应用数学和力学, 第 21 卷 第 12 期(2000 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 12_1301_09

带未知函数多项式附加项的 Navier_Stokes 方程的 C^k 不稳定性

何幼桦, 施惟慧

(上海大学 理学院 数学系, 上海 210800)

(钱伟长推荐)

摘要: 应用分层理论确定了一类变形 Navier_Stokes 方程的解空间构造, 由其横截层是空集, 证明了这一类方程不存在 $C^k(k\ \ 2)$ 稳定解

关 键 词: Navier_Stokes 方程; 不稳定方程; 横截层
中图分类号: O175 29 文献标识码: A

引 言

描写粘性、不可压缩体运动的 Navier_Stokes 方程[1], 被应用到众多不同的领域时, 出现了各种不同的 变形 , 带未知函数的多项式附加项的就是一类, 磁流体力学中的磁通量方程[2] 就是一个典型:

$$\begin{cases} \frac{\boldsymbol{u}}{t} + (\boldsymbol{u}\quad)\boldsymbol{u} = \quad {}^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{}\quad p - 2\quad \boldsymbol{u} + \frac{1}{}(\quad \boldsymbol{b})\quad \boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \\ \boldsymbol{b}/\ \ t = \quad {}^2\boldsymbol{b} + \quad (\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{b}) - \quad {}^{-1}\quad q + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}), \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{b} = 0, \end{cases} \tag{A}$$

其中 $(\boldsymbol{x}, t)\quad R^3\quad R$, 未知函数组是 $(u_1, u_2, u_3, p, b_1, b_2, b_3, q)$ 这一方程其实可看成互有关联的两组 Navier_Stokes 方程, 与 Navier_Stokes 方程的原形相比, 其不同点仅在于多出了未知函数组的多项式附加项 关于(A) , 文[3] 中已讨论了其解空间构造, 并证明了它的 $C^k(k\ \ 2)$ 不稳定性 本文将对 $R^3\quad R$ 中的 Navier_Stokes 方程原形添加未知函数的多项式附加项后的 $C^k(k\ \ 2)$ 稳定性问题进行讨论, 它的一般形式为:

$$D:\begin{cases} \boldsymbol{u}/\ \ t + (\boldsymbol{u}\quad)\boldsymbol{u} = -\quad {}^{-1}\quad p + \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}, p), \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \end{cases} \tag{A}$$

其中 $(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t)\quad R^3\quad R$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = (F_1, F_2, F_3)$, 常数 $\ > 0$、$\ > 0$, 未知函数组是 $(\boldsymbol{u}, p) = (u_1, u_2, u_3, p)\quad R^3\quad R_+$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}, p) = (P_1^{m_1}, P_2^{m_2}, P_3^{m_3})$ 是关于 $(\boldsymbol{u}, p)$ 的 m_1、m_2、m_3 次常系数多项式

收稿日期: 2000_03_15; 修订日期: 2000_07_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971054); 上海市自然科学基金资助项目(99ZA14034)
作者简介: 何幼桦(1960) , 男, 广东人, 讲师.

设 V、Z 是 C 微分流形, D $J^{k_0}(V, Z)$ 是一个 k_0 阶偏微分方程组, 本文使用以下符号:

$P_l(\ _1, \ _2)$ $_1$ 到 $_2$ 的 C^p 嵌入空间, 并具有 C^p 拓扑;

$I_k(V, Z)$ $J^k(V, Z)$ 的 Cartan_Ehresmann 理想;

e Ehresmann 对应;

g C 流形 X_1 到 X_2 的 C 浸入 $g: X_1$ X_2 的诱导 $g: X_1$ $G_n(X_2)$ ($\dim X_1 = n$, $\dim X_2 = N$, N n) 定义为: 对每个点 x_0 X_1, $g(x_0) = \mathrm{Im} Dg$;

$D_* = \ _l D_l$, $(l = -1, 0, 1, 2, \ )$ D 的本方程;

D_l D 的 l 阶本方程;

$E_{l,k}(V, Z)$, $W_{l,k}(V, Z)$ Shih_ 典则系统, $E_{l,k}(V, Z)$ $G_l^*(TJ^k(V, Z))$ $_{J^k(V,Z)} J^{k+1}(V, Z)$, $W_{l,k}(V, Z)$ $G_l^*(TJ^k(V, Z))$;

$S^t_{l,k}(D)$ $S^t_{l,k}(D)$ $W_{k,l}(V, Z)$, D 的 (l, k) 阶横载层;

$T_{l,k}(D)$ D 的 (l, k) 阶陷阱;

$^k_k: J^k(V, Z)$ $J^k(V, Z)$, $(k$ $k)$ 典则投影

这些符号的定义参看[4]

1 定义与引用的定理

设 V、Z 是没有边界的 C 流形, $\dim V = n$ 2, V_0 V 是 V 的一个相对紧致开集, V_0 V, X、Y 是 V_0 边界的闭子集, 并假定

$$\mathrm{co\,dim}_V X = \mathrm{co\,dim}_V Y = 1, \quad \mathrm{co\,dim}_V (X \quad Y) \quad 2,$$

i、h、k_0、l 是 4 个给定的正整数, 且

$$0 < i \quad h \quad k_0 \quad l < + \quad ,$$

D $J^{k_0}(V, Z)$, E $J^{k_0-h}(V, Z)$ 是两个子集

设 $P_l(X, J^{k_0-i}(V, Z))$ ($P_l(X, J^{k_0-i}(V, Z))$ 具有 C^{l-k_0+i} 拓扑), 并满足以下条件:

1) $^{k_0-i}_{-1}$ $=$ $= Id_X$;

2) Im D_{k_0-i};

3) $^* = 0$, I_{k_0-i};

4) Im$(\quad)(X \quad Y)$ E

这样的 就称为 D 关于 E, V_0, X, Y 的一组混合条件 将上述 的集合记为 $M(X, D, Y, E)$

所谓 D 关于 E、V_0、X、Y 的混合问题, 是在 V_0 X Y 的邻域寻找 D 的解 $\boldsymbol{u}$ 的芽, 使得

$$j^{k_0-i}\boldsymbol{u}\,|_X = \quad, \quad \mathrm{Im}(j^{k_0-h}\boldsymbol{u})(Y) \quad E$$

定义 设 $_0$ $M(X, D, Y, E)$ 如果它满足以下条件, 则称其所定义的混合问题是适定的(也说混合条件 $_0$ 是适定的):

( ) 对应于 $_0$, D 存在一个 C^l 解 $\boldsymbol{u}_0$;

( ) $\boldsymbol{u}_0$ 关于 D 的重数[5] 是唯一的;

( ) 在 $M(X, D, Y, E)$ 中, 存在 $_0$ 的邻域 $_0$ 使得对任何 $_0$, 上述条件( )、( ) 成立

如果上述三个条件不被满足, 则称此混合问题或混合条件 $_0$ 是不适定的 如果对任何 $M(X, D, Y, E)$ 都是不适定的, 则称方程组 D 是一个 $C^l(l$ $k_0)$ 意义下的不稳定方程 以

下定理将给出至少存在一个混合条件是适定的必要条件　为此, 假设 D 是确定的, 即

$$\mathrm{co\ dim}_E E_{n-1,k_0-1}(D)=\dim Z,$$

这里 $E=\ {}^{-1}_{n-1,k_0-1}(W_{n-1,k_0-1}(V,Z)\quad G^*_{n-1}(D_{k_0-1}))$, 同时假定

$$_{n-1,k_0-1+q}: E_{n-1,k_0-1+q}(V,Z)\quad W_{n-1,k_0-1+q}(V,Z)\qquad (0\quad q\quad l-k_0+1)$$

已被分层[6]　记

$$W_{n-1,p}(D)=W_{n-1,p}(V,Z)-(S^t_{n-1,p}(D)\quad T_{n-1,p}(D)),$$

$$W^{\#}(D,i,l)=\ _{k_0-1\quad p\quad l}\mathrm{Im}\ {}^p_{k_0-i}(W_{n-1,p}(D)),$$

其中 ${}^p_q$, ${}_p$ 是典则对应:

$${}^p_q:\ W_{n-1,p}(V,Z)\quad W_{n-1,q}(V,Z)\qquad (0\quad q\quad p),$$

$${}_p:\ W_{n-1,p}(V,Z)\quad G^*_{n-1}(TJ^p(V,Z))\quad G_{n-1}(TV)$$

设 $X\quad X$, $\mathrm{co\ dim}_X X=1$, 并记 $X=\mathrm{Im}(Id_X)(X)$　我们将引用以下定理[7]:

引用定理　假设下条件成立:

(　) $X_{k_0-1}\quad S^t_{n-1,k_0-1}(D)$　;

(　) $X_{k_0-i}\quad W^{\#}(D,i,l)$ 是 $X_{k_0-i}\quad G^*_{n-1}(D_{k_0-i})$ 的一个稀疏集

则任何一个　$M(X,D,Y,E)$ 都是不适定的

例

1) $R^3\quad R$ 和 $R^2\quad R$ 上的 Navier_Stokes 是 $C^k(k\quad 2)$ 不稳定方程[4]

2) 强迫耗散系统的对流方程是 $C^k(k\quad 2)$ 不稳定方程[8]

3) 氦_　完备方程是 $C^k(k\quad 2)$ 不稳定方程[9]

4) 磁通量方程是 $C^k(k\quad 2)$ 不稳定方程[3]

本文将证明以下定理:

定理　带多项式附加项的 Navier_Stokes 方程(A) 是 $C^k(k\quad 2)$ 不稳定方程

2　定 理 的 证 明

我们将通过对 $_{n-1,k-1}: E_{n-1,k-1}(V,Z)\quad W_{n-1,k-1}(V,Z)$ 的分层, 得知 D 的 $(n-1,k_0-1)=(3,1)$ 阶横截层是空集, $S^t_{3,1}(D)=$　, 并由其它层的末方程就可证明(A) 是 $C^k(k\quad 2)$ 不稳定方程

步骤如下:

第一, 计算 D 的本方程 D_*;

第二, 对 $_{3,1}: E_{3,1}(V,Z)\quad W_{3,1}(V,Z)$ 分层

为计算方便, 记 $(\boldsymbol{x},t)=(x_1,x_2,x_3,t)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\quad R^3\quad R=V$, $(u_1,u_2,u_3,p)=(u_1,u_2,u_3,u_4)\quad R^3\quad R_+$, 并将 $(P_1^{n_1},P_2^{n_2},P_3^{n_3})$ 简记为 (P_1,P_2,P_3)

2 1　计算本方程 D_*

将(A) 看成 $J^2(V,Z)$ 的子集合, $D\quad J^2(V,Z)$, 并使用 $J^2(V,Z)$ 的局部坐标将(A) 改写如下:

$$D:\begin{cases} g_1:\quad (p^1_{11}+p^1_{22}+p^1_{33})+\quad {}_1=0,\quad g_2:\quad (p^2_{11}+p^2_{22}+p^2_{33})+\quad {}_2=0,\\ g_3:\quad (p^3_{11}+p^3_{22}+p^3_{33})+\quad {}_3=0,\quad g_4:\ p^1_1+p^2_2+p^3_3=0,\end{cases}\qquad (1)$$

其中

$$_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u}) = - \left[p^j_4 + u_1 p^j_1 + u_2 p^j_2 + u_3 p^j_3 + p^4_j / \quad \right] +$$
$$(F_j(\boldsymbol{x}) + P_j(\boldsymbol{u})) \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{2}$$

在以下的计算中,假设 $F_i \quad C$,并将$(F_j + P_j)$ 记为 $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$,并将(1) 中各式左侧依次记为 g_1、g_2、g_3、g_4,则可将(1) 表示为

$$D = V(g_1, g_2, g_3, g_4) \quad J^2(V, Z) \tag{3}$$

(这里 $V(f)$ 代表对应 $f: J^k(V, Z) \quad R$ 的零点集合, $V(f_1, f_2) = V(f_1) \quad V(f_2)$ 等等)

按照定义计算,可得 D 的准本方程[4] $D_* = {}_l D_l, (l = -1, 0, 1, 2, \quad)$ 如下:

$$\begin{cases} D_{-1} = J^{-1}(V, Z) = V, \\ D_0 = J^0(V, Z) = V \quad Z, \\ D_1 = V(g_4) = \left\{ p^1_1 + p^2_2 + p^3_3 = 0 \right\} \quad J^1(V, Z), \\ D_2 = V(g_j, e(g_4), g_4) \quad J^2(V, Z), \\ D_3 = V(e_{i_1}(g_j), e_{ii_1}(g_4), g_j, e_i(g_4), g_4) \quad J^3(V, Z), \\ \\ D_k = V(e_{i_1 \quad i_{k-2}}(g_j), e_{ii_1 \quad i_{k-2}}(g_4), \quad , e_{i_1}(g_j), e_{ii_1}(g_4), g_j, e_i(g_4), g_4) \\ \qquad J^k(V, Z), \\ \qquad\qquad (i, i_1, i_2, \quad , i_{k-2} = 1, 2, 3, 4; i \quad i_1 \qquad i_{k-2}; j = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{4}$$

由(4) 可看出,

$$D_2 \quad D, \ D_2 \quad D \tag{5}$$

为决定 D 的本方程 $D_* = {}_l D_l$,首先注意 D_3 的表达式:

$$\begin{cases} e_{i_1}(g_j): \quad (p^j_{1^2 i_1} + p^j_{2^2 i_1} + p^j_{3^2 i_1}) + e_{i_1}(\quad_j) = 0, \\ e_{ii_1}(g_4): p^1_{1ii_1} + p^2_{2ii_1} + p^3_{3ii_1} = 0, \\ g_j: \quad (p^j_{1^2} + p^j_{2^2} + p^j_{3^2}) + \quad_j = 0, \\ e_i(g_4): p^j_{1i} + p^2_{2i} + p^3_{3i} = 0, \\ g_4: p^1_1 + p^2_2 + p^3_3 = 0, \end{cases} \tag{6}$$
$$(i, i_1 = 1, 2, 3, 4, i \quad i_1; j = 1, 2, 3),$$

则可发现(6) 中各式隐含着如下关系:

$$e_1(\quad_1) + e_2(\quad_2) + e_3(\quad_3) = 0$$

即 $$g: \frac{1}{\quad}(p^4_{11} + p^4_{22} + p^4_{33}) + \quad_4 = 0, \tag{7}$$

式中

$$_4 = (p^1_1)^2 + (p^2_2)^2 + (p^3_3)^2 + 2p^1_2 p^2_1 + 2p^1_3 p^3_1 + 2p^2_3 p^3_2 - \left(\frac{F_1}{x_1} + \frac{F_2}{x_2} + \frac{F_3}{x_3} \right) \tag{8}$$

将(7) 式左侧记为 g

以上结果表示 D_3 实际上应由以下关系所确定:

$$D_3 = V(e_{i_1}(g_j), e_{ii_1}(g_4), g_j, g, e_i(g_4), g_4) \tag{9}$$

记 $$D_3 = D \quad J^3(V, Z)$$

现在从 D 开始, 计算它的准本方程 $(D)_*$ 有:

$$\begin{cases} (D)_{-1} = J^{-1}(V, Z) = V, \\ (D)_0 = J^0(V, Z) = V \quad Z, \\ (D)_1 = V(g_4) = \left\{ p_1^1 + p_2^2 + p_3^3 = 0 \right\}, \\ (D)_2 = V(g_j, g, e_i(g_4), g_4), \\ (D)_3 = V(e_{i_1}(g_j), e_{i_1}(g), e_{ii_1}(g_4), g_j, g, e_i(g_4), g_4), \\ \\ (D)_k = V(e_{i_1 \quad i_{k-2}}(g_j), e_{i_1 \quad i_{k-2}}(g), e_{ii_1 \quad i_{k-2}}(g_4), \quad , g_j, g, e_i(g_4), g_4), \end{cases} \tag{10}$$

$$(i, i_1, \quad , i_{k-2} = 1, 2, 3, 4, i \quad i_1 \quad \quad i_{k-2}; j = 1, 2, 3)$$

从(10) 可看出, 显然有

$$\begin{cases} (D)_2 \quad D_2, (D)_2 \quad D_2, \\ (D)_l \quad D_l, (D)_l \quad D_l \quad (l \quad 3) \end{cases} \tag{11}$$

有了 $(D)_*$ 之后, 可证明对任何 $l \quad 0$, 有

$$ {}^{l}_{l-1}((D) \ ) = (D)_{l-1} \tag{12}$$

(这里略去了繁复的计算过程) (12) 式表明: D 准本方程与其本方程重合:

$$(D)_* = (D)_*$$

即对任何 $l \quad -1$, 有

$$(D)_l = (D)_l \tag{13}$$

根据定义[4], D 的本方程 $D_* = {}_l D_l$,

$$D_l = (D)_l = (D)_l \quad (l = -1, 0, 1, 2, \quad) \tag{14}$$

有了 D_*, 就可进一步构造 Shih_ 典则系统, 并进而得到 D 的解空间构造分析

2 2 $E_{3, k-1}(D)$, $W_{3, k-1}(D)$ 及分层

设 $G_3^*(TJ^{k-1}(V, Z)), (V = R^3 \quad R, Z = R^3 \quad R_+)$ 则由典则投影

$$p: G_3^*(TJ^{k-1}(V, Z)) \quad J^{k-1}(V, Z),$$

点 $p(\ ) \quad J^{k-1}(V, Z)$ 可表示为:

$$p(\ ) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, p_j^{iK}) = (x_1, \ , \ , x_4, \ , \ , u_1, \ , \ , u_4, p_j^{iK}) \ I \ J^{k-1}(V, Z),$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, j^K = j_1^{K_1} j_2^{K_2} j_3^{K_3} j_4^{K_4}, K_j \setminus 0, \ |K| = K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \ |K| [\ k - 1)$$

引理 对任何 $k \setminus 2$, D 的 $(3, k-1)$ 阶典则分层是:

$$\begin{aligned} W_{3, k-1}(V, Z) &= W_{3, k-1}(D) \ G \ T_{3, k-1}(D) = \\ &S^0_{3, k-1}(D) \ G \ S^4_{3, k-1}(D) \ G \ T_{3, k-1}(D) \# \end{aligned} \tag{15}$$

纤维空间

$$Q^0_{3, k-1}: E^0_{3, k-1}(D) \ y \ S^0_{3, k-1}(D),$$

$$Q^4_{3, k-1}: E^4_{3, k-1}(D) \ y \ S^4_{3, k-1}(D) \#$$

其纤维的维数分别是 0 和 4# 并且

( ) $(3, k-1)$ 阶横截层是空集 $S^t_{3, k-1}(D) = \ ;$

( ) $(3, k-1)$ 阶陷阱 $T_{3, k-1}(D)$ 在 $W_{3, k-1}(V, Z)$ 中稠密#

证明 $W_{3, k-1}(V, Z)$ 具有一个开覆盖, 它由 $G_3^*(TJ^{k-1}(V, Z))$ 的 4 个开集 $U_i(i = 1 \sim 4)$

组成:

$$W_{3,k-1}(V,Z) = U_1 \mathrm{G} U_2 \mathrm{G} U_3 \mathrm{G} U_4\#$$

由于所论方程(1)(即(A))的特殊形式,引理的证明只需对 U_3、U_4 讨论即可,而 U_1、U_2 的结果将与 U_3 相似,此略去#

( ) U_4 的情形

设 S I U_4 A $G_3^*(TJ^{k-1}(V,Z))\#$ 那么它由 $J^{k-1}(V,Z)$ 在点 $p(S)$,

$$p(S) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, p_j^{i\,K}) = (x_1, , , x_4, u_1, , , u_4, p_1^1, , , p_{4^{k-1}}^4)$$

的 3 个切向量 G1, G_2, G_3 生成:

$$G_1 = (1, 0, 0, A_1, \hat{u}_i(1), \hat{p}_j^{i\,K}(1)),$$

$$G_2 = (0, 1, 0, A_2, \hat{u}_i(2), \hat{p}_j^{i\,K}(2)),$$

$$G_3 = (0, 0, 1, A_3, \hat{u}_i(3), \hat{p}_j^{i\,K}(3)),$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, \mid K \mid [\ k - 1)\#$$

则有以下结论:

( ) S I U_4 H $S^0_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$\begin{cases} A\ X\ 0, \\ UA_{k-2} = A_1 U^{(4)}_{1,k-2} + A_2 U^{(4)}_{2,k-2} + A_3 U^{(4)}_{3,k-2} + MU^{(4)}_{4,k-2} = 0; \end{cases} \tag{16}$$

( ) S I U_4 H $S^4_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$\begin{cases} A = 0, \\ (U^{(4)}_{4,k-2})^2 + \sum_{i=1}^{4} (U^{(4)}_{i,k-2})^2 = 0; \end{cases} \tag{17}$$

( ) 以下任一组条件被满足,则 S I U_4 H $T_{3,k-1}(D)$:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{a})\ A\ X\ 0,\ UA_{k-2}\ \mathrm{x}\ 0, \\ &(\mathrm{b})\ A = 0, (U^{(4)}_{4,k-2})^2 + \sum_{i=1}^{4} (U^{(4)}_{i,k-2})^2\ \mathrm{x}\ 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} A = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \\ U^{(4)}_{i,k-2} = -5^{(4)}_{i,k-2}(S) + M[A_1 \hat{p}^i_{4^{k-1}}(1) + A_2 \hat{p}^i_{4^{k-1}}(2) + A_3 \hat{p}^i_{4^{k-1}}(3) - \\ \qquad \hat{p}^i_{14^{k-2}}(1) - \hat{p}^i_{24^{k-2}}(2) - \hat{p}^i_{34^{k-2}}(3)], \qquad (i = 1, 2, 3), \\ U^{(4)}_{4,k-2} = -5^{(4)}_{4,k-2}(S) + \frac{1}{Q}[A_1 \hat{p}^4_{4^{k-1}}(1) + A_2 \hat{p}^4_{4^{k-1}}(2) + A_3 \hat{p}^4_{4^{k-1}}(3) - \\ \qquad \hat{p}^4_{14^{k-2}}(1) - \hat{p}^4_{24^{k-2}}(2) - \hat{p}^4_{34^{k-2}}(3)], \\ U^{(4)}_{4,k-2} = -[\hat{p}^1_{4^{k-1}}(1) + \hat{p}^2_{4^{k-1}}(2) + \hat{p}^3_{4^{k-1}}(3)], \end{cases} \tag{19}$$

而 $5^{(4)}_{i,k-2}$, $5^{(4)}_{4,k-2}$ 则由 $p(S)$ 的局部坐标和 5_i, $5_4(i = 1, 2, 3)$ 所唯一确定#

事实上,当 $k = 1$ 时, S I U_4 A $G_3^*(TJ^0(V,Z))$, 则在点 $p(S)$ I $J^0(V,Z)$, 生成 S 的 3 个切向量是:

$$G_1 = (1, 0, 0, A_1, \hat{u}_i(1)),\ G_2 = (0, 1, 0, A_2, \hat{u}_i(2)),\ G_3 = (0, 0, 1, A_3, \hat{u}_i(3))$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

而 $p(S) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = (x_1, , , x_4, u_1, , , u_4)\#$

根据 $W_{3,0}(V, Z)$ 的定义[4],[6], 必需存在 $p_j^i \in R$, 使得以下(可积性)条件满足:

$$p_l^i = \hat{u}_i(l) - A_l p_4^l \qquad (i = 1, 2, 3, 4;\ l = 1, 2, 3)。 \tag{20}$$

再由 $W_{3,0}(D)$ 的定义[4], 必须有$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, p_j^i) \in D_1$。 于是就得到了以下的关系式:

$$A_1 p_4^1 + A_2 p_4^2 + A_3 p_4^3 - [\hat{u}_1(1) + \hat{u}_2(2) + \hat{u}_3(3)] = 0。 \tag{21}$$

在(21)式成立的保证之下, 讨论 $k \geq 2$ 时的情形。

对于 $k = 2$, 设 $S \in U_4 \cap G_s^*(TJ^1(V, Z))$。 它由 $J^1(V, Z)$ 在点 $p(S)$ 的 3 个切向量 $G_i(i = 1, 2, 3)$ 生成:

$$\begin{aligned}
p(S) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, p_j^i), \\
G_1 &= (1, 0, 0, A_1, \hat{u}_i(1), p_j^i(1)), \\
G_2 &= (0, 1, 0, A_2, \hat{u}_i(2), p_j^i(2)), \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) \\
G_3 &= (0, 0, 1, A_3, \hat{u}_i(3), p_j^i(3)),
\end{aligned}$$

(注意 $p(S)$ 的局部坐标满足(20), (21))。

根据 $W_{3,1}(D)$ 的定义[4], 必须存在 $p_{jk}^i \in R$, 使得以下条件满足:

$$\left.\begin{aligned}
&(\ \ )\ p_{jl}^i = \hat{p}_j^i(l) - A_l p_{j4}^i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ l = 1, 2, 3); \\
&(\ \ )\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, p_j^i, p_{jk}^i) \in D_2 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4;\ j \neq k)。
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

据此即可得以下关系式组:

$$\left\{\begin{aligned}
&M A p_{42}^1 = \tilde{U}_{1,0}^{(4)},\quad M A p_{42}^2 = \tilde{U}_{2,0}^{(4)},\quad M A p_{42}^3 = \tilde{U}_{3,0}^{(4)},\quad \frac{A}{Q} p_{42}^4 = U_{4,0}^{(4)}, \\
&(-A_1) p_{42}^1 + (-A_2) p_{42}^2 + (-A_3) p_{42}^3 = \tilde{U}_{4,0}^{(4)},
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

式中

$$\begin{aligned}
A &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \\
\tilde{U}_{j,0}^{(4)} &= -5_j(S) + M[A_1 \hat{p}_4^j(1) + A_2 \hat{p}_4^j(2) + A_3 \hat{p}_4^j(3) - \\
&\qquad \hat{p}_1^j(1) - \hat{p}_2^j(2) - \hat{p}_3^j(3)] \qquad (j = 1, 2, 3), \\
U_{4,0}^{(4)} &= -5_4(S) + \frac{1}{Q}[A_1 \hat{p}_4^4(1) + A_2 \hat{p}_4^4(2) + A_3 \hat{p}_4^4(3) - \\
&\qquad \hat{p}_1^4(1) - \hat{p}_2^4(2) - \hat{p}_3^4(3)], \\
\tilde{U}_{4,0}^{(4)} &= -[\hat{p}_4^1(1) + \hat{p}_4^2(2) + \hat{p}_4^3(3)]。
\end{aligned}$$

对于(23), 显然有以下结论:

( ) 如果 $A \neq 0$, 则(23)可解的充要条件是:

$$\tilde{U}_{A,0} = A_1 \tilde{U}_{1,0}^{(4)} + A_2 \tilde{U}_{2,0}^{(4)} + A_3 \tilde{U}_{3,0}^{(4)} + M A \tilde{U}_{4,0}^{(4)} = 0; \tag{24}$$

( ) 如果 $A = 0$ 则(23)可解的充要条件是:

$$(U_{4,0}^{(4)})^2 + \sum_{i=1}^{4} (\tilde{U}_{i,0}^{(4)})^2 = 0; \tag{25}$$

( ) 若以下条件组之一成立, (23)不可解:

(a) $A \neq 0,\ \tilde{U}_{A,0} \neq 0,$ $\quad$ (26)

(b) $A = 0,\ (U_{4,0}^{(4)})^2 + \sum_{i=1}^{4} (\tilde{U}_{i,0}^{(4)})^2 \neq 0。$ $\quad$ (27)

上述三个结论依次对应于 $S \in U_4 \cap S_{3,1}^0(D)$, $S \in U_4 \cap S_{3,1}^4(D)$ 和 $S \in U_4 \cap T_{3,1}(D)$。 而(24), (25), (26) 和(27) 则是 $S_{3,1}^0(D)$, $S_{3,1}^4(D)$ 和 $T_{3,1}(D)$ 的末方程。

对于 $k \setminus 3$, 完全仿照上述方法, 根据 $W_{3,k-1}(D)$ 的定义, 于是就可获得(16)、(17)、(18)#

( ) U_3 的情形

与讨论 U_4 时类似, 我们要确定 S I U_3 H $S^0_{3,k-1}(D)$ 和 S I U_3 H $T_{3,k-1}(D)$ 的条件, 这时的 S I U_3 A $G_3^*(TJ^{k-1}(V,Z))$ 由 $J^{k-1}(V,Z)$ 在 $p(S)$ 的 3 个切向量 $F_i(i = 1,2,4)$ 生成:

$$\begin{cases} F_1 = (1, 0, D_1, 0, \hat{u}_i(1), \hat{p}^{\,i}_{jK}(1)), \\ F_2 = (0, 1, D_2, 0, \hat{u}_i(2), \hat{p}^{\,i}_{jK}(2)), \qquad (i = 1,2,3,4;\ |K| [\ k-1), \\ F_4 = (0, 0, D_4, 1, \hat{u}_i(4), \hat{p}^{\,i}_{jK}(4)), \end{cases} \tag{28}$$

$$p(S) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, p^{\,i}_{jK}) = (x_1, , , x_4, u_1, , , u_4, p^1_1, , , p^{4}_{4^{k-1}})\ I\ J^{k-1}(V,Z)\#$$

这时有以下结论:

( ) S I U_3 H $S^0_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$\breve{U}D_{k-2} = D_1 \breve{U}^{(3)}_{1,k-2} + D_2 \breve{U}^{(3)}_{2,k-2} - \breve{U}^{(3)}_{3,k-2} + M D \breve{U}^{(3)}_{4,k-2} = 0; \tag{29}$$

( ) S I U_3 H $T_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$\breve{U}D_{k-2}\ \mathrm{X}\ 0, \tag{30}$$

式中 D $= 1 + D_1^2 + D_2^2$, 而 $\breve{U}^{(3)}_{j,k-2}(j = 1,2,3,4)$ 由(28) 和 $5_j(j = 1,2,3,4)$ 唯一确定#

综上所述, 我们已完全确定了

$$Q_{3,k-1}: E_{3,k-1}(V,Z)\ y\ W_{3,k-1}(V,Z)$$

的分层

$$\begin{aligned} W_{3,k-1}(V,Z) &= W_{3,k-1}(D)\ G\ T_{3,k-1}(D) = \\ &\quad S^0_{3,k-1}(D)\ G\ S^4_{3,k-1}(D)\ G\ T_{3,k-1}(D)\# \end{aligned}$$

引理证毕#

现在来完成本文的定理证明:

在第 1 节的定义叙述中, 设 $V = R^3 @ R$, $Z = R^3 @ R_+$, $a = t_0 = 0$, $b = T > 0$, B A R^3 是一个带边的紧致子流形, $5B$ X , $\dim B = 3$# 记

$$W = B @ R\ A\ V,$$

$$V_0 = (W - 5W)\ H f^{-1}((0,T)),\ X = W\ H f^{-1}(0),$$

$$Y = (5W\ H f^{-1}([0,T]))\ G\ (W\ H f^{-1}(T))\ \text{或}\ Y = 5W\ H f^{-1}([0,T]),$$

且 $i = 1$, $h = k_0 = l = 2$ 或 $i = h = 1$, $k_0 = 2$, $l \setminus 3$,

$$E\ A\ J^1(V,Z),$$

则定义所述问题就是方程组(A) D A $J^2(R^3 @ R, R^3 @ R_+)$ 的混合问题最一般的提法# 由引理知, 对任何 $k \setminus 2$, 横截层 $S^t_{3,k-1}(D) =$ # 再根据(16)、(17)、(18)、(24)、(25)、(26) 以及(29)、(30) 可知, 第 1 节中引用定理的条件全部被满足, 因而, 对 D(A) 来讲, 任何混合条件 C I $M(X, D, Y, E)$ 都是不适定的# 根据定义, (A) 是 $C^k(k \setminus 2)$ 不稳定方程# 定理证毕#

1) 从定理的证明过程可看到, 导致 D(A) 的横截层 $S^t_{3,k-1}(D)$ 是空集的根源, 在于 D 的准本方程 D^C_* 与其本方程 D_* 不重合# 事实上这也正是/L_简单0[7] 这一概念引进的原因# 当我们对一个拟线性偏微分方程的解空间构造分析时, 如果计算能证明它是 L_简单, 且 $L \setminus 1$, 则可断定它的横截层必是空集# 这样, 距离证明它是不稳定方程也就不远了, 另外, Navier_Stokes 方程原型的不稳定性与 D(A) 完全一样#

2) 对于 $R^3 @ R$ 上的带有未知函数多项式附加项的Navier_Stokes 方程, 可同样证明它的

$C^k(k \setminus 2)$ 不稳定性, 而且比本文的计算更简单一些#

3) 从定理证明还可知道，对于一个拟线性偏微分方程，如果它的本方程 $D_* = \underset{l}{G} D_l(l = -1, 0, 1, 2,)$ 都由拟线性关系所表示，那么在分层计算时，基本不会遇到什么困难# 反之，麻烦就大了# 就是说线性代数已不能提供有效的方法# 事实上，一般情况下我们将会遇到常微分方程、函数方程以及实代数几何的大难题#

在以后的文章中, 我们将通过给出准确解的实例计算, 再次证明这种/变形0Navier_Stokes 方程的不稳定性#

[参 考 文 献]

[1] Landau L, Lifchitz E. M caniqu e des Flu ides[M]. Moscou: Mir, 1971.

[2] Ride H. On planetary atmospheres and interiors[J]. Mathematical in the Geophysical Science, Amer Math Soc, Providence R I, 1971.

[3] 唐一鸣. 磁通量方程的解空间构造[A]. 见:戴世强 主编. 现代数学与力学,MMM_×[C]. 上海:上海大学出版社, 1997, 445) 452.

[4] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques *quations aux D riv es Partielles en M canique des Fluides[M]. Paris: Hermann, 1992.

[5] SHIH Wei_shu. Une remarque sur les syst mes d quations aux d riv es partielles analytiques r elles [J]. C R Acad Sci Paris, S rie , 1987, 304(4): 103) 106.

[6] SHIH Wei_shu. Une methode l mentaire pour l tude des quations aux d riv es partielles[J]. Diagrammes, Paris, 1986, (16): 1) 89.

[7] Trotmann D, Wilsom L. Singularities of Maps and Applications to Differential Equations[M]. Paris: Hermann, 1997.

[8] 陈达段, 刘晓明, 施惟慧. 关于强迫耗散非线性系统的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(6): 515) 522.

[9] SHIH Wei_hui, CHEN Da_duan. On the instability of incompressible Helium_ complete equation [A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. ICNM_Third International Conference on Nonlinear Mechanics[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 848) 853.

The C^k Instability of Navier_Stokes Equation Appending Polynomials of Unknown Functions

HE You_hua, SHI Wei_hui

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 210800, P R China)

Abstract: Applying the theory of stratification, the solution space structure about a class of deformed Navier_Stokes equation is determined. It is proved that such kind of equation has no $C^k(k \setminus 2)$ *stable solution by the fact that the strate transversale is a null set.*

Key words: Navier_Stokes equation; unstable equation; strate transversale