应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1208_05

非线性 Schr dinger 方程初边值问题解的 Blow_up

王凡彬

(内江师范学院 数学系, 四川省 内江 641112)

(许政范推荐)

摘要: 利用 Laplace 算子的特征值和特征函数得到了一类非线性 Schr dinger 方程初边值问题解 Blow_up 的条件, 补充和完善了张健的结果

关 键 词: 非线性 Schr dinger 方程; 特征值; 特征函数; 爆破
中图分类号: O175 文献标识码: A

关于非线性 Schr dinger 方程初边值问题解的 Blow_up, 已有较多文献进行讨论, 例如文[1] 但文[1] 有一个弱点, 就是不能统一地在三类边界条件下讨论非线性 Schr dinger 方程初边值问题解的 Blow_up 本文考察一类非线性 Schr dinger 方程的初边值问题:

$$(\mathrm{A})\begin{cases} u_t - i \quad u = f(u) & ((x, t) \qquad (0, T)), \\ u(x, 0) = u_0(x) & (x \qquad), \\ \frac{\ u}{\ n} + \quad u = 0 & ((x, t) \qquad (0, T)), \end{cases}$$

其中 是 R^n 中具有光滑边界 的有界域; n 是 上外法线方向; f 是关于 u 的非线性复函数; $u_0(x)$ 是充分光滑的复函数; $= +$, 或 $= 0$, 或 $0 < \quad < +$, 即相应地问题(A) 具备第一、二、三类边界条件 我们利用 Laplace 算子的特征值和特征函数, 给出了问题(A) 的解在有限时间内 Blow_up 的条件, 得到的结果克服了文[1] 的弱点

首先介绍两个引理

引理 1 设 $_1$ 为以下 Laplace 算子的特征值问题

$$(\mathrm{B})\begin{cases} \quad + \quad = 0 & (x \qquad), \\ \frac{\ }{\ n} + \quad = 0 & (x \qquad) \end{cases}$$

的第一特征值, 在第一、三类边界条件下, $_1 > 0$, 相应地有特征函数 $_1(x) > 0(x \qquad)$, 且 $_1(x)\mathrm{d}x = 1$, 在第二类边界条件下, 可取 $_1 = 0$, $_1(x) = \left(\quad \mathrm{d}x \right)^{-1} = \mathrm{const} > 0$

引理 2(Jensen 不等式) 设 $g(x): x \quad [\ ,\ ] \mid \quad R^n$ 为凸函数, $f(t): t \quad [a, b] \mid \quad [\ ,\ ]$

收稿日期: 1998_09_23; 修订日期: 2000_05_25
作者简介: 王凡彬(1957) , 男, 四川省富顺人, 副教授.

为连续函数, 又 $P(t)$ 为连续函数, 且 $P(t)\quad 0$, $P(t)\quad 0$, 则成立以下 Jensen 不等式 :

$$g\left[\frac{{}_a^b f(t)P(t)\mathrm{d}t}{{}_a^b P(t)\mathrm{d}t}\right]\qquad\frac{{}_a^b g[f(t)]P(t)\mathrm{d}t}{{}_a^b P(t)\mathrm{d}t}\tag{1}$$

现在讨论问题(A) 解的 Blow_up, 我们只讨论第三类边界条件的情形, 所得到的结果也适用于第一类和第二类边界条件的情形

先考虑问题(A) 的古典解 $u(x, t)$ 的实部 Reu 的 Blow_up, 其虚部 Imu 的 *Blow_up* 在后面的推论 2 和推论 3 中讨论

定理　如果问题(A) 满足条件

) $\mathrm{Re}f(u)\quad -\quad {}_1\mathrm{Im}u+\ c\,|\ \mathrm{Re}u\,|^p$, 其中 $c>\ 0, p>\ 1$ 为实常数,

) $\quad {}_1(x)\mathrm{Re}u_0(x)\mathrm{d}x>\ 0$

则其古典解必在有限时间内 Blow_up

证　设 $I(t)=\quad {}_1\mathrm{Re}u\mathrm{d}x,$ (2)

则 $I\ (t)=\quad {}_1\mathrm{Re}u_t\mathrm{d}x=\quad {}_1\mathrm{Re}(\mathrm{i}\quad u+f)\mathrm{d}x=$

$(-\quad \mathrm{Im}u+\ \mathrm{Re}f)\mathrm{d}x\ =$

$(-\quad {}_1\ \mathrm{Im}u+\ \mathrm{Im}u\quad {}_1)\mathrm{d}x+$

$(\quad {}_1\mathrm{Re}f-\ \mathrm{Im}u-\quad {}_1)\ \mathrm{d}x$ (3)

设 ds 为　上的面积元素, 由 Green 公式及(B), (3) 成为

$$I\ (t)=\quad\left(-\quad {}_1\frac{\mathrm{Im}u}{n}+\ \mathrm{Im}u\frac{{}_1}{n}\right)\mathrm{d}s+$$

$$(\quad {}_1\mathrm{Re}f+\quad {}_1\mathrm{Im}u\qquad)\mathrm{d}x\ =$$

$$(\quad {}_1\qquad \mathrm{Im}u-\ \mathrm{Im}u\qquad {}_1)\mathrm{d}s+$$

$${}_1(\mathrm{Re}f+\quad {}_1\mathrm{Im}u)\mathrm{d}x\ =$$

$${}_1(\mathrm{Re}f+\quad {}_1\mathrm{Im}u)\mathrm{d}x\tag{4}$$

又由条件　), 知

$$I\ (t)\quad c\quad {}_1|\ \mathrm{Re}u\,|^p\mathrm{d}x,\tag{5}$$

根据 Jensen 不等式, 得

$$I\ (t)\quad c\left|\quad {}_1\mathrm{Re}u\mathrm{d}x\right|^p=\ c\,|\ I(t)\,|^p\tag{6}$$

由(6) 及条件　) 即知

$$T\quad {}_{I(0)}^{+}\frac{\mathrm{d}I}{cI^p}=\frac{1}{c(p-\ 1)\,I^{p-1}(0)}<+\qquad,\tag{7}$$

即 u 必在有限时间内 Blow_up

推论1 如果问题(A)满足条件: Ref − $_1$Imu− c| Reu|^p, $_1$Reu_0dx < 0, 则问题(A)的古典解必在有限时间内Blow_up

证 在问题(A)中充$u(x, t)$ = − $u(x, t)$即可得证

推论2 如果问题(A)满足条件: Imf $_1$Reu + c | Imu|^p, $_1$Imu_0dx < 0, 则问题(A)的古典解必在有限时间内Blow_up

证 在问题(A)中令$u(x, t)$ = $iu(x, t)$即可得证

推论3 如果问题(A)满足条件: Imf $_1$Reu − c | Imu|^p, $_1$Imu_0dx < 0, 则问题(A)的古典解必在有限时间内Blow_up

证 在问题(A)中令$u(x, t)$ = − $u(x, t)$, 利用推论2即可得证

[参 考 文 献]

[1] 张健. 关于非线性Schr dinger方程混合问题解的爆破[J]. 应用数学, 1989, **2**(4): 20 27.

Blow_up of the Solutions for the Initial_Boundary Problems of the Nonlinear Schr dinger Equations

WANG Fan_bin

(Neijiang Teacher s University, Neijiang, Sichuan 641112, P R China)

Abstract: The conditions of blow_up of the solutions for one class of nonlinear Schr dinger equations by using the eigenvalue and eigenfunction of the Laplace operator are got, which complements and perfects the results of ZHANG Jian.

Key words: nonlinear Schr dinger equation; eigenvalue; eigenfunction; blow_up