

文章编号: 1000\_0887(2000) 12\_1247\_08

# 粘性流体两相多孔介质非线性 动力问题的罚有限元法\*

严 波, 张汝清

(重庆大学 建筑工程学院 工程力学系, 重庆 400044)

(我刊编委张汝清来稿)

摘要: 采用基于混合物理论的多孔介质模型, 给出粘性流体饱和两相多孔介质非线性动力问题的控制场方程以及相应边值和初值问题的提法, 用 Galerkin 加权残值法导出罚有限元公式, 并给出该非线性方程组的迭代求解方法。考虑了体积分数和渗透率与变形相关的情况。用编制的有限元程序计算分析了一维多孔柱体在脉冲载荷作用下的瞬态响应, 数值结果表明文中方法正确有效。

关键词: 多孔介质; 粘性流体; 动力响应; 有限元

中图分类号: O347 文献标识码: A

## 引 言

基于混合物理论的多孔介质模型, 由于其建立在连续介质力学理论框架之上, 日益受到人们的重视<sup>[1]</sup>, 已被成功地用于描述土体和生物软组织等的力学行为<sup>[2,3]</sup>。de Boer 等人利用该类模型, 用解析方法研究了两相多孔介质中波的传播问题<sup>[4,5,6]</sup>, 本文作者研究了该多孔介质线性模型拟静态问题和波动问题的几种有限元求解方法<sup>[7,8,9]</sup>。但现有的工作几乎均未考虑流体相的粘性, 视多孔介质中的流体为理想流体。

然而, 土体中的某些污染物和生物软组织中的液体, 如关节中的滑液等均为粘性流体, 对这类问题应采用粘性流体两相多孔介质模型进行描述, 因而研究粘性流体两相多孔介质的力学响应问题具有重要意义, 本文讨论这一问题的有限元分析方法。

## 1 控制场方程

基于混合物理论, 粘性流体饱和两相多孔介质被视为由一粘性流体相和一可变形固体相组成的不相混溶的混合物。流体相和固体相为具有独立运动规律的连续介质, 各相介质的几何和物理量均在整个空间上定义。混合物作为一个整体满足单一均匀介质的平衡方程。

在此假设两相介质之间无化学反应、质量交换、热交换和动量交换, 多孔介质的变形在小变形范围内, 固体相和流体相微观上不可压缩, 即真实密度  $\rho^R = \text{const} (\alpha = S, F)$ , 固体相为各

\* 收稿日期: 2000\_02\_28; 修订日期: 2000\_07\_11

作者简介: 严波(1965—), 男, 重庆永川人, 副教授, 博士;

张汝清(1929—), 男, 四川泸县人, 教授。

向同性线弹性介质, 流体相为 Stokes 流体. 根据混合物理论, 可得到如下控制场方程<sup>[7]</sup>:

质量平衡方程

$$\operatorname{div}(\phi^S \mathbf{u}^S + \phi^F \mathbf{u}^F) = 0 \quad (1)$$

动量平衡方程

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^S + K(\mathbf{u}^F - \mathbf{u}^S) = \rho^S \ddot{\mathbf{u}}^S, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^F - K(\mathbf{u}^F - \mathbf{u}^S) = \rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F. \quad (3)$$

本构关系

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}^S &= -\phi^S p \mathbf{I} + 2\mu^S \mathbf{E}^S + \lambda^S (\mathbf{E}^S \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}^F &= -\phi^F p \mathbf{I} + 2\mu^F \mathbf{D}^F - \frac{2}{3} \mu^F (\mathbf{D}^F \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

边界条件

$$\mathbf{u}^S = \hat{\mathbf{u}}^S \quad \Gamma_u^S \text{ 上}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{u}^F = \hat{\mathbf{u}}^F \quad \Gamma_v^F \text{ 上}, \quad (5b)$$

$$\mathbf{t}^S = \hat{\mathbf{t}}^S \quad \Gamma_t^S \text{ 上}, \quad (5c)$$

$$\mathbf{t}^F = \hat{\mathbf{t}}^F \quad \Gamma_t^F \text{ 上}. \quad (5d)$$

初值条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^S(0) &= \mathbf{u}_0^S, \quad \mathbf{u}^F(0) = \mathbf{u}_0^F, \quad \dot{\mathbf{u}}^S(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^S, \\ \mathbf{u}^F(0) &= \mathbf{u}_0^F, \quad \mathbf{u}^F(0) = \mathbf{u}_0^F, \quad \dot{\mathbf{u}}^F(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^F, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中上标 S 代表固体相, F 代表流体相.  $p$  为孔隙压力,  $\rho^i = \phi^i \rho^R$  为组分的宏观质量密度,  $\mu^S$  和  $\lambda^S$  为固体相的弹性常数,  $\mu^F$  为流体相的粘性系数,  $\mathbf{E}^S$  为固体相的应变张量,  $\mathbf{D}^F$  为流体相的变形率张量,  $\mathbf{T}$  为应力张量.  $\phi^S$  和  $\phi^F$  为体积分, 具体地,  $\phi^F = V^F/V$  为孔隙率,  $\phi^S = V^S/V$  为固体相含量, 由于各相在微观上不可压缩, 可得如下关系

$$\phi_0^S = J^S \phi^S, \quad \phi_0^F = J^F \phi^F. \quad (7)$$

下标  $( )_0$  表示在参考构形中的量,  $J^S$  和  $J^F$  为两相介质的体积变化. 在小变形情况下通常可以忽略体积的变化, 此时  $\phi^S = \phi_0^S$ ,  $\phi^F = \phi_0^F$ ,  $\rho^i = \phi_0^i \rho^R = \text{const}$ . 又由饱和条件有

$$\phi^S + \phi^F = 1. \quad (8)$$

$K$  为扩散阻力系数, 其与渗透率  $\kappa$  有关, 对于各向同性渗透情况,

$$K = (\phi^F)^2 \gamma^{\text{FR}} / \kappa. \quad (9)$$

$\gamma^{\text{FR}}$  为流体相的比重, 通常渗透率与多孔介质的变形有关, 如文[10] 给出关节软骨在小变形情况下的渗透率函数为

$$\kappa = \kappa_0 e^{M e^S}, \quad (10)$$

式中  $\kappa_0$  和  $M$  为材料参数,  $e^S$  为固体相的体积应变.

当流体相为粘性流体时, 在多孔介质与固体壁的接触表面上, 固体壁边界对流体相产生粘性力的作用, 这不同于理想流体的情况.

场方程(1)~(4)以及边界条件(5)和初始条件(6)即构成了粘性流体饱和两相多孔介质动力问题的边值和初值问题.

## 2 罚有限元方程

采用 Galerkin 加权残值法推导有限元平衡方程. 为此, 在连续方程(1)中引入一罚参数  $\beta$ ,

使其成为

$$\dots \cdot (\phi^S \boldsymbol{u}^S + \phi^F \boldsymbol{u}^F) + p/\beta = 0, \tag{11}$$

$\beta$  为一大数。当  $\beta \rightarrow \infty$  时, 方程(11) 与(1) 等价。由方程(11) 可得

$$p = -\beta \dots \cdot (\phi^S \boldsymbol{u}^S + \phi^F \boldsymbol{u}^F). \tag{12}$$

将其代入方程(4), 可在场方程中消去压力项  $p$ 。设边界条件(5a) 和(5b) 为强制满足的边界条件, (5c) 和(5d) 为自然边界条件。 $\boldsymbol{w}^S, \boldsymbol{w}^S, \boldsymbol{w}^F, \boldsymbol{w}^F$  分别为固体相和流体相动量平衡方程(2)、(3) 以及自然边界条件(5c) 和(5d) 的权函数, 则相应的加权残值表达式为

$$\int_v \boldsymbol{w}^S \cdot [\dots \cdot \boldsymbol{T}^S + K(\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^S) - \rho^S \dot{\boldsymbol{u}}^S] dv + \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{w}^S \cdot (\boldsymbol{t}^S - \boldsymbol{t}^S) d\Gamma + \int_v \boldsymbol{w}^F \cdot [\dots \cdot \boldsymbol{T}^F + K(\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^S) - \rho^F \dot{\boldsymbol{u}}^F] dv + \int_{\Gamma_F} \boldsymbol{w}^F \cdot (\boldsymbol{t}^F - \boldsymbol{t}^F) d\Gamma = 0. \tag{13}$$

利用 Gauss 定理, 方程(13) 可化为

$$\begin{aligned} & - \int_v (\dots \cdot \boldsymbol{w}^S) : \boldsymbol{T}^S dv + \oint_{\Gamma} \boldsymbol{w}^S \cdot \boldsymbol{t}^S d\Gamma + \int_v \boldsymbol{w}^S \cdot K(\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^S) dv - \int_v \boldsymbol{w}^S \cdot \rho^S \dot{\boldsymbol{u}}^S dv - \\ & \int_v (\dots \cdot \boldsymbol{w}^F) : \boldsymbol{T}^F dv + \oint_{\Gamma} \boldsymbol{w}^F \cdot \boldsymbol{t}^F d\Gamma - \int_v \boldsymbol{w}^F \cdot K(\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^S) dv - \\ & \int_v \boldsymbol{w}^F \cdot \rho^F \dot{\boldsymbol{u}}^F dv + \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{w}^S \cdot (\boldsymbol{t}^S - \boldsymbol{t}^S) d\Gamma + \int_{\Gamma_F} \boldsymbol{w}^F \cdot (\boldsymbol{t}^F - \boldsymbol{t}^F) d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

由于固体相的位移为强制满足的边界条件, 故可令权函数  $\boldsymbol{w}^S$  在边界  $\Gamma_u^S$  上为零, 又由权函数的任意性, 取  $\boldsymbol{w}^S = \boldsymbol{w}^S, \boldsymbol{w}^F = \boldsymbol{w}^F$ , 由上式可化为:

$$\begin{aligned} & \int_v \boldsymbol{w}^S \cdot \rho^S \dot{\boldsymbol{u}}^S dv + \int_v (\dots \cdot \boldsymbol{w}^S) : \boldsymbol{T}^S dv - \int_v \boldsymbol{w}^S \cdot K(\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^S) dv + \\ & \int_v \boldsymbol{w}^F \cdot \rho^F \dot{\boldsymbol{u}}^F dv + \int_v (\dots \cdot \boldsymbol{w}^F) : \boldsymbol{T}^F dv + \int_v \boldsymbol{w}^F \cdot K(\boldsymbol{u}^F - \boldsymbol{u}^S) dv = \\ & \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{w}^S \cdot \boldsymbol{t}^S d\Gamma + \int_{\Gamma_F} \boldsymbol{w}^F \cdot \boldsymbol{t}^F d\Gamma + \int_{\Gamma_F} \boldsymbol{w}^F \cdot (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}^F) d\Gamma. \end{aligned} \tag{15}$$

注意, 上式右端最后一项是固体壁边界作用在多孔介质流体相上的力,  $\boldsymbol{n}$  为固体壁边界的法向矢量。方程(15) 是(13) 式的弱形式, 即为有限元的基本方程, 该方程可用矩阵形式重写。对区域  $v$  进行离散化, 则每一个单元均应满足方程(15)。现对单元的固体相及流体相的位移和速度插值:

$$\boldsymbol{u}^S = \boldsymbol{N} \boldsymbol{u}_n^S, \boldsymbol{u}^F = \boldsymbol{N} \boldsymbol{u}_n^F, \boldsymbol{u}^F = \boldsymbol{N} \boldsymbol{u}_n^F. \tag{16}$$

这里固体和流体相取相同的插值函数, 只要其  $C_0$  连续, 便足以使方程(15) 中的所有积分有限。式中下标为  $n$  的量代表单元  $n$  的节点上的相应物理量。采用 Galerkin 法, 取

$$\boldsymbol{w}^S = \boldsymbol{N} \boldsymbol{w}_n^S, \boldsymbol{w}^F = \boldsymbol{N} \boldsymbol{w}_n^F, \tag{17}$$

这里  $\boldsymbol{w}_n^S$  和  $\boldsymbol{w}_n^F$  为单元  $n$  的任意系数。略去推导过程, 可得

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{w}_n^S)^T [ \boldsymbol{M}_n^S \dot{\boldsymbol{u}}_n^S + (\phi^S)^2 \beta \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{u}_n^S + \beta \phi^S \phi^F \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{u}_n^F - \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{u}_n^F + \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{u}_n^S + \\ & \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{u}_n^S - \boldsymbol{f}_n^S ] + (\boldsymbol{w}_n^F)^T [ \boldsymbol{M}_n^F \dot{\boldsymbol{u}}_n^F + \phi^S \phi^F \beta \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{u}_n^S + \beta (\phi^F)^2 \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{u}_n^F + \\ & (\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{J}_n) \boldsymbol{u}_n^F - \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{u}_n^S - \boldsymbol{f}_n^F - \boldsymbol{r}_n^F ] = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

由于权函数的任意性, 得单元平衡方程组

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_n^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_n^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_n^S \\ \dot{\boldsymbol{u}}_n^F \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_n & -\boldsymbol{A}_n \\ -\boldsymbol{A}_n^T & \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} (\phi^S)^2 \boldsymbol{C}_n & \phi^S \phi^F \boldsymbol{C}_n \\ \phi^S \phi^F \boldsymbol{C}_n^T & (\phi^F)^2 \boldsymbol{C}_n \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_n^S \\ \boldsymbol{u}_n^F \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n^S \\ \mathbf{u}_n^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n^S \\ \mathbf{f}_n^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_n^F \end{bmatrix}, \quad (19)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_n^S &= \int_{v_n} \rho^S \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv, & \mathbf{M}_n^F &= \int_{v_n} \rho^F \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv, \\ \mathbf{C}_n &= \int_{v_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} dv, & \mathbf{A}_n &= \int_{v_n} \mathbf{K} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv, \\ \mathbf{J}_n &= \int_{v_n} \left( \mu^F \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} - \frac{2}{3} \mu^F \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} \right) dv, \\ \mathbf{K}_n &= \int_{v_n} \left( \lambda^S \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} + \mu^S \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} \right) dv, \\ \mathbf{f}_n^S &= \int_{\Gamma_{t^S}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^S d\Gamma, & \mathbf{f}_n^F &= \int_{\Gamma_{t^F}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^F d\Gamma, & \mathbf{r}_n^F &= \int_{\Gamma_{t^F}} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^F \mathbf{n} d\Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这里

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

若流体相为不可压缩 Newton 流体, 则

$$\mathbf{J}_n = \int_{v_n} \mu^F \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} dv. \quad (21)$$

方程(19)对区域  $v$  中所有单元求和, 得系统方程

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{r}, \quad (22)$$

式中  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{r}$  为相应单元矩阵和向量的组集。方程(22)即为粘性流体饱和两相多孔介质动力问题的有限元公式。

系统方程右端的  $\mathbf{r}$  项与变形有关, 若考虑两相介质的体积分数和渗透率随变形和时间的变化, 则系统方程(22)中的系数矩阵  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{C}$  与变形有关。该方程为非线性方程。对于小变形问题, 可以忽略体积分数和质量的变化。若采用隐式积分, 则系统的增量动力方程为

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (23)$$

式中,  ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(i)}$  和  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}$  分别表示  $t + \Delta t$  时刻第  $i$  次迭代的节点加速度和速度向量,  $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$  表示第  $i$  次迭代的节点位移增量向量,  ${}^t \mathbf{C}$  为  $t$  时刻的“阻尼”矩阵,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}$  为  $t + \Delta t$  时刻作用于节点上的已知外力,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^{(i-1)}$  是  $t + \Delta t$  时刻第  $i - 1$  次迭代固体壁边界作用于流体相的等效节点力,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$  为  $t + \Delta t$  时刻第  $i - 1$  次迭代等效于单元应力的节点力向量。

### 3 系统方程的求解

系统方程(23)的求解, 时间积分可采用 Newmark 隐式积分方法。Newmark- $\beta$  隐式积分算法基于如下关系, 即

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \quad (24)$$

$${}^{n+\Delta t} \mathbf{u} = \frac{\delta}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u} + \left( 1 - \frac{\delta}{\beta} \right) {}^t \mathbf{u} + \Delta t \left( 1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \dot{\mathbf{u}} \quad (25)$$

$${}^{n+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u} - \frac{\delta}{\beta \Delta t} {}^t \mathbf{u} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}} \quad (26)$$

将式(25)和(26)代入(23)中,得到

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = {}^{n+\Delta t} \mathbf{R}^{(i)} \quad (27)$$

式中

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{\delta}{\beta \Delta t} {}^t \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (28)$$

$${}^{n+\Delta t} \mathbf{R}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^{(i-1)} - {}^{n+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} + \mathbf{M} \left[ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{\beta \Delta t} {}^t \mathbf{u} \right] + {}^t \mathbf{C} \left[ \Delta t \left( \frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}} + \left( \frac{\delta}{\beta} - 1 \right) {}^t \mathbf{u} \right] \quad (29)$$

求解方程(27),得到第*i*步迭代的 $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$ ,进行收敛性检查,如已收敛,即可由(24)、(25)和(26)计算得到 ${}^{n+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}$ , ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ 和 ${}^{n+\Delta t} \mathbf{u}$ 。如未收敛,继续迭代直到收敛,再进行下一步加载。

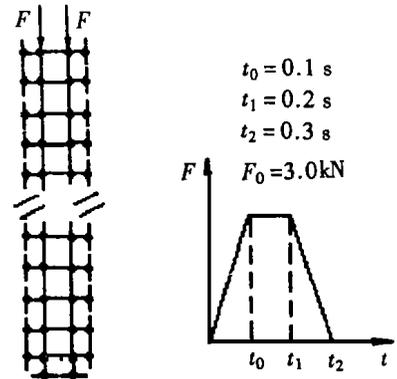
### 4 数值算例及分析

下面用编制的有限元程序,计算一维多孔柱体在脉冲载荷作用下的动力响应。计算模型及载荷时间历程参见图1。多孔柱体高80 m,划分为160个单元,单元为四边形四节点等参单元。为简化起见,计算中假设两相介质的体积分数和渗透率与变形和时间无关。多孔介质的物理参数为 $E^S = 3.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , $\nu^S = 0.20$ , $\phi^S = 0.67$ , $\phi^F = 0.33$ , $\rho^S = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , $\rho^F = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , $\gamma^{\text{FR}} = 1.0 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ , $\kappa = 0.01 \text{ m/s}$ , $\mu^F = 5.0 \times 10^5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。

计算中选取 $\delta = 0.6$ , $\beta = 0.3025$ ,时间步长 $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ 。对于该问题,罚参数取 $10^{14} \sim 10^{17}$ ,不影响计算结果。

图2到图5分别示出流体相为理想流体和Stokes流体时,多孔柱体表面附近和离表面10 m深处各响应的对比。从图中可见,流体相为粘性流体时,柱体表面附近固体相和流体相的位移、速度响应和固体相的轴向有效应力响应均滞后于流体相为理想流体的情况,而压力没有明显的滞后。值得注意的是,流体相为粘性流体时,表面附近的压力增大很快,这是由于流体的粘性阻止流体流出表面,从而在表面附近产生较大的压力。从10 m深处响应的对比可见,由于粘性的耗散作用,两相的位移、速度和固体相的应力幅值均较流体相为理想流体的情况小,其中两相的速度和固体相的有效应力最明显。另一个值得注意的现象是,在较深的地方,流体的粘性并没有使固体和流体相的响应滞后于流体相为理想流体的情况,反而超前。实际上,这是由于流体相的粘性,增大了流体和固体间的相互作用,从而宏观上增大了多孔体的“刚性”,使多孔体在瞬态载荷作用下,增大了波的传播速度所致。

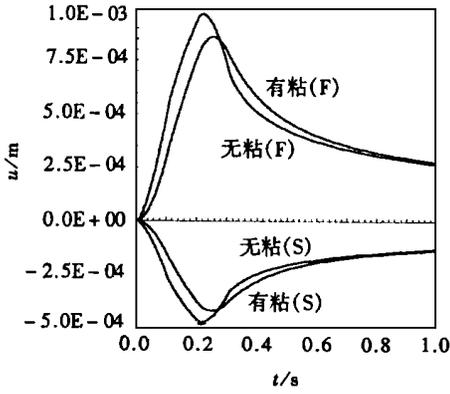
图6和图7分别为流体相为粘性流体时,不同深度流体相的速度和固体相的有效应力的变化规律。从图中可以看出,两者随时间的变化曲线较光滑。图8给出了流体相的粘性系数



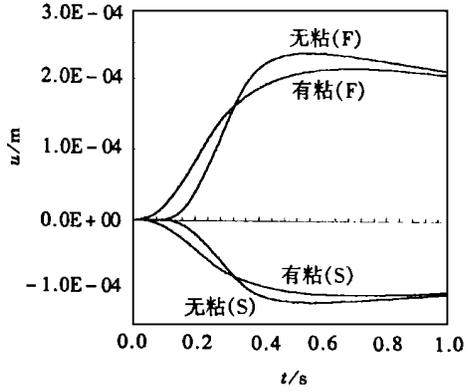
(a) 有限元模型 (b) 脉冲载荷  
图1 一维多孔柱体动力问题有限元模型

图6和图7分别为流体相为粘性流体时,不同深度流体相的速度和固体相的有效应力的变化规律。从图中可以看出,两者随时间的变化曲线较光滑。图8给出了流体相的粘性系数

对流体相的速度的影响

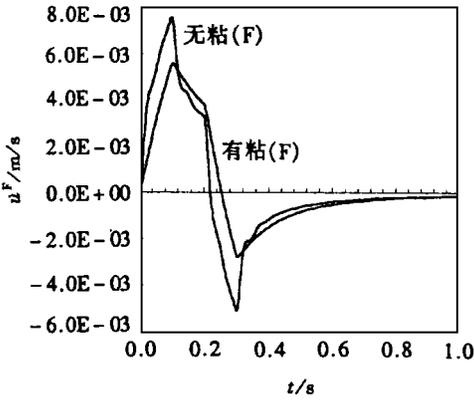


(a)  $z = 0.0 \text{ m}$

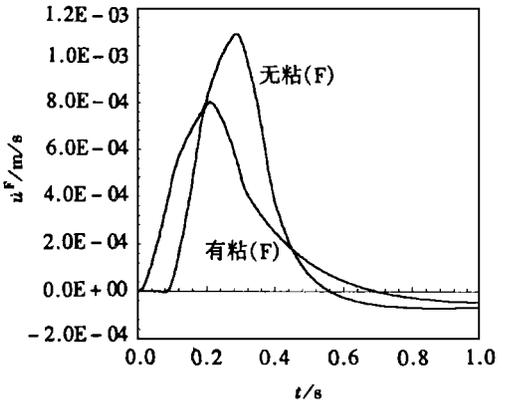


(b)  $z = 10 \text{ m}$

图2 流体相粘性对位移的影响

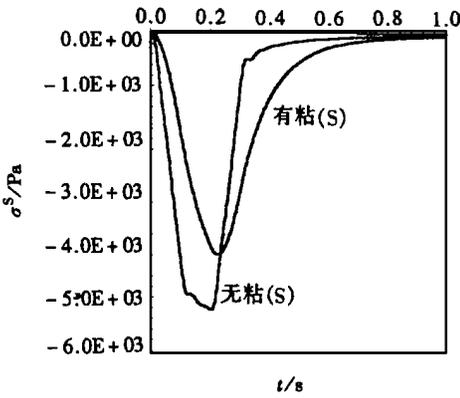


(a)  $z = 0.0 \text{ m}$

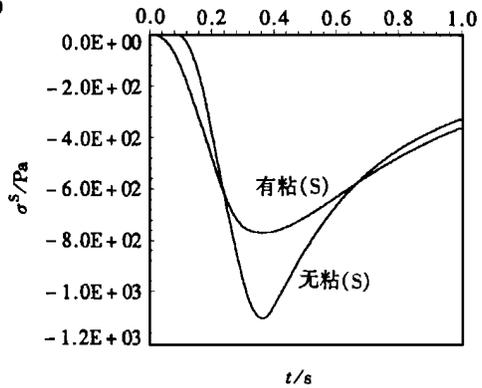


(b)  $z = 10 \text{ m}$

图3 流体相粘性对流体速度的影响



(a)  $z = 0.5 \text{ m}$



(b)  $z = 10 \text{ m}$

图4 流体相粘性对固体相轴向有效应力响应的影响

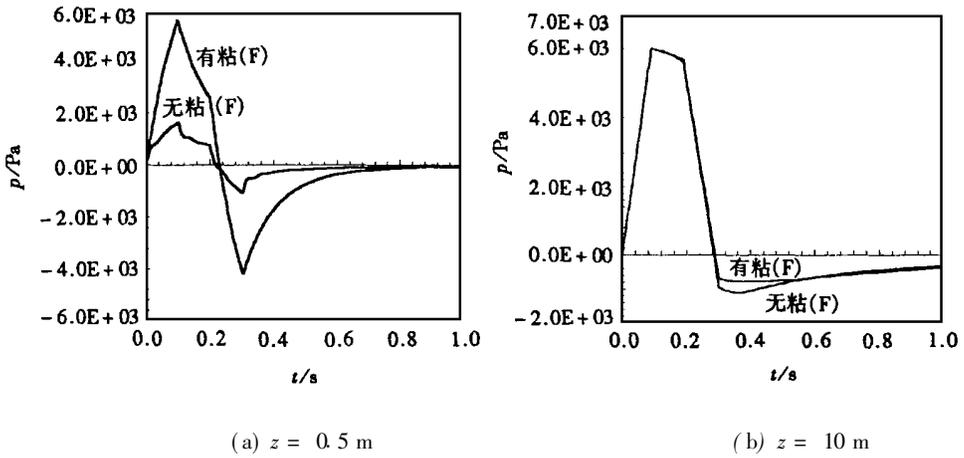


图5 流体相粘性对压力响应的影响

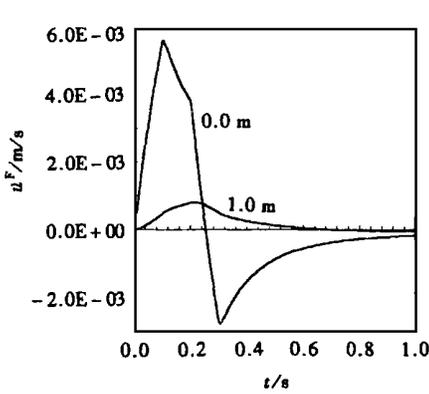


图6 不同深度流体相速度随时间的变化

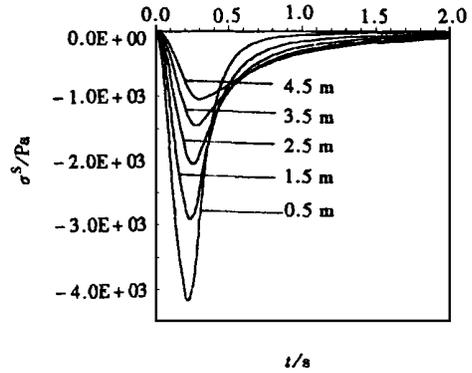


图7 不同深度固体相有效应力随时间的变化

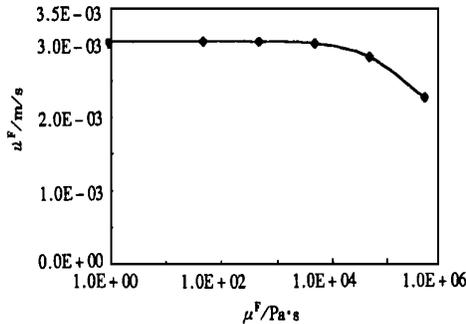


图8 流体相粘性系数对速度响应的影响 ( $z = 2 \text{ m}, t = 0.15 \text{ s}$ )

## 5 结 论

本文给出了粘性流体饱和两相多孔介质的控制场方程, 导出了相应动力问题的罚有限元方程, 并给出了所得非线性有限元平衡方程的解法。用编制的有限元程序分析了一维多孔柱体在脉冲载荷作用下的响应, 计算结果合理, 证明方法正确。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] de Boer R. 多孔介质理论发展史上的重要成果[M]. 刘占芳, 严波译. 重庆: 重庆大学出版社, 1995.
- [2] Prevost H. Mechanics of continuous porous media[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1980, **18**(6): 787—800.
- [3] Mow V C, Kuei S C, Lai W M, et al, Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: theory and experiments[J]. *J Biomech Eng*, 1980, **102**(1): 73—84.
- [4] de Boer R, Ehlers R, Liu Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media[J]. *Arch Appl Mech*, 1993, **63**: 59—72.
- [5] de Boer R, Liu Z. Plane waves in a semi-infinite fluid-saturated porous medium[J]. *Transport in Porous Media*, 1994, **16**: 147—173.
- [6] de Boer R, Liu Z. Propagation of acceleration waves in incompressible liquid-saturated porous solids [J]. *Transport in Porous Media*, 1995, **21**: 163—173.
- [7] 严波, 刘占芳, 张湘伟. 流体饱和多孔介质中波传播问题的有限元分析[J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(12): 1235—1244.
- [8] 严波, 刘占芳, 张湘伟. 流体饱和两相多孔介质拟静态问题的有限元方法[J]. *应用力学学报*, 2000, **17**(1): 91—96.
- [9] 严波, 刘占芳, 张湘伟. 两相多孔介质拟静态问题的一种有限元解法[J]. *重庆大学学报*, 2000, **23**(1): 41—44.
- [10] Lai W M, Mow V C. Drag-induced compression of articular cartilage during a permeation experiment [J]. *Biorheology*, 1980, **17**(1,2): 111—123.

## Penalty Finite Element Method for Nonlinear Dynamic Response of Viscous Fluid-Saturated Biphasic Porous Media

YAN Bo, ZHANG Ru-qing

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University,  
Chongqing 400044, P R China)

**Abstract:** The governing equations as well as boundary and initial conditions for nonlinear dynamic response problems of viscous fluid-saturated biphasic porous medium model, based on mixture theory, are presented. With Galerkin weighted residual method the corresponding nonlinear dynamic penalty finite element equation, in which the dependencies of volume fraction and permeation coefficients on deformation are included, is obtained. The iteration solution method of the nonlinear system equation is also discussed. As a numerical example, the dynamic response of a porous medium column under impulsive loading action is analyzed with the developed finite element program. The numerical results demonstrate the efficiency and correctness of the method.

**Key words:** porous media; viscous fluid; dynamic response; finite element method