

文章编号: 1000-0887(2000) 11-1117-08

# 混沌时序相空间重构的分析和应用研究<sup>\*</sup>

马军海<sup>1</sup>, 陈予恕<sup>2</sup>

(1. 天津大学 管理学院, 天津 300072; 2. 天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 在国内外学者工作的基础上, 应用 Legendre 坐标法重构动力系统的相空间, 研究了时序间隔  $\tau$  的取值范围, 讨论了时序间隔  $\tau$  对相空间重构工作的影响, 并用所提方法重构了系统的吸引子。算例表明所提方法是有效的。

关键词: 混沌时序; 相空间重构; Legendre 坐标法

中图分类号: O175.14; O241.81 文献标识码: A

## 引 言

相空间重构是混沌时序分析的重要研究内容, 相空间重构理论是由 Packard 等<sup>[1]</sup>, Ruell 和 Takens<sup>[2]</sup> 在八十年代首次提出来的。它的重大贡献在于证明了相空间重构能保持时序所对应的原动力系统内在结构的几何不变性, 比如: 系统嵌入空间矩阵的本征值、吸引子的分维数以及其轨道的 Liapunovs 指数等的不变性。

实测的时序数据不可避免的要受到噪声的侵扰, 而时序中所含的噪声水平会影响到重构的方法, Berndt Pilgram, Daniel T. Kaplan<sup>[3]</sup> 给出了时序中所含噪声水平的一个合理估计, Takens<sup>[2]</sup> 证明了在存在噪声的情况下时序可以被嵌入到相空间中。由于原动力系统的方程是未知的, 所以我们便不能从系统的方程中得到它的吸引子, 然而我们可以在所选择的嵌入空间中从实测的时序数据中重构原系统的奇怪吸引子而使其保持原所有内在特征的不变性。假设  $d$  是生成时序向量  $X(t)$  的动力系统的分维数,  $X(t) = [x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)]^T$  而  $\tau$  是时序之间的采样间隔,  $m$  是嵌入空间矩阵的维数。Takens<sup>[2]</sup> 证明了在存在噪声的情况下重构相空间时  $m$  应满足:  $m \geq 2[d] + 1$ 。在相空间重构的过程中  $\tau$  的取值也是非常重要的。如果  $\tau$  的值取的太少, 则其所有的坐标几乎是一致的, 轨线在相空间中龟缩在同一条直线上; 如果  $\tau$  的值取的太大, 轨线在相空间中会出现间断现象, 这样一来有可能导致比较简单的几何图线在相空间中看起来非常复杂, 系统的相图失真。文献[4] 给出了  $\tau$  值选取的初步理论估计, Ying ChengLai, David Lemer<sup>[5]</sup> 给出了初略  $\tau$  值选取的上界估计值。从总体上讲, 在时序存在噪声的情况下, 系统的一些不变量如: 分维数  $d$  和 Liapunov exponents 等与  $m$  和  $\tau$  的选取有关, 所以相空间重构的中心任务便是合理的选取  $m$  和  $\tau$ 。

\* 收稿日期: 1999\_07\_12; 修订日期: 2000\_06\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助(19990510)

作者简介: 马军海(1965—), 男, 教授, 博士后;

陈予恕(1931—), 男, 山东肥城人, 教授, 博导. 俄国科学院外籍院士。

滤波是相空间重构过程中的另一个重要的步骤,其往往和一些必要的重构技术相结合。Badii 等指出滤波会增加时序的分维数值,所以在应用滤波的时候务必十分谨慎。而 Mitschke<sup>[7]</sup>却指出适当的滤波对重构的影响可以忽略不计;Scargle<sup>[8]</sup>发现适当的滤波对重构是有益的。

相空间重构的基本方法有三种,它们分别是时间延迟法<sup>[2]</sup>,导数法<sup>[1]</sup>和基本分量坐标法<sup>[9]</sup>。到目前为止这三种方法之间的关系还没有完全弄清楚。Gibson 等<sup>[10]</sup>最近指出基本分量坐标与由 Packard 等<sup>[1]</sup>和 Takens<sup>[2]</sup>所提出的导数坐标之间存在着非常紧密的联系;更进一步地,对于很少的延迟时间他们提出了基本分量坐标是基于简化了的 Legendre 多项式的观点。

因此,在最近的几年里对不同相空间重构方法的研究便成为此领域研究的焦点。与此相关的是求出比较好的重构方法中的各相关参数值<sup>[9][11]</sup>。陈予恕,马军海,刘曾荣<sup>[12]</sup>给出用基本分量坐标法重构相空间的相应结论。本文在国内外学者工作的基础上,应用 Legendre 坐标法重构动力系统的相空间,讨论了时序间隔  $\tau$  对相空间重构工作的影响,并用所提方法重构了系统的吸引子,算例表明本文建议的方法是有效的。

## 1 Legendre 坐标变换

为方便起见,我们选择嵌入维数  $m$  为奇数,即  $m = 2p + 1$ 。对于  $x \in \mathbf{R}^{m=2p+1}$  定义延迟向量

$$\mathbf{x}(t) \text{ 为: } \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}(t - p\tau), \dots, \mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t + p\tau)]^T, \quad (1)$$

这里  $\tau$  为时序间隔,  $T$  表示转置。围绕时序的导数我们得到坐标变换

$$\mathbf{w}_j(t) = \sum_{n=-p}^p r_{j,p}(n) \mathbf{x}(t + n\tau), \quad (2)$$

这里时序  $\mathbf{x}(t)$  是输入,  $\mathbf{w}_j(t)$  是输出,  $r_{j,p}(n)$  是离散变换的核,假设时序的窗口宽度  $\tau$  充分小,则可以得到下式:

$$\mathbf{w}_j(t) = \sum_{n=-p}^p r_{j,p}(n) \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n\tau)^i}{i!} \mathbf{x}^{(i)}(t) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} \mathbf{x}^{(i)}(t) \left[ \sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) \right]. \quad (3)$$

从(3)式可以看出在  $i < j$  在情况下如使括号内的向量消失,则  $r_{j,p}(n)$  必满足下式:

$$\sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) = 0 \quad (\text{当 } i < j), \quad (4)$$

$$\sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) = \delta_{ij}, \quad \sum_{n=-p}^p n^{2j} r_{j,p}(n) = 1 \quad (\text{当 } i, j \leq 2p). \quad (5)$$

从(4)式和(5)式我们可以得到:

$$r_{j,p}(n) = \frac{1}{p!} \left( n^j - \sum_{k=0}^{j-1} r_{k,p}(n) \sum_{l=-p}^p l^k r_{k,p}(l) \right) \quad (\text{当 } j \leq 2p). \quad (6)$$

定义离散的 Legendre 多项式在  $\mathbf{R}^{m=2p+1}$  的正交基  $\mathbf{r}_j$  为:

$$\mathbf{r}_j = (r_{j,p}(-p), \dots, r_{j,p}(0), \dots, r_{j,p}(p))^T \quad (7)$$

由此可定义 Legendre 坐标  $\mathbf{w}_j(t)$  为:  $\mathbf{w}_j(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{r}_j$  (8)

由  $m$  个离散的 Legendre 多项式通过  $m \times m$  矩阵  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m-1})$  (9)

来定义变换  $\mathbf{R}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ , 这里  $\mathbf{R}$  是正交的矩阵。

定义 Legendre 坐标向量为:  $\mathbf{w}(t) = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1})^T$  (10)

我们可以得到:  $\mathbf{w}^T(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}$  (11)

取  $p = 2$  则可求得  $R$  为:  $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{35}} \end{bmatrix} \cdot \quad (12)$

## 2 时间间隔 $\tau$ 的选取

根据文献[13]的结论:  $\log_2 C(r, \tau, M) \approx D_2 \log_2 r - M \tau K_2 \log_2 e$  (13)

$K_2$  为 2 熵, 计算时  $K_2$  可取最大的 Liapunov 指数. 这里  $T$  可取 1.

这时落入半径为  $r$  的  $D_2$  维球体内的点集个数  $J$  为:

$$J \approx \frac{1}{2} N^2 r^{D_2} \exp[-M \tau K_2] \cdot \quad (14)$$

由于  $J$  必须大于等于 1, 则最少的搜索半径  $r$  应满足(15)式

$$\log_2 r_{\min}(\tau, M) > (1 - 2 \log_2 N + \tau M K_2 \log_2 e) / D_2 \cdot \quad (15)$$

由于  $J \leq N$ , 则最大的搜索半径  $r$  应满足(16)式

$$\log_2 r_{\max}(\tau, M) > (1 - \log_2 N + \tau M K_2 \log_2 e) / D_2 \cdot \quad (16)$$

结合 Ying Chenglai, David Lerner<sup>[14]</sup> 所证得的(17)式

$$\log_2 r_{\max}(\tau, M) \leq \tau M K_2 \log_2 e / (D_2 - M) \cdot \quad (17)$$

可以进一步得到:

$$\Delta = \log_2 r_{\max}(\tau, M) - \log_2 r_{\min}(\tau, M) < \tau M K_2 \log_2 e / (D_2 - M) - (1 - 2 \log_2 N + \tau M K_2 \log_2 e) / D_2 \cdot \quad (18)$$

根据文献[14]的研究结论  $\Delta$  应满足:

$$\Delta \geq 4 \cdot \quad (19)$$

于是可以进一步得到:

$$\tau_{\max} < \frac{(2 \log_2 N - 1 - 4 D_2)(M - D_2)}{M^2 K_2 T \log_2 e} \cdot \quad (20)$$

对于海伦映射  $\alpha = 1.4, \beta = 0.3$  标准混沌的情况,  $D_2 = 1.26, K_2 = \lambda_1 = 0.408, T = 1$ , 计算时取  $N = 3000$ , 则可算得:

$$\tau_{\max}(M) < 29.42733458 \frac{(M - D_2)}{M^2} \cdot \quad (21)$$

对于洛伦兹系统  $\sigma = 10, r = 13.926, b = 8/3$  标准混沌的情况,  $D_2 = 2.06, K_2 = \lambda_1 = 1.51, T = 1$ , 计算时取  $N = 3000$ , 则可算得:

$$\tau_{\max}(M) < 6.362950464 \frac{(M - D_2)}{M^2} \cdot \quad (22)$$

Thelier<sup>[15]</sup> 采用计算时序  $x_{i+\tau}$  的自相关函数  $\phi(\tau)$  求得  $\tau$ ,

$$\phi(\tau) = \langle [x(t+\tau) - \bar{x}][x(t) - \bar{x}] \rangle / \langle [x(t) - \bar{x}]^2 \rangle \approx 1/e \quad (23)$$

这里  $\bar{x}$  为时序  $x_{i+\tau}$  的平均值, 均值  $\langle \cdot \rangle$  与时间  $t$  有关. Thelier 建议最佳的时序采样间隔  $\tau$  可以通过 (23) 式求得.

对于实测数据采样间隔  $\tau$  的选取, 作者建议可通过考虑 Thelier 给出的自相关函数法和文中给出的 (20) 式来求得.

### 3 计算结果

取如下 3 组数据对本文的算法进行验证

$$\text{第 1 组对海伦映射} \begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

取  $a = 1.4, b = 0.3$  标准混沌的情况, 前 1 000 点作为暂态点去掉, 把后 3 000 点作为第 1 组原始数据点.

$$\text{第 2 组对洛伦兹系统} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \quad (\text{取 } \sigma = 10, r = 13.926, b = 8/3 \text{ 标准}), \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

同缩分岔的情况, 前 1 000 点作为暂态点去掉, 把后 3 000 点作为第 2 组原始数据点.

第 3 组用我们所得到的混沌数据 3 000 点作为实验数据, 作为第 3 组实验数据, 其时间历程图如图 1,

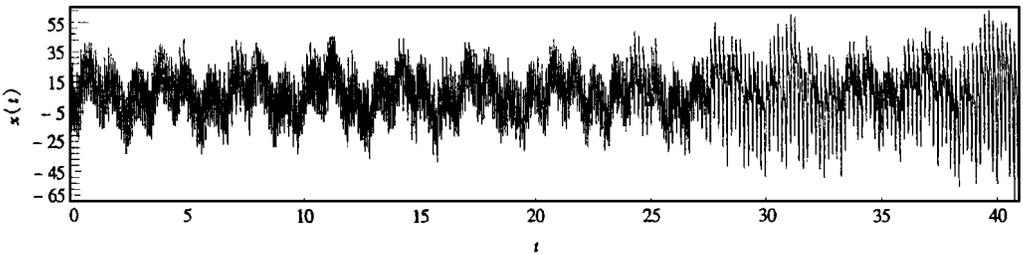


图 1 第 3 组实测混沌数据的时间历程图

由于本文所采用的 3 组数据: 第 1 组数据的分维数为  $d = 1.195$ , 第 2 组数据的分维数为  $d = 2.06$ , 第 3 组实验数据的分维数为  $d = 1.32$ , 由此可取嵌入维数  $m = 3$ , 由 (1) 式可知此时  $p = 1$ , 再由 (21) 式可求得第 1 组数据的时序间隔满足:

$$\tau_{\max}(M) < 5.934\ 512\ 473 \quad (24)$$

由 (22) 式可求得第 2 组数据的时序间隔满足:

$$\tau_{\max}(M) < 0.664\ 574\ 826 \quad (25)$$

由 (23) 式可求得第 3 组数据的时序间隔满足:

$$\tau = 0.024 \text{ (单位: 秒)} \quad (26)$$

本文用计算所得到的 3 组数据  $\tau$  值允许的范围由 (11) 式所决定的 Legendre 坐标法 (三个坐标轴分别为:  $w_0, w_1$  和  $w_2$ ) 进行了重构工作, 重构结果如下:

图 1 给出了第 3 组实测混沌数据的时间历程图.

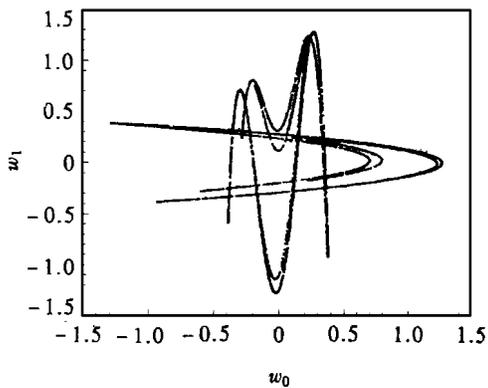


图 2(a) 第 1 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 3$ )

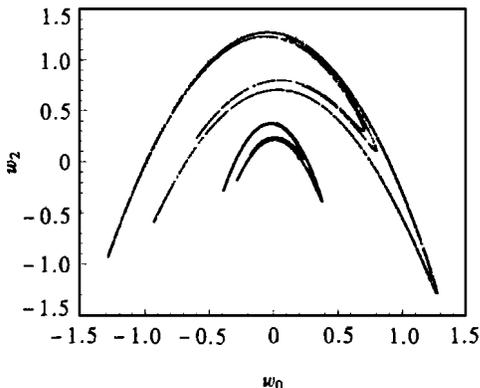


图 2(b) 第 1 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$  纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 3$ )

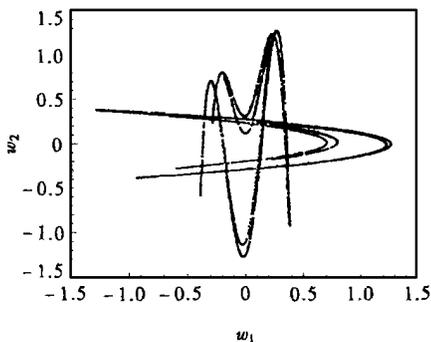


图 2(c) 第 1 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_1$ , 纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 3$ )

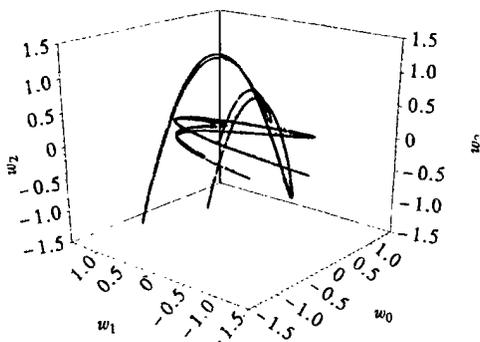


图 2(d) 第 1 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_1$  纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 3$ )

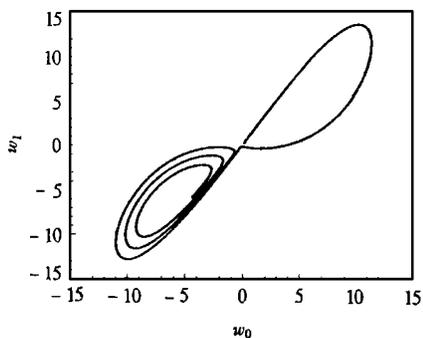


图 3(a) 第 2 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 0.6$ )

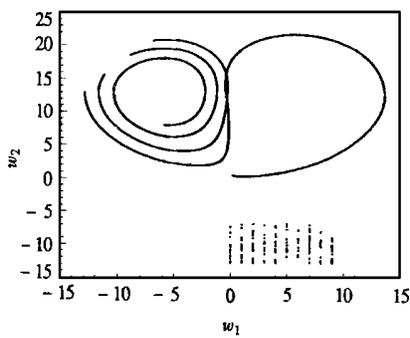


图 3(b) 第 2 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_1$  纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 0.6$ )

图 2(a)~ 图 2(c) 为第 1 组数据的 2 维相空间重构相图, 其横, 纵坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 3$ 。

图 2(d) 为第 1 组数据的 3 维相空间重构相图, 其横坐标、纵坐标和竖坐标分别为  $w_0, w_1$  和

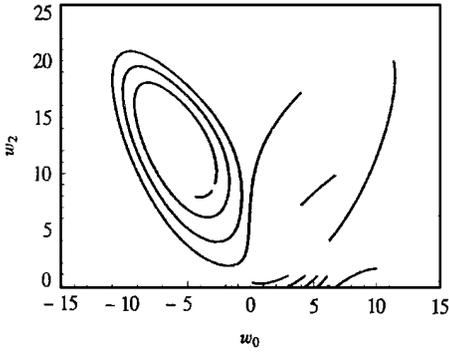


图 3(c) 第 2 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 0.6$ )

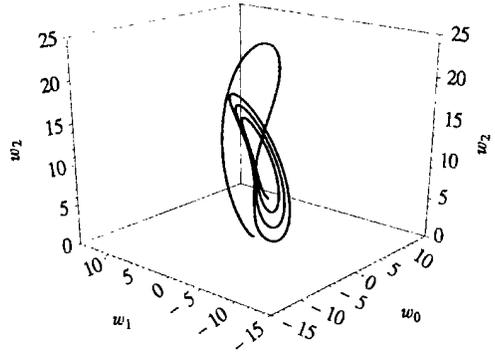


图 3(d) 第 2 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_1$  纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 0.6$ )

$w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 3$

本文也对  $\tau = 6$  (不满足(24)式) 时第 1 组数据进行了相空间重构工作, 其相图中出现了轨线间断现象, 重构效果失真。

图 3(a) ~ 图 3(c) 为第 2 组数据的 2 维相空间重构相图, 其横, 纵坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.60$ 。

图 3(d) 为第 1 组数据的 3 维相空间重构相图, 其横坐标、纵坐标和竖坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.60$ 。

图 4(a) ~ 图 3(c) 为第 3 组数据的 2 维相空间重构相图, 其横, 纵坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.024$ 。

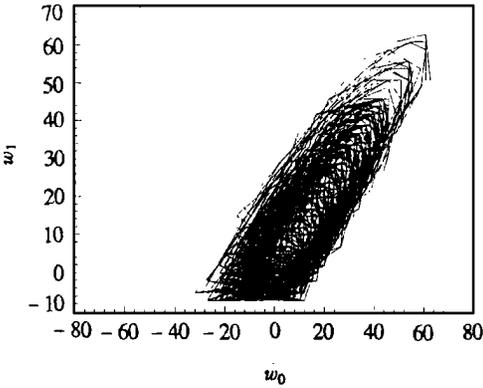


图 4(a) 第 3 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 0.024$ )

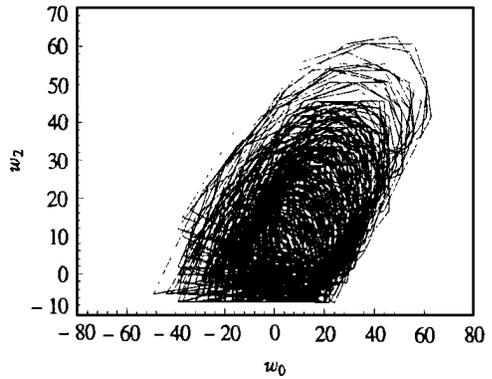


图 4(b) 第 3 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$  纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3, \tau = 0.024$ )

图 4(d) 为第 3 组数据的 3 维相空间重构相图, 其横坐标、纵坐标和竖坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.024$ 。

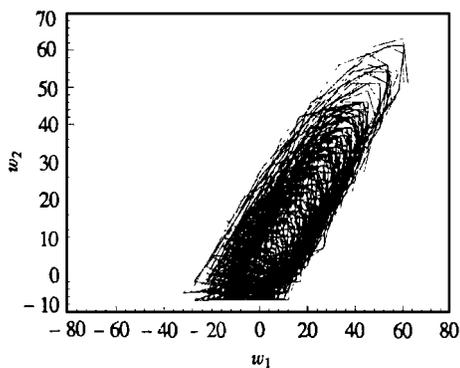


图 4(c) 第 3 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_1$ , 纵标为  $w_2$ , 嵌入  
维数  $m = 3$ ,  $\tau = 0.024$ )

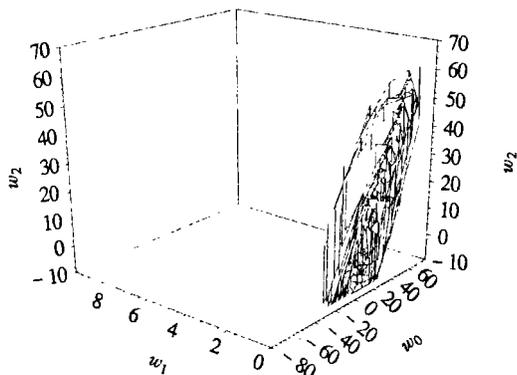


图 4(d) 第 3 组数据的相空间重构图  
(横标为  $w_0$  纵标为  $w_1$  竖坐标为  
 $w_2$  嵌入维数  $m = 3$ ,  $\tau = 0.024$ )

## 4 结 论

1. 用 Legendre 坐标法进行相空间重构, 其局部的重构效果良好。
2. 相空间重构工作应在允许  $\tau$  值范围内进行。
3. 从图 4(d) 中可以看出第 3 组数据为混沌数据, 但其混沌特征基本上是发生在某一平面上, 这与从得到的其分维数  $d = 1.32$  来得出的结论是完全吻合的。
4. 利用相空间重构可以很好的确定最佳嵌入维数  $m$ , 这对接下来要进行的混沌时序的预测和控制工作有重要意义。

## [参 考 文 献]

- [1] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D, et al. Geometry from a time series[J]. Phys Rev Lett, 1980, **45**(6): 712—716.
- [2] Takens F, Mane. Detecting strange attractors in fluid turbulence[A]. In: Rand D A, Young L S, Eds. Dynamical Systems and Turbulence [C]. Vol. **898** of Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer, 1986, 366.
- [3] Berndt Pilgram, Kaplan Daniel T. A comparison of estimators for  $1/f$  noise[J]. Phys D, 1998, **114**(3): 108—122.
- [4] Casdagli M, Eubank S, Farmer J D, et al. State space reconstruction in the presence of noise[J]. Phys D, 1991, **51**(1): 52—98.
- [5] YING Cheng\_jai, David Lemer. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series[J]. Phys D, 1998, **115**(5): 1—18.
- [6] Badii R, Broggi G, Derighetti B, et al. Dimension increase in filtered chaotic signals[J]. Phys Rev Lett, 1988, **60**(4): 979—984.
- [7] Mitschke F. A causal filters for chaotic signals[J]. Phys Rev A, 1990, **41**: 1169—1171.
- [8] Scargle J D. Studies in astronomical time series analysis IV, Modeling chaotic and random processes with linear filters[J]. Astrophys J, 1990, **359**(12): 469—482.
- [9] Broomherd D S. Extracting qualitative dynamics from experimental data[J]. Phys D, 1987, **20**(11):

217—236.

- [10] Gibson J F, Casdagli M, Eubank S, et al. An analytic approach to practical state space reconstruction[J]. *Phys D*, 1992, **57**(7): 1—30.
- [11] Liebert W, Pawalzik K, Schuster H G. Optimal embeddings of chaotic attractors from topological considerations[J]. *Europ Physics Lett*, 1991, **14**(8): 521—526.
- [12] CHEN Yu\_shu, MA Jun\_hai, LIU Zeng\_rong. The state space reconstruction technology of different kinds of chaotic data obtained from dynamical system[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, **15**(1): 82—92.
- [13] 马军海. 混沌时序动力系统非线性重构[D]. 天津: 天津大学力学系, 1997.
- [14] YING Cheng\_lai, David Lerner. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series[J]. *Phys D*, 1998, **115**(5): 1—18.
- [15] Theiler J. Statistical precision of dimension estimators[J]. *Phys Rev A*, 1990, **41**(6): 3038—3051.

## An Analytic and Application to State Space Reconstruction About Chaotic Time Series

MA Jun\_hai<sup>1</sup>, CHEN Yu\_shu<sup>2</sup>

(1. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

**Abstract:** The state space reconstruction is the major important quantitative index for describing non-linear chaotic time series. Based on the work of many scholars, such as: N.H. Packard, F. Takens, M. Casdagli, J. F. Bibson, CHEN Yu\_shu et al, the state space was reconstructed using the method of Legendre coordinate. Several different scaling regimes for lag time  $\tau$  were identified. The influence for state space reconstruction of lag time  $\tau$  was discussed. The result tells us that is a good practical method for state space reconstruction.

**Key words:** chaotic time series; state space reconstruction; Legendre coordinates