应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1156_09

在共振点的一阶微分系统的周期解*

马世旺[1,2], 王志成[2], 庾建设[2]

(1. 上海交通大学 应用数学系, 上海 200030; 2. 湖南大学 应用数学系, 长沙 410082)

(李继彬推荐)

摘要: 考虑具偏差变元的一阶非线性微分系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Bx}(t) + F(\boldsymbol{x}(t-\tau)) + \boldsymbol{p}(t),$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^2$, $\tau \in \mathbf{R}$, $B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, F 是有界的, $\boldsymbol{p}(t)$ 是连续的 2π_周期函数• 应用 Brouwer 度及 Mawhin 重合度理论, 在共振的情况下, 给出了上述方程存在 2π_周期解的充分条件及其在 Duffing 方程上的应用•

关 键 词: 一阶微分方程; 周期解; 共振; Brouwer 度; 重合度; Duffing 方程
中图分类号: O175 文献标识码: A

1 引言及问题引出

本文讨论具偏差变元的一阶非线性微分系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Bx}(t) + F(\boldsymbol{x}(t-\tau)) + \boldsymbol{p}(t), \tag{1}$$

的 2π_周期解的存在性, 其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^2$, $\tau \in \mathbf{R}$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)$, $B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 有界, $p \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$ 是 2π_周期的•

本文我们仅考虑更为困难的“共振”情形, 这就是说, 我们假定方程(1)对应的线性齐次方程存在非平凡的 2π_周期解• 为此, 我们设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有一对纯虚特征根 $\pm \mathrm{i}m$, 其中 m 为正整数• 易知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{C}$$

令 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t)$, 则系统(1) 可化为

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{C}F(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}(t-\tau)) + \boldsymbol{Cp}(t)• \tag{2}$$

因此, 为方便起见, 下面我们可设

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}, \ m \text{ 是正整数•}$$

目前, 研究在共振点的具小参数一阶非线性系统边值问题的文献已有许多(见[1, 2]), 然而当系统不含小参数时, 对这类问题的研究却很少, 在这方面, 当系统的非线性项满足所谓的

* 收稿日期: 1998_03_25; 修订日期: 2000_04_12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19801014, 19971026, 19831030)
作者简介: 马世旺(1965—), 男, 内蒙古人, 副教授, 博士.

Landesman_Lazer 条件时，已有一些成果发表(参见[3, 4, 5])． 特别地，Landesman_Lazer 型条件包含渐近极限：

$$F(\pm, \pm) = \lim_{r, s \to \pm\infty} F(r, s). \tag{3}$$

而当渐近极限(3)不存在时，只有文献[6]对一类二阶非线性方程讨论了类似的问题，相关的问题我们还可以参考文献[7, 8, 9, 10]．

本文在渐近极限(3)不存在的情况下，利用 Brouwer 度及 Mawhin 重合度理论证明了方程(1)存在 2π_周期解的充分条件，我们还将所得结果应用于共振点的 Duffing 方程并且给出了具体应用的例子．

2 主要结果

设 $|\cdot|$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中 Euclidean 范数． 令

$$\boldsymbol{P}_{2\pi} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2): \boldsymbol{x}(t + 2\pi) = \boldsymbol{x}(t), \forall t \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sup_{t \in \mathbf{R}} | \boldsymbol{x}(t) | = \sup_{t \in [0, 2\pi]} | \boldsymbol{x}(t) |,$$

则 $(\boldsymbol{P}_{2\pi}, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，定义 $L: \mathrm{dom}L \subset \boldsymbol{P}_{2\pi} \to \boldsymbol{P}_{2\pi}$ 为

$$L\boldsymbol{x}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) - B\boldsymbol{x}(t), \mathrm{dom}L = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_{2\pi}: \dot{\boldsymbol{x}}(t) \text{ 存在且连续} \right\}. \tag{4}$$

则易知矩阵

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}t} = \begin{pmatrix} \cos mt & \sin mt \\ -\sin mt & \cos mt \end{pmatrix}$$

的列向量构成 $\ker L$ 的一组基，且有

$$\mathrm{Im}L = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_{2\pi}: \int_0^{2\pi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}t} \boldsymbol{x}(t) \mathrm{d}t = 0 \right\},$$

这里 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的转置． 显然，$\mathrm{Im}L$ 是 $\boldsymbol{P}_{2\pi}$ 的闭子空间且有直和分解：$\boldsymbol{P}_{2\pi} = \ker\boldsymbol{L} \oplus \mathrm{Im}\boldsymbol{L}$，从而有 $\dim \ker\boldsymbol{L} = \mathrm{co}\dim \mathrm{Im}L = 2 < \infty$． 所以 L 是指标为零的 Fredholm 映射．

定义投影算子 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}: \boldsymbol{P}_{2\pi} \to \boldsymbol{P}_{2\pi}$ 为

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}t} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{e}^{B^{\mathrm{T}}t} \boldsymbol{x}(s) \mathrm{d}s. \tag{5}$$

我们有

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{P} = \ker\boldsymbol{L}, \ker\boldsymbol{Q} = \mathrm{Im}\boldsymbol{L}.$$

令 $J: \ker\boldsymbol{L} \to \ker\boldsymbol{L}$ 为单位算子．

引理 2.1 设 $\boldsymbol{K}: \mathrm{Im}\boldsymbol{L} \to \mathrm{dom}\boldsymbol{L} \cap \ker\boldsymbol{P}$ 为由 $\boldsymbol{P}$ 确定的 $\boldsymbol{L}$ 的(唯一)右逆，即有 $\boldsymbol{LKz} = \boldsymbol{z}, \forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\boldsymbol{L}$，及 $\boldsymbol{PK} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{K}$ 为紧线性算子且有 $\|\boldsymbol{K}\| \leqslant 2\pi$．

证． 容易证明，对 $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\boldsymbol{L}$，

$$\boldsymbol{Kz}(t) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}t} \int_0^t \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}s} \boldsymbol{z}(s) \mathrm{d}s - \frac{1}{2T} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}t} \int_0^{2\pi} \int_0^s \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}s} \boldsymbol{z}(\alpha) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}s.$$

因为 $\int_0^t \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}s} \boldsymbol{z}(s) \mathrm{d}s$ 是 2π_周期的，所以有

$$|\boldsymbol{Kz}(t)| \leqslant 2\pi \|\boldsymbol{z}\|; \ |\boldsymbol{Kz}(t_1) - \boldsymbol{Kz}(t_2)| \leqslant (1 + 4\pi m) \|\boldsymbol{z}\| \cdot |t_1 - t_2|, (\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}).$$

从而引理 2.1 可由 Arzela_Ascoli 定理直接推得．

定义映射 $N: \boldsymbol{P}_{2\pi} \to \boldsymbol{P}_{2\pi}$ 为：

$$Nx(t) = F(x(t-\tau)) + p(t).\tag{6}$$

则 N 连续且将有界集映射为有界集, 因此由引理 2.1 知, N 是 L_紧映射.

下面结果是[11]中定理 7.2 的简单推论.

引理 2.2　设 Ω 是 $P_{2\pi}$ 中有界开集. 如果下列条件成立:

i) $Lx \neq \lambda Nx,\ \forall (x, \lambda) \in (\mathrm{dom}L \cap \partial\Omega) \times (0, 1)$;

ii) $QNx \neq 0,\ \forall x \in \ker L \cap \partial\Omega$;

iii) Brouwer 度, $\deg_B(JQN|_{\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0) \neq 0$.

则方程(1)在 $\mathrm{dom}L \cap \Omega$ 中至少存在一个 2π_周期解.

我们需要两个假设:

H1) $M = \sup_{x\in\mathbf{R}^2} |F(x)| < \infty$;

H2) 存在常数 $l > 0$ 使得 $|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant l|x_1 - x_2|\quad (x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2)$

为方便起见, 我们引入下面的记号, 令

$$M^F(\rho, a) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}t} F(\rho e^{B^{\mathrm{T}}t} a)\,\mathrm{d}t,\tag{7}$$

其中 $\rho \geqslant 0$, $a \in \partial B_1(0) \subset \mathbf{R}^2$, $B_1(0) = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| \leqslant 1\right\}$. 易证

$$\mathbf{M}^F(\rho, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{A^{\mathrm{T}}t} F(\rho e^{At} a)\,\mathrm{d}t,\ \text{这里}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知存在 $\gamma = \gamma(a) \in \mathbf{R}$ 使得

$$\mathbf{M}^F(\rho, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{A^{\mathrm{T}}t} F((\rho\cos(t-\gamma), -\rho\sin(t-\gamma))^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} e^{A^{\mathrm{T}}t}\int_0^{2\pi} e^{A^{\mathrm{T}}t} F((\rho\cos t, -\rho\sin t)^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}t,$$

因此, $|\mathbf{M}^F(\rho, a)|$ 与 a 与 $\partial B_1(0)$ 无关. 从而可令

$$M_F(\rho) := |M^F(\rho, a)|,\ a \in \partial B_1(0) \subset \mathbf{R}^2,\tag{8}$$

$$M_F := \sup_{\rho\geqslant 0} M_F(\rho).\tag{9}$$

然有显, $0 \leqslant M_F \leqslant M$. 最后我们令

$$p_m := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}t} p(t)\,\mathrm{d}t.\tag{10}$$

定理 2.1　设 H1) 及 H2) 成立, 且存在常数 $\rho > 0$ 使得

$$M_F(\rho) \geqslant 4\pi l(M + \|p\|) + |p_m|.\tag{11}$$

则方程(1)至少存在一个 2π_周期解 $x(t)$ 满足

$$|x(t)| \leqslant \rho + 4\pi(M + \|p\|).\tag{12}$$

证　我们将要证明引理 2.2 的条件均成立.

第一步, 对每个固定的 $\lambda \in (0, 1)$, 考虑辅助方程:

$$Lx = \lambda Nx.\tag{13}$$

显然, (13)等价于下面两个方程:

$$QNx = 0,\tag{14}$$

$$(I - P)x = \lambda(I - Q)Nx.\tag{15}$$

令 $M^* = 4\pi(M + \|p\|)$. 注意到 $\|K\| \leqslant 2\pi$ 及 $\|I - Q\| \leqslant 2$, 对方程(15)的任一解 x, 我们有

$$\|(I-P)x\| \leqslant \lambda\|K\|\cdot\|I-Q\|(M+\|p\|) < M^*. \tag{16}$$

令 $\Omega = \left\{x \in P_{2\pi};\ \|Px\| < \rho,\ \|(I-P)x\| < M^*\right\}$, 则 Ω 是 $P_{2\pi}$ 中的有界开集.

下面我们证明

$$Lx \neq \lambda Nx \qquad (\forall x \in \partial\Omega). \tag{17}$$

若 $x \in \partial\Omega$ 满足 $\|(I-P)x\| = M^*$, 则由(16)式, 有 $(I-P)x \neq \lambda K(I-Q)Nx$, 从而 $Lx \neq \lambda Nx$. 现在设 $x \in \partial\Omega$ 满足 $\|Px\| = \rho$ 及 $\|(I-P)x\| < M^*$. 令

$$G_1(x) := \frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}F(Px(s))\,\mathrm{d}s;\ G_2(x) := \frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}[F(x(s)-F(Px(s))]\,\mathrm{d}s.$$

则易知

$$QNx(t) = \frac{1}{2\pi}e^{Bt}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}[F(x(s-\tau))+p(s)]\,\mathrm{d}s = e^{Bt}[G_1(x)+G_2(x)+p_m]. \tag{18}$$

因为 $\|Px\| = \rho$, 我们有 $Px(t) = \rho e^{Bt}a,\ a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}x(s)\,\mathrm{d}s$, 从而有

$$G_1(x) = \frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}F(\rho e^{Bs}a)\,\mathrm{d}s,\ |G_1(x)| = M_F(\rho). \tag{19}$$

另一方面, 由 H_2) 及 $\|(I-D)x\| < M^*$, 得到

$$|G_2(x)| \leqslant l\|(I-D)x\| < lM^*. \tag{20}$$

由(11),(19)及(20)式, 有 $G_1(x)+G_2(x)+p_m \neq 0$. 从而由(18)式知

$$QNx \neq 0. \tag{21}$$

对任意满足 $\|Px\| = \rho$ 及 $\|(I-P)x\| < M^*$ 的 $x \in \partial\Omega$ 成立, 因而 $Lx \neq \lambda Nx$, $\forall \lambda \in (0, 1)$. 所以引理 2.2 的条件 i) 成立. 特别地, 由(21)式推得引理 2.2 的条件 ii) 亦成立.

第二步, 易知

$$\ker L \cap \Omega = \left\{x \in P_{2\pi}: x(t) = e^{Bt}a,\ a \in \mathbf{R}^2,\ |a| < \rho\right\};$$
$$\ker L \cap \Omega = \left\{x \in P_{2\pi}: x(t) = e^{Bt}a,\ a \in \mathbf{R}^2,\ |a| = \rho\right\};$$

设 $h: \ker L \to \mathbf{R}^2$ 为由 $hx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}x(s)\,\mathrm{d}s$ 给出的同胚映射. 则我们有

$$h(\ker L \cap \Omega) = B_\rho(0) \subset \mathbf{R}^2,\ h(\ker L \cap \partial\Omega) = \partial B_\rho(0) \subset \mathbf{R}^2$$

对任意 $a \in \mathbf{R}^2$, 我们有

$$hQNh^{-1}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}[F(h^{-1}a(s-\tau))+p(s)]\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}F(e^{Bs})\,\mathrm{d}s + p_m. \tag{22}$$

由此我们得到

$$|hQNh^{-1}(a)| \geqslant M_F(\rho) - |p_m| > 0,\ a \in \partial B_\rho(0).$$

从而 Brouwer 度 $\deg_B(hQNh^{-1}, B_\rho(0), 0)$ 有定义.

设 $a = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}} \neq 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$ 由 $\cos\alpha = a_1/|a|$ 及 $\sin\alpha = a_2/|a|$ 确定, 则由(22)式知

$$hQNh^{-1}(a) = \frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi} e^{B^{\mathrm{T}}s}F(|a|e^{Bs}(\cos\alpha, \sin\alpha)^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}s + p_m =$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}s}F(|a|e^{B(s-\alpha/m)}(1,0)^{\mathrm{T}})ds+p_m=$$
$$\frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\int_0^{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}(s+\alpha/m)}F(|a|e^{Bs}(1,0)^{\mathrm{T}})ds+p_m=$$
$$\frac{1}{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\int_0^{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}s}F(|a|e^{Bs}(1,0)^{\mathrm{T}})ds+p_m.$$

从而我们有

$$hQNh^{-1}(a)=\frac{1}{|a|}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}M^F(|a|,(1,0)^{\mathrm{T}})+p_m. \tag{23}$$

令 H_0: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为

$$H_0(a)=\frac{1}{\rho}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}M^F(\rho,(1,0)^{\mathrm{T}})+p_m,\ a=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2.$$

则对任意 $a=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}\in\partial B_\rho(0)$，我们有 $hQNh^{-1}(a)=H_0(a)$，从而有

$$\deg_B(hQNh^{-1},B_\rho(0),0)=\deg_B(H_0,B_\rho(0),0). \tag{24}$$

易知存在 $\theta\in\mathbf{R}$ 使得

$$e^{B^{\mathrm{T}}\theta}M^F(\rho,(1,0)^{\mathrm{T}})=(M_F(\rho),0)^{\mathrm{T}}. \tag{25}$$

定义 H: $\mathbf{R}^2\times[0,1]\to\mathbf{R}^2$ 为

$$H(a,\mu)=\frac{1}{\rho}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}e^{\mu B^{\mathrm{T}}\theta}M^F(\rho,(1,0)^{\mathrm{T}})+(1-\mu)p_m(a=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}).$$

则我们有

$$H(a,0)=H_0(a) \tag{26}$$

及

$$|H(a,\mu)|\geqslant M_F(\rho)-|p_m|>0\qquad(\forall(a,\mu)\in\partial B_\rho(0)\times[0,1]). \tag{27}$$

而且由(25)式，我们还有

$$\begin{aligned}H_1(a):=H(a,1)&=\frac{1}{\rho}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}e^{B^{\mathrm{T}}\theta}M^F(\rho,(1,0)^{\mathrm{T}})=\\ &\frac{1}{\rho}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}(M_F(\rho),0)^{\mathrm{T}}=\\ &\frac{M_F(\rho)}{\rho}e^{B^{\mathrm{T}}\tau}a.\end{aligned} \tag{28}$$

由(24)，(25)，(27)及(28)式，我们得到

$$\begin{aligned}\deg_B(QN,B_\rho(0),0)&=\deg_B(hQNh^{-1},B_\rho(0),0)=\\&\deg_B(H_0,B_\rho(0),0)=\\&\deg_B(H_1,B_\rho(0),0)=1\neq0.\end{aligned}$$

因此引理 2.2 的条件 iii) 亦成立. 根据引理 2.2，方程(1)在 $\mathrm{dom}L\cap\Omega$ 中至少存在一个 2π_周期解 $x(t)$. 并且有 $|x(t)|\leqslant\|x\|\leqslant\|Px\|+\|(I-P)x\|\leqslant\rho+4\pi(M+\|p\|)$. 定理证毕.

下面推论 2.1 及 2.2 的证明是容易的，这里省略.

推论 2.1 设 H_1) 及 H_2) 成立. 如果

$M_F>4\pi(M+\|p\|)+|p_m|$,

则方程(1)至少存在一个 2π_周期解.

推论 2.2　设 H_1) 及 H_2) 成立. 如果

$$M_F - 4\pi l M > 0,$$

则存在常数 $r_0 > 0$ 使得当 $\|p\| \leqslant r_0$ 时, 方程(1) 至少存在一个 2π_周期解.

推论 2.3　设 H_1) 及 H_2) 成立, 且

$$|p_m| < M_F. \tag{29}$$

则存在常数 $\nu_0 > 0$ 使得对任意满足 $0 < |\nu| \leqslant \nu_0$ 的 $\nu \in \mathbf{R}$, 方程

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t) + F(\nu\boldsymbol{x}(t-\tau)) + p(t) \tag{30}$$

存在一个 2π_周期解.

证　令 $F_\nu(\boldsymbol{x}) = F(\nu\boldsymbol{x})$. 对 $\nu \neq 0$, 由(H_1)及 H_2), 我们有

1) $M = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2} |F(\boldsymbol{x})| = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2} |F_\nu(\boldsymbol{x})| < \infty;$

2) $|F_\nu(\boldsymbol{x}_1) - F_\nu(\boldsymbol{x}_2)| \leqslant l\,|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|,\ \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{R}^2.$

而且, 对 $\rho \geqslant 0$ 及 $a \in \partial \boldsymbol{B}_1(0) \subset \mathbf{R}^2$, 有 $M^{F_\nu}(\rho, a) = M^F(|\nu|\rho, a\,\mathrm{sign}\nu)$, 从而有

$$M_{F_\nu}(\rho) = M_F(|\nu|\rho), M_{F_\nu} = M_F, \quad (\forall \nu \neq 0). \tag{31}$$

因此由(29)式知 $|p_m| < M_{F_\nu} = M_F$. 所以由推论 2.1 知推论 2.3 成立.

定理 2.2　设 H_1) 成立, 则方程(1) 存在 2π_周期解的必要条件是 $|p_m| \leqslant M$.

证　假设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是方程(1) 的 2π_周期解. 方程(1) 的两国家利益经以 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}t}$ 再取均值得

$$p_m = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}t} F(\boldsymbol{x}(t-\tau))\,\mathrm{d}t.$$

从而有 $|p_m| \leqslant M$. 定理证毕.

为了进一步讨论, 我们再引入下面的记号. 对 $\boldsymbol{L} > 0$ 及 $F \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ 我们用 $l_F \leqslant \boldsymbol{L}$ 表示 F 满足 Lipschitz 条件, 且 Lipschitz 常数 $l_F \leqslant \boldsymbol{L}$. 令

$$[M, S, \boldsymbol{L}] := \left\{F \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2): \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2} |F(\boldsymbol{x})| \leqslant M, M_F \geqslant S, l_F \leqslant \boldsymbol{L}\right\}.$$

设 $M > 0, \nu \neq 0$. 令

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2M}{\pi}\arctan \nu\boldsymbol{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2.$$

则 $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2} |F(\boldsymbol{x})| = M$ 且 $M_F(\rho) \to 2M/\pi (\rho \to \infty)$. 因此若 $S = 2M/\pi$, $|v| \leqslant \pi \boldsymbol{L}/(2M)$, 则 $F \in [M, S, \boldsymbol{L}]$, 即 $[M, S, \boldsymbol{L}] \neq \varnothing$.

定理 2.3　设 $[M, S, \boldsymbol{L}] \neq \varnothing$. 则下列结论成立:

i) 若 $|p_m| > M$, 则对任意 $F \in [M, S, \boldsymbol{L}]$, 方程(1) 在 $\boldsymbol{P}_{2\pi}$ 中无解.

ii) 若 $|p_m| < S$, 则对某个 $F \in [M, S, \boldsymbol{L}]$, 方程(1) 在 $\boldsymbol{P}_{2\pi}$ 中有一解.

iii) 令 $\boldsymbol{P}_{2\pi}(H, s) := \left\{p \in \boldsymbol{P}_{2\pi}: |p_m| \leqslant s < S, \|p\| \leqslant H\right\}$, 则对某个 $F \in [M, S, \boldsymbol{L}]$ 及任意 $p \in \boldsymbol{P}_{2\pi}$, 方程(1) 在 $\boldsymbol{P}_{2\pi}$ 中至少有一解.

证　显然, i), ii) 可分别由定理 2.2 及推论 2.3 推得, iii) 的证明类似于推论 2.3, 略去.

3　在 Duffing 方程上的应用

作为应用, 本节考虑具偏差变元的 Duffing 方程

$$\ddot{x}(t)+m^2x(t)+g(x(t-\tau))=E(t),\tag{32}$$

其中, m 是正整数, $\tau\in\mathbf{R}$, g, $E\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, E 关于 t 是 2π_周期的•

我们需要下面两个假设:

h1) $M=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|g(x)|<\infty$;

h2) 存在常数 $l>0$ 使得 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant l|x_1-x_2|\qquad(\forall x_1,x_2\in\mathbf{R})$•

定理 3.1 设 h1) 及 h2) 成立, 且存在常数 $\rho>0$ 使得

$$\left|\int_0^\pi g(\rho\cos t)\cos t\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\frac{4\pi^2 l}{m}(M+\sup|E(t)|)+\pi|E|,\tag{33}$$

这里,

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E(t)\begin{pmatrix}\sin mt\\ \cos mt\end{pmatrix}\mathrm{d}t•\tag{34}$$

则方程(32) 至少存在一个周期解 $x(t)$ 满足

$$|x(t)|\leqslant\rho+\frac{4\pi}{m}(M+\sup|E(t)|)•\tag{35}$$

证 方程(32) 的等价系统是

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=my(t),\\&\dot{y}(t)=-mx(t)-\frac{1}{m}g(x(t-\tau))+\frac{1}{m}E(t)•\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

令

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{1}{m}g(x)\end{pmatrix},\ (x,y\in\mathbf{R}),\ p(t)=\begin{pmatrix}0\\\dfrac{1}{m}E(t)\end{pmatrix}•$$

则由 h1) 及 h2), 我们有

$$\sup_{x,y\in\mathbf{R}}|F(x,y)|=\frac{M}{m},\tag{37}$$

$$|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)|\leqslant\frac{1}{m}|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|$$
$$(\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2)\tag{38}$$

及

$$|p_m|=\frac{1}{m}|E|•\tag{39}$$

而且我们得到

$$\begin{aligned}M_F(\rho)=&\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}e^{B^{\mathrm{T}}s}F((\rho\cos ms,-\rho\sin ms)^{\mathrm{T}})\mathrm{d}s\right|=\\&\frac{1}{2m\pi}\left|\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}g(\rho\cos s)\sin s\\-g(\rho\cos s)\cos s\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right|=\\&\frac{1}{m\pi}\left|\int_0^{\pi}g(\rho\cos s)\cos s\,\mathrm{d}s\right|•\end{aligned}\tag{40}$$

根据定理 2.1, 由(33), (37), (40) 式知方程(36) 至少存在一个 2π_周期解• 从而方程(32) 有一个 2π_周期解• 定理证毕•

定理 3.2 设 h1) 及 h2) 成立, 且存在常数 $\rho>0$ 使得下面两种情况之一成立:

i) $g(x)$ 是偶函数且有

$$\left|\int_0^\pi g(\rho\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\frac{4\pi^2 l}{m}(M+\sup|E(t)|)+\pi|E|;$$

ii) $g(x)$ 是奇函数且有

$$\left|\int_0^{\pi} g(\rho\sin t)\sin t dt\right| \geqslant \frac{4\pi^2 l}{m}(M + \sup|E(t)|) + \pi|E|;$$

其中, E 由(34) 给出, 则方程(32) 至少存在一个 2π_周期解•

上面定理的证明和定理 3.1 类似, 这里略去•

例 3.1　设 $g(x) = \sin x$, 考虑时滞 Duffing 方程

$$\ddot{x}(t) + m^2 x(t) + \sin[x(t-\tau)] = \sin nt, \tag{41}$$

及

$$\ddot{x}(t) + m^2 x(t) + \sin[x(t-\tau)] = \cos nt• \tag{42}$$

设 N 为正整数, 文献[10] 中已经证明了: 当 $\rho = 2N\pi$ 或 $(2N-1)\pi$ 时,

$$\int_0^{\pi} g(\rho\cos t)\cos t dt \neq 0• \tag{43}$$

所以当正整数 $n \neq m$ 时, 如果还有

$$m \geqslant \frac{8\pi^2}{\left|\int_0^{\pi} g(\rho\cos t)\cos t dt\right|},$$

则由定理 3.1 可知, 方程(41) 及(42) 均有一个 2π_周期解•

[参 考 文 献]

[1] Hale J K. *Ordinary Differential Equations*[M]. New York: Wiley Interscience, 1969.

[2] Nagle R K. Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations with a small parameter[J]. *SIAM J Math Analysis*, 1978, **9**(3): 719—729.

[3] Mawhin J. Landesman_Lazter's type problems for nonlinear equations[A]. In: *Conferenze Seminario Matematica*[M]. Di Bari: Dell Universita, 1977, **147**.

[4] Fucik S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*[M]. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing, 1980.

[5] Nagle R K, Sinkala Z. Existence of 2π_periodic solutions for nonlinear systems of first_order ordinary differential equations at resonance[J]. *Nonlinear Analysis (TMA)*, 1995, **25**(1): 1—16.

[6] MA Shi_wang, WANG Zhi_cheng, YU Jian_she. Coincidence degree and periodic solutions of Duffing equations[J]. *Nonlinear Analysis (TMA)*, 1998, **34**(2): 443—460.

[7] Lazer A C, Leach D E. Bounded perturbations of forced harmonic oscillations at resonance[J], *Ann Mat Pura Appl*, 1969, **82**(1): 49—68.

[8] Schuur J D. Perturbation at resonance for a fourth order ordinary differential equation[J]. *J Math Anal Appl*, 1978, **65**(1): 20—25.

[9] 丁同仁. 共振点的非线性振动[J]. 中国科学(A 辑), 1982, (1): 1—13.

[10] HAO Dun_yuan, MA Shi_wang. Semilinear Duffing equations crossing resonance points[J]. *J Differential Equations*, 1997, **133**(1): 98—116.

[11] Mawhin J. Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mapping in locally convex topological vector spaces[J]. *J Differential Equations*, 1972, **12**(2): 610—636.

[12] Mawhin J. *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems* CBMS[M]. Providence RI: Amer Math Soc, 1979, **40**.

[13] Deimling K. *Nonlinear Functional Analysis*[M]. New York: Springer_Verlag, 1985.

The Existence of Periodic Solutions for Nonlinear Systems of First_Order Differential Equations at Resonance

MA Shi_wang[1,2], WANG Zhi_cheng[2], YU Jian_she[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China;
2. Department of Applied Mathematics, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, P R China)

Abstract: The nonlinear system of first_order differential equations with a deviating argument

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t) + F(\boldsymbol{x}(t-\tau)) + \boldsymbol{p}(t)$$

is considered, where $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^2$, $\tau \in \mathbf{R}$, $B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, F is bounded and $\boldsymbol{p}(t)$ is continuous and 2π_periodic. Some sufficient conditions for the existence of 2π_periodic solutions of the above equation, in a resonance case, by using the Brouwer degree theory and a continuation theorem based on Mawhin's coincidence degree are obtained. Some applications of the main results to Duffing's equations are also given.

Key words: first_order differential equation; periodic solution; resonance; Brouwer degree; coincidence degree; Duffing equation