以其孤立波解作为初始条件,发现它们的解不稳定。因此,对非传播孤立波进行数值模拟是非常必要的。

本文从 Miles 的理论出发,数值求解 Miles 的非线性立方 Schrödinger 方程(1),对非传播孤立波进行数值模拟。为了能计算出稳定的非传播孤立波,摸索了耗散项系数  $\alpha$  的值;模拟了两个非传播传播孤立波的相互作用的三种模式;对初始扰动与非传播孤立波的关系进行了计算和分析。

## 1 建立数值模型

如前面所说,我们以 Miles 理论作为物理模型,对方程(1)进行数值求解,对非传播孤立波进行数值模拟。其初始条件和边界条件如下:

$$r(X, 0) = r_0(X), \quad (2)$$

$$r_X(-l, \tau) = 0, \quad (3)$$

$$r_X(l, \tau) = 0. \quad (4)$$

我们采用这样的求解思想:对空间变量用有限差分算法,而对时间变量作积分运算,相当于把原先的偏微分方程化为对时间变量的全微分方程,空间微分以离散差分代替。复函数方程化为实函数方程,最后求解的方程组为:

$$\frac{dq_j}{d\tau} = (\gamma - \beta)q_j - \alpha q_j - B \frac{q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j}{\Delta x^2} - Aq_j(p_j^2 + q_j^2), \quad (5)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = (\gamma + \beta)p_j - \alpha p_j + B \frac{p_{j+1} + p_{j-1} - 2p_j}{\Delta x^2} + Ap_j(p_j^2 + q_j^2), \quad (6)$$

$(j = 1, 2, 3, \dots, N)$

这里空间微分  $p_{XX}$  和  $q_{XX}$  由其二阶差分式替换。 $\Delta x$  为空间(水槽纵向)网格步长; $N-1$  为网格总数。对时间变量  $\tau$  进行积分运算,就可以求解方程组(5)、(6)。采用变步长的 Gill 方法进行积分,该方法有消除每一步积累的误差的作用,精度较高。

## 2 数值结果及其分析

### 2.1 耗散项系数 $\alpha$ 的摸索计算

耗散项是 Miles 方程中一个很关键的项,对解的稳定性有着重要的影响。但物理上事先无法确定耗散项系数  $\alpha$  的值,只能人为给定。为了得到稳定的解,  $\alpha$  可取什么值, 稳定解与  $\alpha$  的值有没有关系, 物理上如何才能确定, 这些依然是有待解决的问题。所以我们对  $\alpha$  的取值与数值解的关系很感兴趣。

首先我们取参数  $A = 1.0$ ;  $B = 1.0$ ,  $\gamma = 1.1$ ,  $\beta = -1.0$ ; 初始给定一个非传播孤立波,  $\alpha$  的值做人为的变动。计算结果表明, 当初始给定单个非传播孤立波, 要想最后获得稳定的非传播孤立波解,  $\alpha$  不能随便取值, 而存在一个上下限, 对于上述参数, 只有当  $0.46 \leq \alpha \leq 1.09$  时, 系统才能维持稳定的非传播孤立波解。

Laedke 等人在  $A = B = 1$  的前提下对 Miles 方程作稳定性分析, 得到一个稳定性条件:

$$\beta < 0, \alpha^2 < \gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2. \quad (7)$$

(7) 式可改写为:

$$\gamma^2 - \beta^2 < \alpha^2 < \gamma^2. \quad (8)$$

在这个计算模型中,  $\beta = -1.0$ ,  $\gamma = 1.1$ , 代入不等式(8),  $0.458 < \alpha < 1.10$  满足 Laedke 等人的稳定性条件。显然, 我们的结果与文献[4] 的线性小扰动的理论分析相符。我们又对一个实际的物理模型进行数值模拟。水槽  $l \times b \times h = 20 \times 2.5 \times 2 \text{ cm}^3$ ; 外驱动:  $z = A_e \cos 2\omega t$ ; 其中,  $A_e$  为外驱动振幅, 外驱动频率  $\omega = 2\pi f$ , 实验表明可在该系统中得到非传播孤立波。计算结果表明当  $0.64 < \alpha < 1.612$  时可产生稳定的非传播孤立波。按[4] 的稳定性条件可得:  $0.632 < \alpha < 1.614$ , 可见, 两者相当一致。

由前面的计算结果可见, 尽管 Laedke 等人得到的使系统获得稳定的非传播孤立波解的条件是由小扰动的线性分析而来, 它与我们的计算几乎没有差别, 结果很接近。所以[4] 的结果可以用于非线性分析。这个稳定性条件可以理解为系统耗散项与外驱动激励的一个制约关系。

注意到前面采用的计算模型的参数  $\beta$  的绝对值小于  $\gamma$  的绝对值, 若参数  $\beta$  的绝对值大于  $\gamma$  的绝对值, 稳定性条件变为  $\alpha < \gamma$ , 即使  $\alpha = 0$ , 式(8) 都会满足。也就是说, 根据[4] 的稳定性条件, 只要参数  $\beta$  的绝对值大于  $\gamma$  的绝对值, 即使没有耗散项, 系统也可以获得并维持稳定的非传播孤立波。这在物理上是不可能的。如果 Miles 方程(1) 中的激励项没有耗散项与之相平衡, 波幅会不断增长, 系统最终会失去平衡。我们取  $A = 1.0$ ,  $B = 1.0$ ,  $\beta = -1.0$ ,  $\gamma = 1.1$ , 调节线性阻尼  $\alpha$  的值进行计算。结果发现, 只有当  $0.6 < \alpha < 1.1$  时系统才可维持稳定的非传播孤立波解, 这与物理上的分析是一致的, 而与[4] 的稳定性条件不同。这说明 Laedke 等人的稳定性条件只是必要条件并非充分条件。这也正是文献[14] 对非传播孤立波的数值模拟失败的原因。所以, 究竟  $\alpha$  如何取值还有待进一步的探讨。

## 2.2 两个非传播孤立波的相互作用的模拟研究

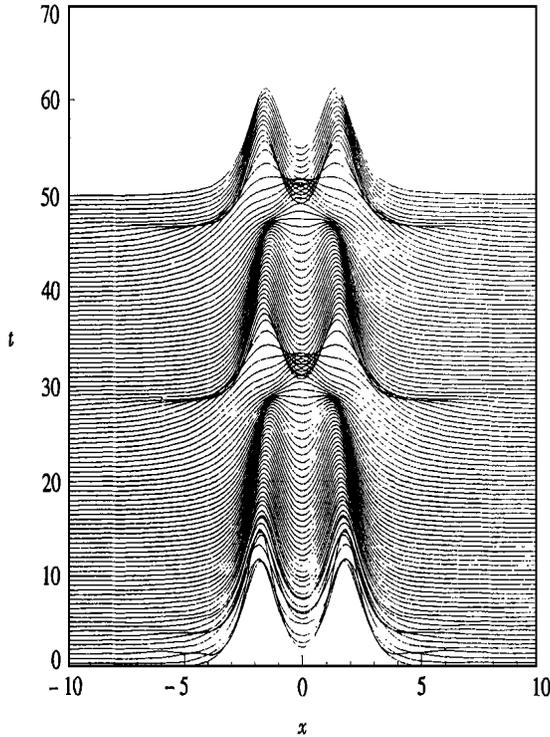
### 1) 真实的物理模型

2.1 节中提到的真实的物理模型再次被应用在这一节中。水槽的几何尺寸为  $l \times b \times h = 20 \times 2.5 \times 2 \text{ cm}^3$ , 外驱动  $z = A_e \cos 2\omega t$ ,  $A_e$  为驱动振幅, 驱动频率  $\omega = 2\pi f$ 。实验表明可在该系统中得到稳定的非传播孤立波, 而且两个非传播孤立波能够发生相互作用。

首先令  $\alpha = 1.16$ ,  $f = 5.03 \text{ Hz}$ ,  $A_e$  可变。

在外驱动振幅在  $0.95 \text{ mm} \sim 0.96 \text{ mm}$  之间时, 得到了两个非传播孤立波相互吸引、重叠、分离, 然后又相互吸引, 周而复始下去的相互作用现象, 这里简称为 2S<sub>1</sub>S<sub>2</sub> 现象, 见图 1。当驱

动振幅比 0.95 mm 小时,两个初始给定的非传播孤立波相互吸引重叠为一个非传播孤立波而不再分离(简称为 2S\_1S 现象),见图 2。当驱动振幅比 0.96 mm 大时,两个初始给定的非传播孤立波互不相干,没有相互作用,各自维持原状(简称为 2S\_2S 现象)见图 3。



$$l \times b \times h = 20 \times 2.5 \times 2 \text{ cm}^3, \alpha = 1.16, A_e = 0.95 \text{ mm}, f = 5.03 \text{ Hz}$$

图 1 两个同相孤立波发生周而复始的作用

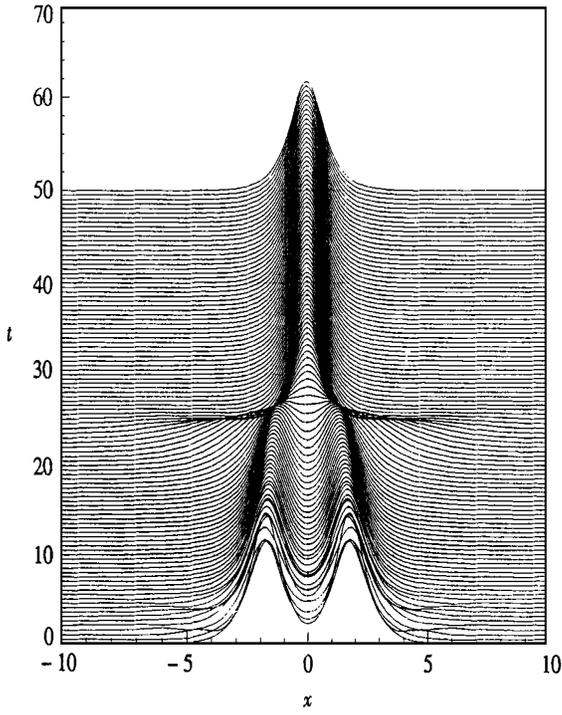
其次令  $\alpha = 1.16, A_e = 0.95 \text{ mm}, f$  可变。

当外驱动频率  $f$  在 5.02 ~ 5.03 Hz 之间时,可在系统中获得 2S\_1S\_2S 现象;当  $f$  较 5.02 Hz 为小时,计算结果为 2S\_1S;当  $f$  较 5.03 Hz 为大时,计算结果为 2S\_2S。这个结果与吴君汝等人的实验观察结果是基本一致的。他们在实验中发现,驱动频率太小时,两个相邻的非传播孤立波会最终合并为一个非传播孤立波不再分开,只有当驱动频率在某个适当的值附近时两个非传播孤立波才会发生周而复始的相互作用。但他们没有提到在过大的驱动频率下会产生 2S\_2S 现象。

2) 固定所有的物理参数,调节线性阻尼  $\alpha$  的值

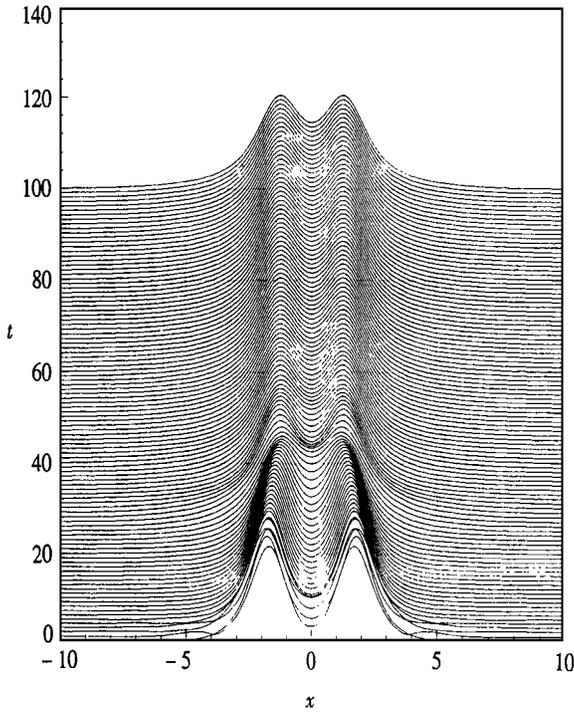
取  $A = 1.0, B = 1.0, \beta = -1.0, \gamma = 1.1$ , 相当于水槽、液深及外驱动频率和振幅都已确定,我们调节线性阻尼  $\alpha$  的值作了计算。结果发现当  $\alpha$  的值在 0.83 ~ 0.87 时得到了 2S\_1S\_2S 的现象;而当  $\alpha < 0.83$  时,计算结果为 2S\_2S;当  $\alpha > 0.87$  时,计算结果为 2S\_1S。这进一步说明:在该模型中,尽管  $\alpha$  只要满足线性稳定性的条件即可算出稳定的非传播孤立波,但要算出两个孤立波的相互作用, $\alpha$  的值却要受更严格的限制。

在数值模拟中,我们获得了非传播孤立波相互吸引、重叠、分离,然后又相互吸引,周而复始下去这样的相互作用的典型现象。但是,要获得这样的相互作用现象,计算模型对参数有极严格的要求,对参数非常敏感。我们的数值模拟中的两个非传播孤立波的作用模式和实验的



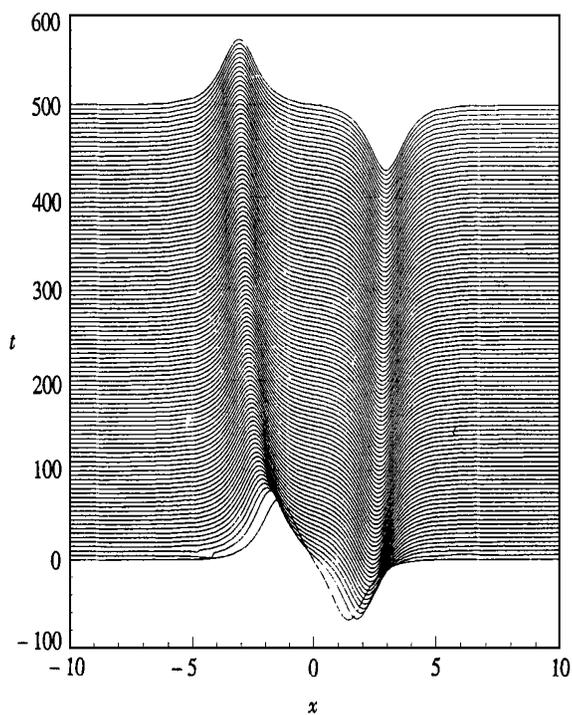
$l \times b \times h = 20 \times 2.5 \times 2 \text{ cm}^3$ ,  $\alpha = 1.16$ ,  $A_e = 0.94 \text{ mm}$ ,  $f = 5.03 \text{ Hz}$

图2 两个同相孤立波合并为一个波不再分开



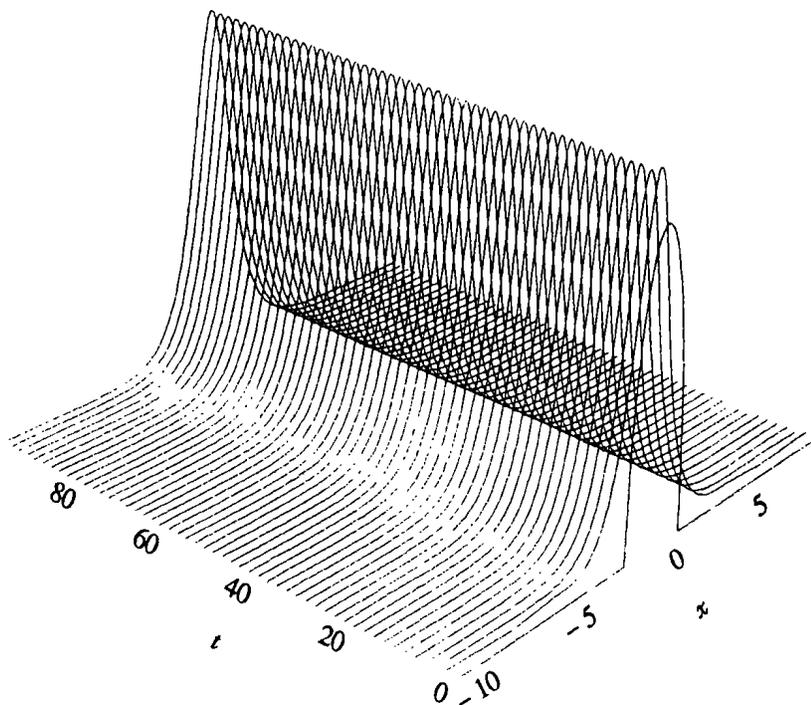
$l \times b \times h = 20 \times 2.5 \times 2 \text{ cm}^3$ ,  $\alpha = 1.16$ ,  $A_e = 0.98 \text{ mm}$ ,  $f = 5.03 \text{ Hz}$

图3 两个同相孤立波不发生周而复始的作用



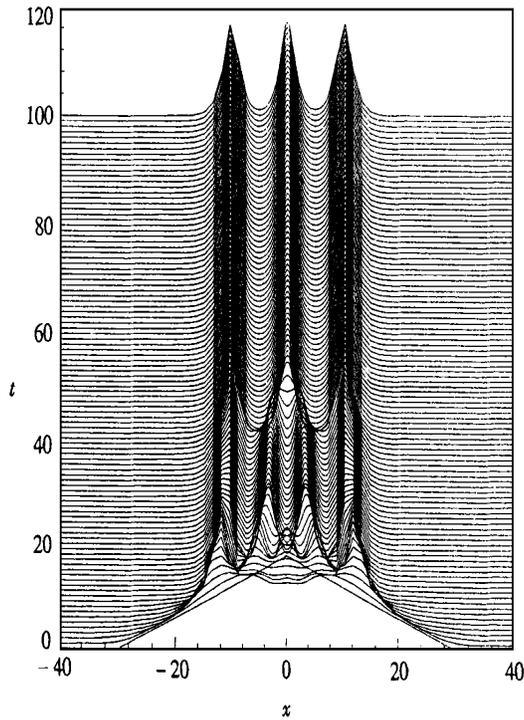
$l \times b \times h = 20 \times 2.5 \times 2 \text{ cm}^3$ ,  $\alpha = 1.16$ ,  $A_e = 0.95 \text{ mm}$ ,  $f = 5.03 \text{ Hz}$

图 4 两个异相孤立波不发生周而复始的作用



$l \times b \times h = 38 \times 2.53 \times 2 \text{ cm}^3$ ,  $\alpha = 1.16$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $A_e = 0.95 \text{ mm}$ ,  $f = 5.03 \text{ Hz}$

图 5 一个半圆形初始扰动发展为一个稳定的孤立波



$$A = B = 1.0, \alpha = 1.0, \beta = -1.0, \gamma = 1.1$$

图6 一个较宽的三角形扰动发展成三个孤立波

结果是基本吻合的。在实验中,尽管要使两个非传播孤立波发生相互作用的确对外驱动条件有一定的要求,但没有这么苛刻,驱动频率和驱动振幅可变化的范围要比我们数值计算所得的范围要宽松。所以我们觉得对数值模拟尚有进一步的工作可做,才能更好的描述非传播孤立波相互作用的机理。

在 Miles 方程中,  $\alpha$  为耗散系数,代表线性阻尼。它的引入是因为考虑到在水槽受到外驱动振动时,系统不断有能量加入。若没有能量的耗散,则波幅会不断增长,而实际的物理系统中也存在耗散。因此只有引入耗散项与振动激励相平衡,才能得到稳定的解。两个非传播孤立波的相互作用与系统中的非线性项和耗散项密切相关。当振动频率固定时,驱动振幅的大小反映了水槽系统从外界获得的能量的大小,而  $\alpha$  的大小反映了系统的耗散性强弱,实际上也反映了液体粘性的大小。耗散性越强,越容易破坏已形成的稳定的波。因此,在一定的  $\alpha$  下,若驱动振幅太小,即外界的能量输入不够大,则两个非传播孤立波会在液体粘性作用下合并为一个波而不再分离;随着驱动振幅值增大,外界能量输入提高,能与系统耗散性相抗衡,两孤立波会相互吸引、重叠、分离,又相互吸引,周而复始地继续下去。当能量输入偏大,即驱动振幅偏大时,系统的耗散性及液体粘性作用相对不足,不足以破坏稳定的非传播孤立波,因此两个非传播孤立波会在外驱动输入的能量支持下保持各自稳定的波形不变,难以合并为一个波。当能量输入过大时,即驱动振幅不满足稳定性条件时,不光是孤立波模式被激发,其它的各种模式也被激发,各种模式间的竞争和相互作用,使得非传播孤立波消失。当然,固定驱动振幅而对驱动频率进行变动所得到的结果也可以用同样的道理来解释。

3) 到目前为止,上面提到的非传播孤立波的相互作用,都是同相的非传播孤立波。现在

我们考虑反相非传播孤立波的相互作用。我们仍然采用本节中所用的实际的物理模型进行计算。结果发现两波各自独立发展,且有缓慢远离之势,它们互不干扰,不发生相互作用(见图4)。这与实际的物理现象是相吻合的。

### 2.3 初始扰动与非传播孤立波

按照实验结果,任意的扰动可能发展成一个或几个非传播孤立波。我们计算了两种典型的初始扰动。对于半圆形的初始扰动,我们计算了两个模型,第一个模型的参数是  $A = 1.0$ ,  $B = 1.0$ ,  $\gamma = 1.1$ 。另一个是吴君汝在[1]中用到的模型。每一个模型的半圆形初始扰动很快就发展成稳定的单个非传播孤立波,见图5。

我们对许多有三角形初始扰动的模型做了数值模拟和分析。模型参数为  $A = B = 1.0$ ,  $\beta = -1.0$ ,  $\gamma = 1.1$ 。首先固定三角形的底边长度与非传播孤立波的波宽一致,使三角形的高变动。从计算结果可得,当三角形扰动峰值与孤立波峰值之比在  $1.552 \sim 0.95$  之间时,三角形扰动最后发展成非传播孤立波,否则最后扰动会逐渐消失。然后我们使三角形扰动峰值固定(与孤立波峰值相同),底边变化,从计算结果可看出,其底边长短必须限制在某个范围内才能发展成一个稳定的非传播孤立波,否则扰动可能消失或发展成多个孤立波并发生相互作用,见图6。因此在我们的数值模拟中适当的扰动可以发展成稳定的非传播孤立波。

## 3 结 论

(1) Miles 方程中的耗散项系数(线性阻尼  $\alpha$ )对形成稳定的非传播孤立波影响很大。在某些情况下,Laedke 等人的稳定性条件与我们的数值模拟的结果相当一致。但在某些情况下,Laedke 等人的稳定性条件与我们的数值模拟不完全符合,由此可见,Laedke 等人关于非传播孤立波的稳定性条件只是一个必要条件,而不是充分条件。Laedke 等人关于非传播孤立波的稳定性条件虽然是从线性小扰动理论得到的,但在某些情况下却被我们的非线性的数值模拟所证实。

(2) 对两个同相非传播孤立波的相互作用的数值模拟表明,系统的参数有严格的限制。在水槽、液深及线性阻尼  $\alpha$  确定的条件下,适当的驱动振幅和外驱动频率才能使两个非传播孤立波发生彼此吸引、重叠、分离,然后周而复始地相互作用。在水槽、液深及驱动振幅和外驱动频率确定的条件下,只有极小范围的线性阻尼  $\alpha$  能算出两个孤立波典型的相互作用来。参数不适当时,两个波有可能会合并为一个非传播孤立波不再分离,也有可能彼此互不干扰,不能发生相互作用并各自稳定独立地发展下去。与实验相比,数值研究所要求的条件更为苛刻,频率和振幅的范围比实验更窄。我们还验证了两个异向孤立波不发生相互作用。

(3) 不同的初始扰动可以发展成单个或多个非传播孤立波。太小的扰动不能发展成孤立波,太大的或较宽的扰动有可能发展成多个孤立波并发生相互作用,也有可能最后消失。

### [参 考 文 献]

- [1] WU Jun\_ru, Keolian R, Rudnick I. Observation of a non\_propagating hydrodynamic soliton[J]. Phys Rev Lett, 1984, **52**: 1421—1424.
- [2] Larraza A, Putterman S. Theory of non\_propagating surface\_wave solitons[J]. J Fluid Mech, 1984, **148**: 443—449.
- [3] Miles J W. Parametrically excited solitary waves[J]. J Fluid Mech, 1984, **148**: 451—460.
- [4] Laedke E W, Spatschek K H. On localized solution in nonlinear Faraday resonance[J]. J Fluid

- Mech, 1991, **223**: 589—601.
- [5] Chen X, Wei R J, Wang B R. Chaos in non\_propagating hydrodynamics solitons[J]. Phys Rev, 1996, **53**: 6016—6020.
- [6] Chen W Z, Wei R J, Wang B R. Non\_propagating interface solitary wave in fluid[J]. Phys Lett A, 1995, **208**: 197—200.
- [7] Chen W Z. Experimental observation of self\_localized structure in granular material[J]. Phys Lett A, 1995, **196**: 321—325.
- [8] 崔洪农, 等. 非传播孤立波的观察及实验结果[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1986, **4**: 27—34.
- [9] 崔洪农, 等. 非传播孤立波的特性研究[J]. 水动力学研究与进展, 1991, **6**(1): 18—25.
- [10] 周显初, 崔洪农. 表面张力对非传播孤立波的影响[J]. 中国科学 A 辑, 1992, **12**: 1269—1276.
- [11] 周显初. 非传播孤立波和表面张力[J]. 力学学报, 1998, **30**(6): 672—675.
- [12] 颜家壬, 黄国翔. 矩形波导中两层流体界面上的非传播孤立波[J]. 物理学报, 1998, **37**: 874—880.
- [13] Yan J R, Mei Y P. Interaction between two Wu's solitons[J]. Europhys Lett, 1993, **23**: 335—340.
- [14] ZHOU Xian\_chu, TANG Shi\_min, QIN Su\_di. The stability of a standing soliton[A]. In: CHIEN Wei\_zang, GUO Zhong\_heng, GUO You\_zhong Eds. Proc 2nd Int Conf of Nonlinear Mech [C]. Beijing: Peking University Press, 1993, 455—458.

## Numerical Simulation of Standing Solitons and Their Interaction

ZHOU Xian\_chu, Rui Yi

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

**Abstract:** Standing soliton was studied by numerical simulation of its governing equation, a cubic Schrödinger equation with a complex conjugate term, which was derived by Miles and was accepted. The value of linear damping in Miles equation was studied. Calculations showed that linear damping effects strongly on the formation of a standing soliton and Laedke & Spatschek stable condition is only a necessary condition, but not a sufficient one. The interaction of two standing solitons was simulated. Simulations showed that the interaction pattern depends on system parameters. Calculations for the different initial condition and its development indicated that a stable standing soliton can be formed only for proper initial disturbance, otherwise the disturbance will disappear or develop into several solitons.

**Key words:** soliton; standing soliton; cubic Schrödinger equation; numerical simulation