

文章编号: 1000-0887(2000) 11-1185-06

压电螺位错与椭圆夹杂的电弹相互作用^{*}

刘金喜, 姜稚清, 冯文杰

(石家庄铁道学院 力学与工程科学系, 石家庄 050043)

(陈大鹏推荐)

摘要: 研究了压电材料中压电螺位错与椭圆夹杂的电弹相互作用。基于扰动概念和级数展开方法, 推导了基体和夹杂的弹性场和电场, 在此基础上给出了作用于位错上像力的表达式。通过分析基体与夹杂的相对刚度和机电耦合强弱对像力的影响, 得到了新的相互作用机理。

关键词: 压电材料; 夹杂; 位错; 像力

中图分类号: O343.7; O482.41 文献标识码: A

引 言

研究位错与夹杂的相互作用对于深入理解材料的某些物理性能是十分重要的, 因为夹杂的存在对位错的堆积和运动有很大的影响。人们已经对非压电材料中位错与夹杂的相互作用问题进行了大量的研究, 并得到了一些重要的相互作用机理。最近, 文献[1~6]虽然研究了含夹杂压电材料反平面应变状态的电弹耦合场, 但尚未考虑压电螺位错与夹杂的相互作用问题。Pak^[7]推广 Eshelby^[8]在非压电材料中提出的方法, 导出了计算压电材料中作用于位错上像力的广义 Peach-Koehler 公式, 并进一步分析了两个压电螺位错之间以及压电半平面的边界与压电螺位错的相互作用。

本文研究压电材料中压电螺位错同椭圆夹杂的相互作用问题, 目的是揭示材料参数和压电性对相互作用机理的影响, 为了解非均质压电材料中位错的运动提供依据。

1 问题的描述

设无限大压电基体中含一长短轴分别为 $2a$ 和 $2b$ 的椭圆夹杂, 如图 1 所示。基体和夹杂分别占有区域 Ω_1 和 Ω_2 , 两者均为 Oxy 为向同性面的横观各向同性压电材料。压电螺位错 $b = \{b_3, b_\varphi\}^T$ 位于基体中的 $z_0 (= x_0 + iy_0)$ 点, 其中 b_φ 表示电势位错^[9]。

对于上述问题, 弹性位移 w 和电势 φ 仅仅是 x 和 y 的函数, 即 $w = w(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$, 它们满足:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

式中, ∇^2 为二维 Laplace 算子, $\mathbf{u} = \{w, \varphi\}^T$ 为广义位移向量, 上标 T 表示矩阵的转置。

对线性压电材料, 应力和电位移为:

* 收稿日期: 1999_05_26; 修订日期: 2000_05_23

作者简介: 刘金喜(1961—), 男, 河北武强人, 教授, 博士。

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \left\{ \alpha_x, D_x \right\}^T = C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \\ t_y &= \left\{ \alpha_y, D_y \right\}^T = C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} C_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -K_{11} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中, D 为电位移, C_{44} , e_{15} 和 K_{11} 分别是弹性、压电和介电常数。

方程(1)表明 \mathbf{u} 为调和函数, 故可取为解析函数向量 $f(z)$ 的实部, 即

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re}\{f_1(z), f_2(z)\}^T = \operatorname{Re}[f(z)], \quad (4)$$

式中, $z = x + iy$, Re 表示复数的实部, t_x 和 t_y 可以表示成:

$$t_x - it_y = \mathbf{Q}'(z), \quad (5)$$

其中, 一撇表示关于变量的导数。

基于(5)式, 任一弧段上合力和法向电位移的和为:

$$\mathbf{T} = \int_A^B t_x dy - t_y dx = C \operatorname{Im}[f(z)]_A^B, \quad (6)$$

式中, Im 表示复数的虚部。

假定基体和夹杂沿界面 Γ 理想联接, 则弹性位移、电势、合力和法向合电位移是连续的, 即

$$\mathbf{u}^{(1)}(z) = \mathbf{u}^{(2)}(z), \quad \mathbf{T}^{(1)}(z) = \mathbf{T}^{(2)}(z) \quad (z \in \Gamma). \quad (7)$$

将(4)和(6)代入(7)得到:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}f^{(1)}(z) &= \operatorname{Re}f^{(2)}(z), \\ C^{(1)} \operatorname{Im}f^{(1)}(z) &= C^{(2)} \operatorname{Im}f^{(2)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (z \in \Gamma). \quad (8)$$

下面的主要任务根据压电螺位错的弹性位移和电势的间断条件以及(8)式确定解析函数 $f^{(r)}(z)$, 这里 $r = 1, 2$ 。

2 基体和夹杂的电弹耦合场

为解上述问题, 引入如下变换:

$$z = \Psi(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}), \quad \zeta = (z + \sqrt{z^2 - c^2})/(2R), \quad (9a, b)$$

式中 $R = (a + b)/2$, $m = (a - b)/(a + b)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 。

变换函数(9a)将 z 平面 Γ 的外域保角映射为 ζ 平面单位圆 $\sigma = e^{i\beta}$ ($0 \leq \beta \leq 2\pi$) 的外域, 而将 Γ 的内域映射为单位圆与半径为 $\rho = \sqrt{m}$ 圆之间的环形域, 半径为 ρ 的圆域与 z 平面内 $-c$ 到 $+c$ 的线段相对应, z_0 映射为 ζ_0 。利用(9a), (8)式成为:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}f^{(1)}(\sigma) &= \operatorname{Re}f^{(2)}(\sigma), \\ C^{(1)} \operatorname{Im}f^{(1)}(\sigma) &= C^{(2)} \operatorname{Im}f^{(2)}(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad \sigma = e^{i\beta}, \quad (0 \leq \beta \leq 2\pi). \quad (10)$$

此外, 为保证椭圆夹杂内电弹场的唯一性, 必须补充条件:

$$f^{(2)}(\sigma\sqrt{m}) = f^{(2)}(\sigma\sqrt{m}), \quad (11)$$

式中一横表示复数的共轭。

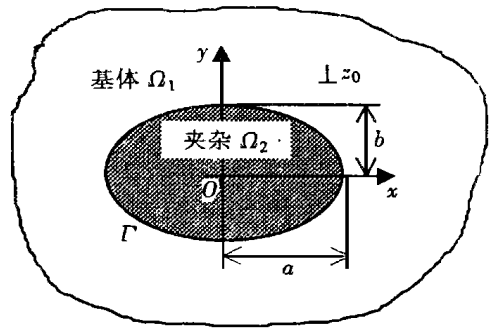


图1 无限大压电固体中的位错和夹杂

根据 Stagni^[10] 提出的扰动方法, 设待定的函数为:

$$f^{(1)}(\zeta) = f_s^{(1)}(\zeta) + f_p^{(1)}(\zeta), \quad f^{(2)}(\zeta) = f_p^{(2)}(\zeta), \quad (12)$$

式中, $f_s^{(1)}(\zeta)$ 为无夹杂时位错产生的基本奇异解, 除 ζ_0 点外全平面解析; $f_p^{(1)}(\zeta)$ 和 $f_p^{(2)}(\zeta)$ 表示夹杂引起的扰动解, 分别在 Ω_1 和 Ω_2 内解析. 由文献[7]有:

$$f_s^{(1)}(\zeta) = A_0 \ln[\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_0)], \quad A_0 = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{b} \quad (13)$$

利用对数函数的级数展开式

$$\ln(1-x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k, \quad |x| < 1 \quad (14)$$

和函数 $f_s^{(1)}(\zeta)$ $f_p^{(r)}(\zeta)$ 的解析性质, $f_s^{(1)}(\zeta)$ 和 $f_p^{(r)}(\zeta)$ 可以展成 Laurent 级数:

$$f_s^{(1)}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\zeta^k + m^k \zeta^{-k}) \quad (1 \leq |\zeta| < \zeta_0), \quad (15)$$

$$f_p^{(1)}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \zeta^{-k} \quad (1 \leq |\zeta| < \infty), \quad (16)$$

$$f_p^{(2)}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^* (\zeta^k + m^k \zeta^{-k}), \quad (\sqrt{m} \leq |\zeta| \leq 1), \quad (17)$$

其中

$$A_k = - \frac{1}{k} A_0 \zeta_0^{-k}. \quad (18)$$

展开时使用了补充条件(11), 并略去了表示刚体位移和等电势场的常数项.

将(15)~(17)代入(12)然后利用(10)式, 可解得待定系数 A_k^* 和 B_k^* 为:

$$A_k^* = - m^k A_k + (\mathbf{I} - \Pi^2 m^{2k})^{-1} [(\mathbf{I} - \Pi^2) m^k A_k + \Pi(1 - m^{2k}) A_k], \quad (19)$$

$$B_k^* = (\mathbf{I} - \Pi^2 m^{2k})^{-1} [(\mathbf{I} + \Pi) A_k - \Pi(\mathbf{I} + \Pi) m^k A_k], \quad (20)$$

式中, \mathbf{I} 是 2 阶单位矩阵, 而

$$\Pi = (\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)})^{-1} (\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}). \quad (21)$$

至此, 我们得到了基体和夹杂的电弹耦合场.

当椭圆夹杂退化为圆夹杂时, 即 $m = 0$, 使用(19)、(20)、(16)、(17)、(14) 和(13), 可得到扰动函数的封闭解为

$$f_p^{(1)}(z) = - \frac{1}{2\pi i} \Pi \mathbf{b} \ln \left[\frac{a^2}{z} - z_0 \right] \quad (z \in \Omega_1), \quad (22)$$

$$f_p^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} (\mathbf{I} + \Pi) \mathbf{b} \ln [z - z_0] \quad (z \in \Omega_2). \quad (23)$$

此式与 Kattis 等人^[5] 得到的结果一致, 但他们使用了其它的方法. 在式(22)和(23)中, 令 $e_{15}^{(j)} = e_{15}^{(2)} = 0$, 便得到文献[11]~[13] 给出的非压电材料中位错与夹杂相互作用的扰动函数.

3 作用于位错的像力

研究位错夹杂相互作用时, 描述相互作用机理的物理量为作用于压电螺位错的像力. 根据 Pak^[7] 推导的广义 Peach_Koehler 公式, 有:

$$F_x = \mathbf{b}^T \mathbf{t}_{yp}^{(1)}(z_0), \quad F_y = - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_{xp}^{(1)}(z_0), \quad (24)$$

式中 $\mathbf{t}_{jp}^{(1)} (j = x, y)$ 表示夹杂在点 z_0 引起的扰动应力和电位移. 如果 $F < 0$, 夹杂吸引位错; 否则, 夹杂排斥位错.

对于圆夹杂, 使用(22)和本构关系(2), (24)式成为:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^{(1)} \Pi \mathbf{b} \operatorname{Im} \left\{ i \frac{a^2}{(z_0 z_0 - a^2) z_0} \right\}, \\ F_y &= -\frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^{(1)} \Pi \mathbf{b} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{a^2}{(z_0 z_0 - a^2) z_0} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

当位错位于 x 轴时, 上式为:

$$F_x = -\frac{1}{2\pi} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^{(1)} \Pi \mathbf{b} \frac{a^2}{(x_0^2 - a^2) x_0}, \quad (26a)$$

$$F_y = 0, \quad (26b)$$

式(26b)表明位错只能在 x 方向运动。

4 数值算例与讨论

本节使用(26a)式分析 $b_\varphi = 0$ 时夹杂与基体的相对刚度和压电效应对像力的影响, 压电效应的强弱用机电耦合系数 $k = \sqrt{e_{15}^2 / (C_{44} K_{11})}$ 表征。作用于位错的像力规范化为:

$$F_{\text{img}} = \frac{2\pi(x_0^2 - a^2)x_0}{C_{44}^{(1)} b_3^2 a^2} F_x. \quad (27)$$

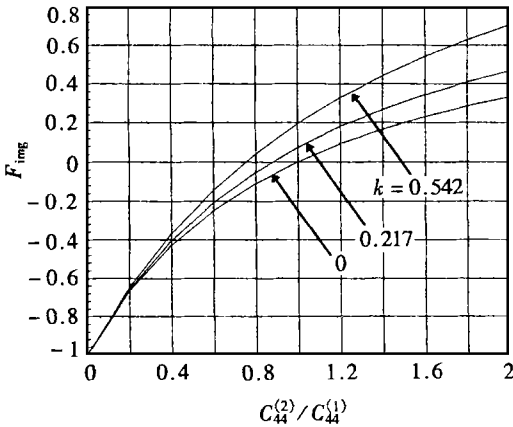


图 2 像力随相对刚度 $C_{44}^{(2)}/C_{44}^{(1)}$ 的变化规律

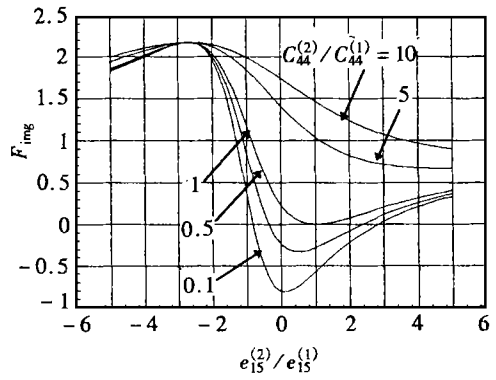


图 3 像力随相对压电常数 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(1)}$ 的变化规律

图 2 给出了基体不同时像力 F_{img} 随相对刚度 $C_{44}^{(2)}/C_{44}^{(1)}$ 的变化规律。基体的材料常数如表 1, $k = 0$ 表示基体为非压电材料; 夹杂为非压电材料。从图 2 可以发现: 1) 机电耦合越强, 像力越大; 2) 软夹杂 ($C_{44}^{(2)}/C_{44}^{(1)} < 1$) 也可能排斥位错。对于非压电材料, 软夹杂只能吸引位错^[13]。

表 1 基体的材料常数

材 料	$C_{44} \times 10^{10} / \text{N/m}^2$	$e_{15} / \text{C/m}^2$	$\kappa_{11} \times 10^{-10} / \text{C/Vm}$	k
PZT_6B	2 71	4.6	36	0.271
PZT_5H	3 53	17	151	0.542

图 3 给出了像力 F_{img} 随相对压电常数 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(1)}$ 的变化规律。基体为 PZT_5H 压电陶瓷; 夹杂假定为任意的压电材料, $\kappa_{11}^{(2)}/\kappa_{11}^{(1)} = 1$, $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(1)} < 0$ 表示基体与夹杂的极化方向相反。图 3 表明了相同于图 2 的相互作用机理。

[参 考 文 献]

- [1] Pak Y E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity[J]. Internat J Solids and Structures, 1992, **29**(19): 2403—2419.
- [2] Benveniste Y. Piezoelectric inhomogeneity problems in antiplane shear and inplane electric fields—how to obtain the coupled fields from the uncoupled dielectric solution[J]. Mech Mater, 1997, **25**(1): 59—65.
- [3] Chen T, Chiang S C. Electroelastic fields and effective moduli of a medium containing cavities or rigid inclusions of arbitrary shape under antiplane mechanical and inplane electric fields[J]. Acta Mechanica, 1997, **121**(14): 79—96.
- [4] Meguid S A, Zhong Z. Electroelastic analysis of a piezoelectric elliptical inhomogeneity[J]. Internat J Solids and Structures, 1997, **34**(26): 3401—3414.
- [5] Kattis M A, Providas E, Kalamkarov A L. Two phase potentials in the analysis of smart composites having piezoelectric components[J]. Composites Part B, 1998, **29**(1): 9—14.
- [6] Meguid S A, Deng W. Electroelastic interaction between a screw dislocation and an elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials[J]. Internat J Solids and Structures, 1998, **35**(13): 1467—1482.
- [7] Pak Y E. Force on a piezoelectric screw dislocation[J]. J Appl Mech, 1990, **57**(3): 863—869.
- [8] Eshelby J D. The force on an elastic singularity[J]. Phil Trans Roy Soc, 1951, **A244**(877): 87_96.
- [9] Barnett D M, Lothe J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators[J]. Physics and State Solids (b), 1975, **67**(1): 105—111.
- [10] Stagni L. On the elastic field perturbation by inhomogeneities in plane elasticity[J]. Z Angew Math Phys, 1982, **33**(3): 313—325.
- [11] Dundurs J. On the interaction of a screw dislocation with inhomogeneities[A]. In: Eringen A C Ed. Recent Advance in Engineering Science[C]. New York: Gordon and Breach, 1967, 223—233.
- [12] Smith E. The interaction between dislocation and inhomogeneities[J]. Internat J Engrg Sci, 1968, **6**(2): 129—143.
- [13] Gong S G, Meguid S A. A screw dislocation interacting with an elliptical inhomogeneity[J]. Internat J Engrg Sci, 1994, **32**(8): 1221—1228.

On the Electroelastic Interaction of a Piezoelectric Screw Dislocation With an Elliptical Inclusion in Piezoelectric Materials

LIU Jin_xi, JIANG Zhi_qing, FENG Wen_jie

(Department of Mechanics and Engineering, Shijiazhuang Railway
Institute, Shijiazhuang 050043, P R China)

Abstract: The electroelastic interaction of a piezoelectric screw dislocation with an elliptical inclusion in piezoelectric materials is considered. The electroelastic fields in both the matrix and the inclusion were given explicitly by using the perturbation concept and the method of Laurent series expansion. Furthermore, the expressions of the image force acting on a piezoelectric screw dislocation were obtained. Numerical examples are provided to reveal the effect of piezoelectricity and the relative stiffness between the inclusion and the matrix on the image force. Consequently, the new interaction mechanism is found.

Key words: piezoelectric material; inclusion; dislocation; image force