

文章编号: 1000-0887(2000) 12-1271-08

H_∞ 控制的变分法与计算*

钟万勰

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 通过将未来时段 $(t, t_f]$ H_∞ 状态反馈问题的泛函指标和过去时段 $[0, t)$ H_∞ 滤波问题的泛函指标组合在一起, 可以得到整个时段 $[0, t_f]$ 的 H_∞ 量测反馈问题的泛函指标, 从而可以将变分法进一步用于研究 H_∞ 量测反馈问题. 在过去时段与未来时段的连接点, 即当前时刻 t , 有两个连接条件: 一个是估计状态 $x(t)$ 必须是未来时段状态向量估计的初始条件, 另一个关于协态向量 $\lambda(t)$ 的连接条件则可以由变分原理导出. 进一步的推证表明: 最优参数 γ_{cr}^{-2} 所满足的第三个条件依然是最小瑞利商. 因此精细积分方法可以用于 H_∞ 量测反馈控制问题最优参数的计算, 此前该方法已用来计算 H_∞ 状态反馈和 H_∞ 滤波问题中的最优参数 γ_{cr}^{-2} .

关键词: H_∞ 控制; 瑞利商; 变分原理; 精细积分

中图分类号: O232; O242 文献标识码: A

引 言

在 Doyle 等人发表 DGKF 论文后^[1], H_∞ 控制理论逐渐发展成熟, 其文中关于 H_∞ 量测反馈控制问题的基本方程是在可分性原理的基础上建立的, 这一点与 LQG 控制理论相同^[2-5]. 但是有限时间段 $[0, t_f]$ 控制问题的计算及参数 γ 的确定问题却尚未解决. 利用变分法, 文[6]和[7]中给出了求解状态反馈 H_∞ 控制问题及 H_∞ 滤波问题中黎卡提微分方程的精细积分方法, 而且其中的最优参数 γ_{cr}^{-2} 也可以利用对混合变量扩展的 W-W 算法来确定^[8], 因为这一参数正对应于广义瑞利商. 本文进一步将变分法用于推导 H_∞ 量测反馈控制问题的基本方程, 并介绍了求解这些方程的精细积分方法^[6, 7].

图 1 所示 H_∞ 控制系统由下列方程描述:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad (1a)$$

$$z = C_x x + D_{12} u, \quad (1b)$$

$$y = C_y x + D_{21} w, \quad (1c)$$

其中 x 是 n 维状态向量, 求导是对时间进行的; w 是 l 维白噪声; u 是 m 维控制向量; y 是 q 维量测向量; z 是 p 维输出向量; $p \geq m$, $l \geq q$; A , B_1 , B_2 , C_x , C_y , D_{12} 及 D_{21} 各矩阵有相应适当的维数. 并且

* 收稿日期: 2000.02.02;

基金项目: 国家重点基础研究发展规划基金资助项目(G1999032805)

作者简介: 钟万勰(1934—), 男, 浙江德清人, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士.

$$D_{12}^T D_{12} = I_m, D_{21} D_{21}^T = I_q, \tag{2}$$

其中 I_m 和 I_q 分别为 m 和 q 阶单位矩阵^[2]。

通过分式线性变换^[2]总可以得到上述一般的表达式。系统 Γ 的导引模定义为

$$\left. \begin{aligned} \|\Gamma\| &= \max_w \|\Gamma w\| / \|w\|, \\ \text{其中 } \|w\| &= \int_0^t w^T w d\tau / 2, \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

并且矩阵对 (A, B_2) , (A, B_1) 及 (A, C_y) , (A, C_z) 满足可控和可测条件。

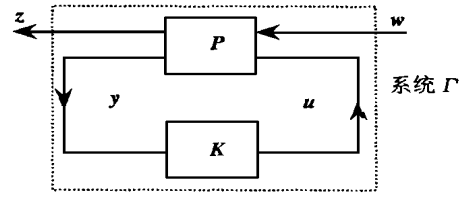


图 1 控制系统 Γ

如图 2 中所示, 时间区间 $[0, t_f]$ 可以分为过去时间段 $[0, t)$ 和未来时间段 $(t, t_f]$, 而 t 是当前时间。在过去时段 $[0, t)$, 控制向量 u 已经确定, 而 y 是量测数据, 所以都不需变分。对于过去时段 $[0, t)$, 需要根据方程(1)和向量 u, y 得到当前状态的滤波值 $\hat{x}(t)$, 因此是一个 H_∞ 滤波问题, 当然此时滤波值 $\hat{x}(t)$ 并不考虑与未来的连接条件。对于未来时段 $(t, t_f]$, 事件尚未发生, 因此是一个根据估计状态 $x(t)$ 确定 H_∞ 控制律的问题, 对 $x(t)$ 则应考虑与未来连接的影响。过去和未来两个时段的解需要在当前时刻 t 连接, 而连接将把状态滤波 $\hat{x}(t)$ 变换为状态估计 $x(t)$ 。连接条件要求状态估计 $x(t)$ 必须在时刻 t 连续, 另一个条件将可以通过变分原理自然导出。

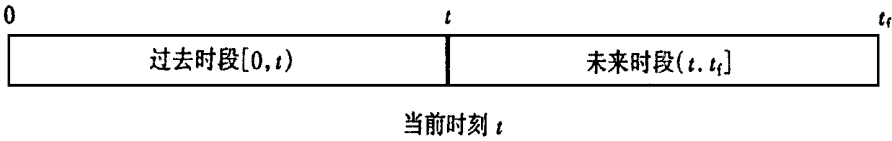


图 2 过去时段、未来时段及当前时刻

一般的 H_∞ 控制问题是量测反馈问题, 即根据量测 y 确定控制向量 u

$$u = Ky, \tag{4}$$

其中 K 是线性因果算子, 使得对于任意输入白噪声 w , 闭环系统的 Γ 导引模满足

$$\|\Gamma_{zw}\| < \gamma. \tag{5}$$

基于变分方法, 可以利用 $x(t)$ 在当前时刻的连续性条件导出未来时段 H_∞ 控制问题与过去时段 H_∞ 滤波问题的另一个连接条件, 进而得到相应的计算方法。

1 变分原理

首先分别介绍过去时段与未来时段的变分原理, 然后给出整个时段 $[0, t_f]$ 的组合变分原理。

1.1 未来时段 $(t, t_f]$ H_∞ 控制问题的变分原理

对于给定的参数 γ , 未来时段 H_∞ 控制问题的泛函指标为

$$J_c = \int_t^{t_f} (z^T z / 2 - \gamma^2 w^T w / 2) d\tau + x_f^T S_f x_f / 2, \quad \max_w \min_u J_c < 0. \tag{6}$$

约束条件为方程(1a)、(1b)及 $\tau = t$ 时的初始条件 $x = x(t)$, τ 为区间 $(t, t_f]$ 的时间变量。对式(1a)引入拉格朗日乘子向量 $\lambda_c(\tau)$, 并将其与(1b)都代入式(6)得到增广泛函指标

$$J_{cA} = \int_{t_f}^{t_f} [-\lambda_c^T \dot{x} + \lambda_c^T (Ax + B_1 w + B_2 u) - \gamma^2 w^T w / 2 + u^T u / 2 + u^T D_{12}^T C_z x + x^T C_z^T C_z x / 2] d\tau + x_f^T S_f x_f / 2, \quad \delta J_{cA} = 0, \quad (7)$$

其中 S_f 是给定的半正定矩阵, 下标 f 表示在 $\tau = t_f$ 时刻的取值。

因为在泛函指标积分中向量 $u(\tau)$ 和 $w(\tau)$ 不求导, 可以先执行变分得到

$$u = - (B_2^T \lambda_c + D_{12}^T C_z x), \quad w = \gamma^{-2} B_1^T \lambda_c. \quad (8)$$

代回式(7)并经过一些代数运算有

$$J_{cA} = \int_{t_f}^{t_f} [-\lambda_c^T \dot{x} + \lambda_c^T Ax - \lambda_c^T (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda_c / 2 + x^T C^T C x / 2] d\tau + x_f^T S_f x_f / 2, \quad \delta J_{cA} = 0, \quad (9)$$

其中 $A = A - B_2 D_{12}^T C_z$, $C^T C = C_z^T (I_p - D_{12} D_{12}^T) C_z$. 由此变分方程可以得到对偶微分方程以及在 $\tau = t_f$ 的自然边界条件

$$\dot{x} = Ax - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda_c, \quad (10a)$$

$$\dot{\lambda}_c = -C^T C x - A^T \lambda_c; \quad (10b)$$

$$\lambda_c = S_f x_f, \quad \text{当 } \tau = t_f \text{ 时}, \quad (11a)$$

其中求导对 τ 进行, 初始条件是

$$x(\tau) = x(t), \quad \text{当 } \tau = t \text{ 时}. \quad (11b)$$

根据末端边界条件(11a), 可设对偶方程(10a, b)的解为下列形式

$$\lambda_c(\tau) = X(\tau) x(\tau), \quad (12)$$

其中 $n \times n$ 维对称矩阵 $X(\tau)$ 及 n 阶向量 $x(\tau)$ 是待求量。将方程(12)代入对偶方程(10 a)及(10b)得到

$$\dot{X}(\tau) = -C^T C - A^T X - XA + X(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)X, \quad X(t_f) = S_f, \quad (13)$$

$$\dot{x}(\tau) = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)X]x, \quad x(\tau \rightarrow t) = x(t). \quad (14)$$

方程(13)就是黎卡提微分方程, 当参数 γ^{-2} 取次优值时, 这个非线性矩阵方程的解可以按文[9]中的精细积分法计算。将式(12)代入式(8)有

$$u = - (B_2^T X + D_{12}^T C_z) x, \quad w = \gamma^{-2} B_1^T X x. \quad (15)$$

上式代入(9)中可以导出

$$\delta J_{cA} = \delta x^T(t) [X(t) x(t)]. \quad (16)$$

由于未来时段把与过去时段连接的估计状态 $x(t)$ 作为其在 t 时刻的初始状态, 所以

$$\delta J_{cA} = \delta x^T(t) [X(t) x(t)]. \quad (16a)$$

1.2 过去时段 $[0, t] H_\infty$ 滤波问题的变分原理

滤波问题要对下列泛函指标取极值

$$J_p = \int_0^t [-w^T w / 2 + \gamma^{-2} (\hat{z} - C_z x - D_{12} u)^T (\hat{z} - C_z x - D_{12} u) / 2] d\tau - (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) / 2, \quad \max_w J_p, \quad (17)$$

其中 u 在过去时段已经确定, \hat{x}_0 是给定初始状态, $\hat{z} = C_z \hat{x} + D_{12} u$ 是依赖于 $\tau = t$ 处边界条件的滤波或估计输出。当不考虑在 $\tau = t$ 的连接条件时是滤波, 而考虑方程(16)则是估计问题。因此 \hat{z} 不应参加变分。

因为极值的约束条件是方程(1a, c), 需对式(1a)引入拉格朗日乘子 $\lambda(\tau)$, 得到增广的泛函指标

$$\begin{aligned}
 J_{pA} = & \int_0^t \bar{\gamma}^2 (\hat{z} - C_z x - D_{12} u)^T (\hat{z} - C_z x - D_{12} u) / 2 + \\
 & \lambda^T (-x + Ax + B_1 w + B_2 u) - w^T w / 2 \, d\tau - \\
 & (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) / 2, \quad \delta J_{pA} = 0
 \end{aligned} \quad (18)$$

对 w 的变分可以先执行, 但这仍然是一个式(1c) 约束下的条件极值问题, 再引入一个拉格朗日乘子 p , 令

$$r(w, p) = p^T (y - C_y x) - p^T D_{21} w + \lambda^T B_1 w - w^T w / 2, \quad \min_w \max_p r(w, p),$$

w 使 r 取极大值得 $w = B_1^T \lambda - D_{21}^T p$, p 使 r 取极小值有

$$p = - (y - C_y x - D_{21} B_1^T \lambda), \quad w = D_{21}^T (y - C_y x) + (I - D_{21}^T D_{21}) B_1^T \lambda \quad (19)$$

并且

$$r = \lambda^T B_1 B_1^T \lambda / 2 - (y - C_y x - D_{21} B_1^T \lambda)^T (y - C_y x - D_{21} B_1^T \lambda) / 2,$$

所以

$$\begin{aligned}
 J_{pA} = & \int_0^t [-\lambda^T x + \lambda^T Ax + \lambda^T \overline{BB}^T \lambda / 2 - x^T (C_y^T C_y - \bar{\gamma}^2 C_z^T C_z) x / 2 + \\
 & x^T C_y^T y + \lambda^T (B_1 D_{21}^T y + B_2 u) - \bar{\gamma}^2 x^T C_z^T (\hat{z} - D_{12} u)] \, d\tau - \\
 & (x(0) - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0) / 2 + \text{常数项}, \quad \delta J_{pA} = 0,
 \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $A = A - B_1 D_{21}^T C_y$, $\overline{BB}^T = B_1 (I - D_{21}^T D_{21}) B_1^T$. 执行变分可以得到对偶微分方程组, 该方程组同时适用于滤波及估计问题.

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + \overline{BB}^T \lambda + B_1 D_{21}^T y + B_2 u, \\
 \dot{\lambda} &= (C_y^T C_y - \bar{\gamma}^2 C_z^T C_z) x - A^T \lambda - C_y^T y + \bar{\gamma}^2 C_z^T (\hat{z} - D_{12} u).
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

在 $\tau = 0$ 时的自然边界条件为

$$\lambda(0) = P_0^{-1} (x(0) - \hat{x}_0), \quad \text{或} \quad x(0) = \hat{x}_0 + P_0 \lambda(0). \quad (22)$$

对偶微分方程(21)在 $\tau = t$ 还应有另一个边界条件 $\lambda(t) = \lambda(t)$, $\lambda(t)$ 应该由与未来时段的连接条件确定, 这一点后文将讨论. 满足(21)和(22)的解可以导出

$$\delta J_{pA} = - [\delta x(t)]^T \lambda(t), \quad (23)$$

其中 $\lambda(t)$ 是 $\lambda(t)$ 的估计. 如果仅考虑滤波问题, 在 $\tau = t$ 的边界条件为 $\lambda(t) = 0$, 文[7]中已给出其精细积分解.

1.3 整个时段 $[0, t_f]$ 的组合变分原理

上文的推导是对未来及过去时段分别进行的, 对于量测反馈 H_∞ 控制问题, 则需考虑整个时段在当前时刻 t 的连接. 因此需要将式(6)的泛函指标 J_c 及式(17)的泛函指标 J_p 组成一个全时段的泛函指标, 从这个指标可以自然导出在当前时刻 t 的连接条件.

按照系统 Γ 的导引模定义式(3), 输入 w 的模也应按式中定义确定, 其中的时间积分并未区分过去和未来时段. 所以将 J_c 和 J_p 组合在一起时必须使 w 的模与式(3)中的一致. 所以组合泛函指标为

$$J = J_p + \bar{\gamma}^2 J_c, \quad \delta J = 0, \quad (24)$$

其中 $\bar{\gamma}$ 是一给定(次优)参数. 因为 J_c 和 J_p 各自的时间区间没有重叠, 仅在当前时刻连接, 所以各自区段内部的变分可以按前两节所述分别进行, 推导各自的微分方程, 只有时刻 t 的边界条件尚未确定. 两个区段在时刻 t 的变分式已在式(16a)及(23)中分别给出. 状态向量 $x(t)$ 是连续穿越时刻 t 的, 因此其变分 $\delta x(t)$ 在 t 的两侧也应一致, 所以变分式(24)给出

$$\left. \begin{aligned} \delta J &= \delta J_p + \gamma^{-2} \delta J_c = \delta \mathbf{x}^T(t) [-\lambda(t) + \gamma^{-2} \mathbf{X}(t) \mathbf{x}(t)] = 0 \\ \text{或} \quad \lambda(t) &= \gamma^{-2} \mathbf{X}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

这是过去时段估计问题的另一个在 $\tau = t - 0$ 的边界条件。

1.4 过去时段 $[0, t]$ 两点边值问题的解

当边界条件是 $\lambda(t) = 0$ 时, 其解是一个次优滤波问题, 可以按文[7] 中的精细积分方法计算, 即

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Y}(t) \lambda(t), \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T - \mathbf{Y}(\mathbf{C}_y^T \mathbf{C}_y - \gamma^{-2} \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z) \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{P}_0, \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Y}\mathbf{C}_y^T(\mathbf{y} - \mathbf{C}_y \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_z \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \quad (29)$$

但因现在的边界条件是(25), 所以式(26)中的向量 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\lambda(t)$ 要由 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 和 $\lambda(t)$ 来代换。

根据(25)的连接条件有

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}(t) \mathbf{X}(t)]^{-1} \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (30)$$

所以 H_∞ 量测反馈控制的状态估计 $\mathbf{x}(t)$ 可以在 H_∞ 状态反馈控制及 H_∞ 滤波计算的基础上进行计算。对于给定的参数 γ , 当 $\mathbf{X}(t)$ 、 $\mathbf{Y}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 计算出后, 状态估计 $\mathbf{x}(t)$ 就可以按(30)得到, 但这一方程意味着矩阵 $[\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}(t) \mathbf{X}(t)]^{-1}$ 在整个区段 $[0, t_f]$ 必须是非奇异的。此条件还可以简化为

$$\det[\mathbf{Y}^{-1}(t) - \gamma^{-2} \mathbf{X}(t)] > 0 \quad (31)$$

注意到矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 和 $\mathbf{Y}^{-1}(t)$ 是正定的, 因此式(31)的条件相当于最小本征值的确定。如果对任意时刻 t , 瑞利商最小本征值满足下述不等式

$$\omega^2 = \min_x \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Y}^{-1}(t) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{X}(t) \mathbf{x}} > \gamma^{-2}, \quad (32)$$

则式(31)成立。反之亦然。

状态估计的方差可按下述方式计算。令所有量测 $\mathbf{y} = 0$, 而干扰 $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$ 仅在时刻 t 存在, 其中 \mathbf{e}_i 是单位矩阵 \mathbf{I}_n 的第 i 个列向量。这样可以得到

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta J_p + \gamma^{-2} \delta J_c = \delta \mathbf{x}^T(t) [-\lambda(t) + \gamma^{-2} \mathbf{X}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}_i] = 0 \\ &\quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

因为对所有的 $i = 1, \dots, n$ 均有 $\mathbf{y} = 0$, 所以式(25)中的 $\hat{\mathbf{x}}(t) = 0$ 。将 $\lambda(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t) \mathbf{x}(t)$ 代入上述方程得到 $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}(t) = (\mathbf{Y}^{-1}(t) - \gamma^{-2} \mathbf{X}(t))^{-1} \mathbf{e}_i (i = 1, \dots, n)$ 。以所有的 $\mathbf{x}_i(t)$ 作为第 i 个列向量组成 $\mathbf{Z}(t)$

$$\mathbf{Z}(t) = (\mathbf{Y}^{-1}(t) - \gamma^{-2} \mathbf{X}(t))^{-1} \quad (33)$$

2 算法及算例

在文[6]及[7]中已经给出了状态反馈 H_∞ 控制和 H_∞ 滤波的精细积分算法, 这里将仅介绍量测反馈 H_∞ 控制问题的计算中需增加的步骤。虽然时间从 0 到 t_f 是连续的, 计算只能给出在有限数目时间点的值, 通常将整个区间 $[0, t_f]$ 划分为等长的 N_{int} 段。如果系统是定常的, 则对任一给定参数 γ , 可以按精细积分法计算长度为 $\eta = t_f / N_{int}$ 的区段, 而结果可以用于所有子区段。引入未来时段 H_∞ 控制问题及过去时段 H_∞ 滤波问题的区段混合能定义, 即可精确计算矩阵 \mathbf{X}_k 和 $\mathbf{Y}_k (k = 1, \dots, n)$ 在 $N_{int} + 1$ 个点的值。参数 γ 也可保证处于使次优状态反馈

H_∞ 控制和 H_∞ 滤波问题可解的范围内·

对于参数 γ 尚需检验条件(32) 在 $N_{\text{int}} + 1$ 个区段划分点是否成立· 在检验中, 一般仅有一个小区域内的点是重要的, 在这一区域内, 区段划分应当稠密一些, 而 2^N 类的精细积分方法恰可满足这一要求·

前文中瑞利商条件应当在整个时间区间内满足, 但实际上只能在有限个区段划分时刻计算· 如果不仅可以计算在划分点的最小本征值, 还可计算在这些点的瑞利商导数, 则条件(32) 的检验将更容易· 因为矩阵 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 分别满足黎卡提方程(13) 和(27), 其导数是容易计算的· 众所周知, 根据 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 计算瑞利商的导数也很简单·

量测反馈问题的方程由(30)、(31) 和(33) 给出· 计算分为两步, 第一步是确定次优参数 γ , 第二步是方程(28) 的积分和(30) 的计算· 下面给出计算参数 γ 的几个例子·

例 1 首先给出一个一维问题, 并将计算结果与解析解比较· 一般说来, 非线性矩阵黎卡提方程的纯解析解是很难得到的, 但一维黎卡提方程解析解可以得到, 从而可以将精细积分法的结果与之比较·

设 $n = 1$, $A = 0.8$, $B_1 = [0.8, 0]$, $B_2 = 2.0$, $C_1 = 3.0$, $C_2 = [0.8, 0]^T$, $S_1 = 0.01$, $P_0 = 0.01$, $D_{12} = [0, 1]^T$, $D_{21} = [0, 1]$ · 时间区间为 $(0, t_f) = (0, 0.8)$ · 现在的问题是确定量测反馈 H_∞ 控制问题的最优参数 γ_{cr}^{-2} , 并求解过去、将来时段黎卡提方程的解 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 及其组合方差 $Z(t)$ ·

将数据代入方程(13) 和(27) 得到一维问题的黎卡提方程

$$\dot{X} = -0.64 - 1.6X + (9.0 - 0.64\gamma^{-2})X^2, \quad X(0.8) = 0.01;$$

$$\dot{Y} = 0.64 + 1.6Y - (4.0 - 0.64\gamma^{-2})Y^2, \quad Y(0) = 0.01;$$

表 1 例 1 中的方差值

时间	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$X(t)$	1.430 932	1.216 512	1.038 753	0.889 047	0.761 284	0.651 009
$Y(t)$	0.01	0.043 976	0.080 115	0.117 988	0.157 065	0.196 743
$Z(t)$	0.011 225	0.074 266	0.219 171	0.589 149	1.776 944	8.368 041
时间	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
$X(t)$	0.554 896	0.470 413	0.395 595	0.328 899	0.269 092	0.215 179
$Y(t)$	0.236 378	0.275 331	0.313 005	0.348 884	0.382 551	0.413 708
$Z(t)$	577 614.2	21.938 593	5.592 052	2.787 334	1.777 840	1.287 594
时间	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	
$X(t)$	0.166 347	0.121 927	0.081 362	0.044 185	0.01	
$Y(t)$	0.442 176	0.467 883	0.490 852	0.511 181	0.529 024	
$Z(t)$	1.006 730	0.828 009	0.705 731	0.617 516	0.551 258	

其中 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 是标量函数, 可以找到其解析解· 下面的数据是同时由解析法和精细积分方法计算的, 因为两种方法给出几乎一致的结果, 文中只列出一种方法的结果· 当分别考虑 H_∞ 控制问题和 H_∞ 滤波问题时, 临界值分别为 $\gamma_{\text{cr}}^{-2} = 11.386 24$ 和 $\gamma_{\text{cr}}^{-2} = 19.198 74$, 但按照条

件(32)可以确定临界值为 $\gamma_{cr}^2 = 7.623\ 978$ 。一维矩阵 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 及 $Z(t)$ 的值如表1所示。因为参数 γ_{cr}^2 的值减小,黎卡提方程(13)和(27)的解没有出现奇异性,但量测反馈中的 $Z(t)$ 在 $[0, t_f]$ 区间内的 $Z(0.30)$ 点是一个奇异点。

例2 现在给出一个多维系统的例子,由于黎卡提方程是非线性的,一般只能求数值解。精细积分法可以给出计算机精度范围内的精确解。给定数据为 $n = 5, t_f = 4.0$, 及

$$A = \begin{bmatrix} -0.08 & -3.0 & 0 & 2.0 & 0.5 \\ 0.04 & -1.4 & 10.0 & 0 & 0 \\ -0.01 & -4.0 & -2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.001 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \\ -3.3 \\ 0 \\ 1.1 \end{bmatrix};$$

$$S_f = I_n \times 1E-3; P_0 = I_n \times 1E-3;$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.0 & 0.0 \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = [0\ 0\ 0]^T, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由精细积分法计算得到的量测反馈 H_∞ 控制的最优参数为 $\gamma_{cr}^2 = 0.290\ 504$, 而按 H_∞ 状态反馈及 H_∞ 滤波分别计算得到的最优参数为 $\gamma_{cr}^2 = 1.266\ 203$ 及 $\gamma_{cr}^2 = 1.999\ 740$, 可见差别很明显。 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 和 $Z(t)$ 矩阵也可同时计算出来,为节省篇幅这里略去。需指出的是方差阵在 $t = 2.0$ 点几乎奇异。当参数取最优值时, $Z(t)$ 总会在某个时间点出现奇异。

3 结束语

H_∞ 控制理论是解决鲁棒性问题的现代理论。但 H_∞ 控制理论需要较深的数学工具,离不开近世代数、算子理论与泛函分析等多方面的数学基础,因而给理论的实际应用带来一些困难。结构力学与最优控制的模拟理论构建了两大领域之间的桥梁,提供了深入地认识其物理本质的途径。文[6]和[7]已经指出 H_∞ 状态反馈控制及 H_∞ 滤波中的最优参数 γ_{cr}^2 对应于结构力学中柱形结构弹性稳定性的最小临界值或结构振动的基本固有频率。根据这个模拟关系,精细积分法和计算结构本征值的扩展的 W_W 算法可以用来求解复杂的 H_∞ 控制问题。本文进一步拓展了其中的变分法求解体系,导出了量测反馈 H_∞ 控制问题的泛函指标,并推导出相应的方程,所以精细积分法可以用于该问题中临界参数的计算及相应方差矩阵的确定。

[参 考 文 献]

[1] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State_space solution to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Trans Automat Control, 1989, 34(8): 831—847.

[2] Green M, Limebeer D J N. Linear Robust Control [M]. New Jersey: Prentice_Hall, 1995.

[3] Kwakernaak H, Sivan R. Linear Optimal Control Systems [M]. New York: Wiley, 1972.

[4] Stengel R F. Stochastic Optimal Control [M]. New York: John Wiley and Sons, 1986.

[5] Zhou K M, Doyle J C, Glover K. Robust and Optimal Control [M]. New Jersey: Prentice_Hall, 1996.

[6] 钟万勰. H_∞ 控制状态反馈与瑞利商精细积分[J]. 计算力学学报, 1999, 15(1): 1—8.

[7] ZHONG Wan_xie, Williams F W. H_∞ filtering with secure eigenvalue calculation and precise integra-

- tion[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1999, **46**: 1017—1030.
- [8] ZHONG Wan_xie, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick_Williams algorithm to mixed variable systems[J]. *Trans ASME J Vib Acous*, 1997, **119**(7): 334—340.
- [9] 钟万颢. 矩阵黎卡提方程的精细积分[J]. *计算结构力学及其應用*, 1994, **11**(2): 113—119.

Variational Method and Computation for H_∞ Control

ZHONG Wan_xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: The variational approach is further applied to the measurement feedback H_∞ control problems. Based on the induced norm description of the system Γ , the variational functionals J_c and J_p of state feedback H_∞ control for the future time interval $(t, t_f]$, and of H_∞ filter for the past time interval $[0, t)$, respectively, are combined together to generate the variational functional of the measurement feedback for the whole time interval $[0, t_f]$. The connection condition at the present time t is that the estimated state vector $x(t)$ must be continuously extended to be the initial condition of the future state vector estimation. Another connection condition for the dual vector $\lambda(t)$ can be naturally derived from the variational principle. The equations thus derived show that the third condition for the optimal parameter γ_{cr}^{-2} is again a bound of the smallest Rayleigh quotient. Therefore, the precise integration method developed formerly to determine the optimal parameter γ_{cr}^{-2} of H_∞ control and of H_∞ filter respectively can be further applied to the determination of the optimal parameter.

Key words: H_∞ control; Rayleigh quotient; variational principle; precise integration