应用数学和力学, 第 21 卷 第 10 期(2000 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 10_1002_07

窄域上 2D 弱阻尼 KdV 方程的 blow_up 的研究

田立新[1], 刘玉荣[2], 刘曾荣[3]

(1 江苏理工大学 数理系, 江苏 镇江 212013; 2 苏州大学 数学系, 江苏 苏州 215006;
3 上海大学 嘉定校区 数学系, 上海, 201800)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 得到了 2D 的弱阻尼 KdV 方程在窄域上 blow_up 时间估计

关 键 词: 弱阻尼; 非线性孤立波方程; 窄域; 高维动力系统
中图分类号: O175 29 文献标识码: A

引 言

由于高维耗散孤立波方程的动力学行为的复杂性, 该类问题研究难度较大 在[1]、[2]、[3]中提出由 Lax 导出的 2 维 KdV 方程, 在[3]获得耗散孤立波方程解的存在性 本文在[3]、[4]基础上, 研究窄域上 2D 弱阻尼 KdV 方程的长期动力学行为的关键问题: 窄域上 2D 弱阻尼 KdV 方程的 blow_up 的时间估计

本文研究的 2D 弱阻尼的 KdV 方程如下:

$$u_t + u_{xxx} - \quad u + \quad u + (u \quad) u = 0, \quad , \quad > 0, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2) \qquad R^2,$$

$$u(x_1 + 2 \ , x_2, t) = u(x_1, x_2 + 2 \ , t) = u(x_1, x_2, t), \qquad t \quad 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{3}$$

其中 $= [0, 2\ ] \quad [0, 2 \quad]$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中 2D 窄域, $0 <$ 1 是较小的某个数 $u = (u_1, u_2)$ $L^p(\quad)$ 且满足旋度为 0, 即

$$\mathrm{curl}\, u = 0$$

方程(1) ~ (3) 的解的存在性及唯一性见[3]

本文, 引入如下符号:

设 $Q = [0, 2\ ]$, $= [0, 2\ ] \quad [0, 2 \quad]$ 任意 y , 则 $y = (y_1, y_2)$, 其中 $y_1 \quad [0,$

收稿日期: 1999_06_25; 修订日期: 2000_05_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19601020); 江苏省青年科技基金资助项目(BQ98023); 江苏省青蓝工程基金资助项目
作者简介: 田立新(1963), 男, 江苏省姜堰人, 教授, 博士, 江苏理工大学非线性科学研究中心主任, 江苏省跨世纪学术带头人, 在国内外较重要的杂志发表论文 50 余篇(E_mail: tianlx@jsust.edu.cn).

$2\ ]$, y_2 $[0, 2\ ]$ 定义 $\mathbf{R}^2$ 实值函数 U $L^p(\ )$, 并引入新范数

$$| U |_{L^p(\ )} = {}^{-1/p} \ U \ _{L^p(\ )},$$

其中 是 L^p 范数, 对 $p = 2$, 相应的新内积定义为:

$$U, V \ _{L^p(\ )} = {}^{-1}(U, V)_{L^2(\ )},$$

其中 $(\ ,\ )$ 记为 $L^p(\ )$ 中内积 设 U $L^2(\ )$, 定义投影算子 M 如下:

$$V = MU, \text{其中 } V = V(y_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2} U \mathrm{d}y_2$$

则 $M: L^2(\ )$ 仅含变量 y_1 的函数的闭子空间 易证 M 是一个正交投影, 其正交补 $I - M$ 为 $W = (I - M)U$ 易得

$$| U |^2_{L^2(\ )} = | V |^2_{L^2(\ )} + | W |^2_{L^2(\ )}$$

作如下变换, 令 $x_1 = y_1$, $x_2 = {}^{-1}y_2$, $Q_2 = [0, 2\ ]$ $[0, 2\ ]$ 定义

$$= (D_{x_1}, {}^{-1}D_{x_2}), \quad = D^2_{x_1} + {}^{-2}D^2_{x_2}, \quad {}^3 = (D^3_{x_1}, {}^{-3}D^3_{x_2})$$

定义 $u = u(x)$ 使 $u(x) = U(y)$, 其中 x、y 如上是线性相关的 记$(\ ,\ )$为 $L^2(Q_2)$ 中的内积 则对 $p > 1$, 下述等式成立:

$$| U |_{L^p(\ )} = \ u \ _{L^p(Q_2)}$$

则有下述 Sobolev 空间中范数满足的不等式

$$u \ _{H^1(Q_2)} \quad | U |_{H^1(\ )} \quad {}^{-1} \ u \ _{H^1(Q_2)},$$

$$u \ _{H^2(Q_2)} \quad | U |_{H^2(\ )} \quad {}^{-2} \ u \ _{H^2(Q_2)}$$

与上述投影定义类似可以定义 Q_2 中的投影算子 M 及 $I - M$:

$$v = Mu,$$

其中 $$v = v(x_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2} u(x)\mathrm{d}x_2, \quad w = (I - M)u$$

在这些符号下, 方程(1)~(3)成为

$$u_t + {}^3u - \ u + \ u + (u \ )u = 0, \quad , \ > 0, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &u = u(x, t), x = (x_1, x_2), \\ &u(x_1 + 2\ , x_2, t) = u(x_1, x_2 + 2\ , t) = u(x_1, x_2, t), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ 也以 } 2\ \text{ 为周期} \tag{6}$$

将投影算子 M 及 $I - M$ 用于(4) 二边, 得到

$$\begin{cases} v_t + {}^3v - \ v + \ v + M((u \ )u) = 0, \\ w_t + {}^3w - \ w + \ w + (I - M)((u \ )u) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $u = v + w$ 为证明(4)~(6) 的吸收集的存在性, 我们引出(7) 的约化方程如下, 在(7) 中取 $v = v$, $w = 0$, 则 $u = v$, 由(4) 式得到

$$\begin{cases} v_t + {}^3v - \ v + \ v + (v \ )v = 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) = Mu_0 \end{cases} \tag{8}$$

注意到 $u = v$ 是二维的, 可设 $v = (v_1, v_2)$, 则由(8) 式得到

$$v_{1,t} + {}^3v_1 - \ v_1 + \ v_1 + v_1 D_{x_1} v_1 = 0, \tag{9}$$

$$v_{2,t} + {}^3v_2 - \ v_2 + \ v_2 + v_1 D_{x_1} v_2 = 0, \tag{10}$$

其中(9) 式是一个关于 v_1 的一维弱阻尼 KdV 方程, (10) 式是关于 v_2 的一个线性方程

1 主要定理

命题 1 1(见[4]、[5]、[6]) 对一维的弱阻尼 KdV 方程

$$\begin{cases} u_t + \ u_{xxx} - \ u_{xx} + \ u + uu_x = 0, & \ , \ > 0, \\ u(x + 2 \ , t) = u(x, t) \quad L^2([0, 2 \ ]) = X, & t \quad 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{11}$$

则(11)式具有整体吸引子 A 并且存在常数 $_0$, $_1$ 使得

$$\lim_t \sup | S(t) u_0 |^2 \quad {}_0^2,$$

$$\lim_t \sup | \mathrm{A}^{1/4} S(t) u_0 |^2 \quad {}_1^2,$$

其中 $\mathrm{A} = \ ^4/ \ x^4$, $S(t)$ 是(11) 对应的解半群 进一步, 在 $X = L^2[0, 2 \ ]$ 中存在半径为 2 $_0$、2 $_1$ 的吸收球 记 $X^{1/4}$ 为算子 $\mathrm{A}^{1/4}$ 的定义域

本文定义无界线性算子 A $u = \ ^2 u$, 则

$$\mathrm{A}^{1/2} u = - \ u, \ | \mathrm{A}^{1/4} u | = | \ u |, \ | \mathrm{A}^{3/4} u | = | \ ^3 u |$$

仿照[7]、[8]可得

1) $| ((u \quad) v, w) | \quad C | v |^{1/2} | \mathrm{A}^{1/4} u | | \mathrm{A}^{1/4} v | | w |^{1/2} | A^{1/4} w |^{1/2}$, (12)

其中 C 与 无关, $u, v, w \quad L^2(\ )$ 或 $L^2(Q_2)$;

2) $| ((u \quad) u, w) | \quad C | u |^{1/2} | \mathrm{A}^{1/4} u |^{3/2} | w |^{1/2} | \mathrm{A}^{1/2} w |^{1/2}$, (13)

其中 C 与 无关, $u, w \quad L^2(Q_2)$

命题 1 2(见[9]、[10]) 考虑(11)式, 则存在正数 、L 及数值函数 D, D 在 $| u_0 |$ 处实值解析, 使得对于解半群 $S(t)$ 满足

$$| \mathrm{A}^{1/4} S(t) u_0 |^2 \quad e^{-2 \ t} D + L, \quad t \quad 0$$

命题 1 3(见[9]、[10]) 给定 k 满足 $0 < k < 1$, 则存在正数 b_i, $i = 1, 2$, 使得对所有 $u_0 \quad X^{1/4}$, 成立

$$| \mathrm{A}^{1/4} S(t) u_0 |^2 \quad L + k | \mathrm{A}^{1/4} u_0 |^2, \quad t \quad T_0,$$

其中 L 为常数, 且 $T_0 = b_1 \exp(b_2 | \mathrm{A}^{1/4} u_0 |^4)$

定理 1 1 给定初值 u_0, 对方程(1) ~ (3), 设 $D(\mathrm{A}^{1/4})$ 中 blow_up 时间为

$$T^* = T^*(u_0) = \sup \left\{ t : \sup_{0 \ s \ t} | \mathrm{A}^{1/4} u(s) | < \quad \right\},$$

则 $T^* \quad k / | \mathrm{A}^{1/4} u_0 |^2$, 其中 k 为常数且 k 与初始条件无关

定理 1 2 设 $B_0 > 0$, $C_0 > 0$, $h = h(\ )$ 给定, 则存在 $_0$, $0 < \ _0 \quad 1$, $B_1 \quad B_0$, $C_1 > C_0$, $T_1 = T_1(\ ) > 0$, 对 $0 < \ < \ _0$, 当 $| \mathrm{A}^{1/4} v_0 |^2 \quad B_0^2 h^{-2}$, $| \mathrm{A}^{1/4} w_0 |^2 \quad C_0^2 \ ^{-1} h^{-1}$ 时成立

$$| \mathrm{A}^{1/4} v(T_1) |^2 \quad B_1^2 h^{-2}, \ | \mathrm{A}^{1/4} w(T_1) |^2 \quad C_1^2 \ ^2 h^{-2},$$

其中 $_0$、B_1、C_1 为依赖于 B_0、C_0 但不依赖于 的常数且 0^+ 时 $T_1(\ ) \quad 0$

$$| \mathrm{A}^{1/4} v(T_1) |^2 \quad B_1^2 h^{-2}, \ | \mathrm{A}^{1/4} w(T_1) |^2 \quad C_1^2$$

定理 1 1, 1 2 是我们证明窄域上 2D 弱阻尼 KdV 方程存在局部吸引子的关键 关于该类方程在窄域上 2D 时局部吸引子的存在性我们另文给出

2 定理的证明

定理 1 1 的证明

方程(4)与 $A^{1/2}u$ 作内积,则得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{1/4}u|^2+(\ \ {}^3u,A^{1/2}u)+\ \ |A^{1/2}u|^2+\ \ |A^{1/4}u|^2+((u\ \ \ )u,A^{1/2}u)=0,\\&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{1/4}u|^2+(\ \ {}^3u,A^{1/2}u)+\ \ |A^{1/2}u|^2\ \ \ \ |A^{1/4}u|^2+|((u\ \ \ )u,A^{1/2}u)|\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

因为

$$(\ \ {}^3u,A^{1/2}u)\ \ C|A^{1/2}u|,\ |A^{1/4}u|^2\ \ |u||A^{1/2}u|\ \ C|A^{1/2}u|,$$

$$|A^{3/4}u|^2=(A^{5/8}u,A^{7/8}u)\ \ |A^{5/8}u||A^{7/8}u|=(A^{3/4}u,A^{1/2}u)^{1/2}|A^{7/8}u|$$

$$|A^{3/4}u|^{1/2}|A^{1/2}u|^{1/2}|A^{7/8}u|,$$

则

$$|A^{3/4}u|^2\ \ |A^{1/4}u|^{2/3}|A^{7/8}u|^{4/3}\ \ \frac{1}{3}|A_E^{1/2}u|^2+\frac{2}{3}|A_E^{7/8}u|^2,$$

$$|A_E^{1/2}u|^2\geq 3|A_E^{3/4}u|^2-2|A_E^{7/8}u|^2.$$

又由[4],

$$|A_E^{7/8}u|^2=+A_E^{3/8}u+^2\leq C_1|A_E^{1/4}A_E^{3/8}u|^2=C_1|A_E^{5/8}u|^2\leq C_2|A_E^{3/4}u||A_E^{1/2}u|\leq$$

$$\frac{C_2C_3}{2}|A_E^{3/4}u|^2+\frac{C_2}{2C_3}|A_E^{1/2}u|^2,$$

则

$$|A_E^{1/2}u|^2\geq(3-C_2C_3)|A_E^{3/4}u|^2-\frac{C_2}{C_3}|A_E^{1/2}u|^2,$$

所以

$$|A_E^{1/2}u|^2\geq\frac{(3-C_2C_3)C_3}{C_2+C_3}|A_E^{3/4}u|^2.$$

将上述不等式用于(14)式,则得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_E^{1/4}u|^2+C|A_E^{3/4}u|^2+G|A_E^{1/2}u|^2\leq\ c\ |A_E^{1/4}u|^2+$$

$$C_4|A_E^{1/4}u|^2|A_E^{1/2}u|^{1/2}|A_E^{3/4}u|^{1/2}\leq$$

$$c\ |A_E^{1/4}u|^2+\frac{3}{4}C_5C_4^{4/3}\left(\frac{2}{3}C_6|A_E^{1/4}u|^4+\frac{1}{3C_6}|A_E^{1/2}u|^2\right)+\frac{4}{C_5}|A_E^{3/4}u|^2\leq$$

$$CC|A_E^{1/2}u|^2+\frac{1}{2}C_5C_4^{4/3}C_6|A_E^{1/4}u|^4+\frac{1}{4C_6}|A_E^{1/2}u|^2+\frac{4}{C_5}|A_E^{3/4}u|^2.$$

则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_E^{1/4}u|^2+\left(G-CC-\frac{1}{4C_6}\right)|A_E^{1/2}u|^2\leq\frac{1}{2}C_5C_4^{4/3}C_6|A_E^{1/4}u|^4+\left(\frac{4}{C_5}-C\right)|A_E^{3/4}u|^2.$$

取 C_6,使 $G-CC-\frac{1}{4C_6}>0$,则得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_E^{1/4}u|^2+\left(G-CC-\frac{1}{4C_6}\right)\frac{(3-C_2C_3)C_3}{C_2+C_3}|A_E^{3/4}u|^2\leq$$

$$\frac{1}{2}C_5C_4^{4/3}C_6|A_E^{1/4}u|^4+\left(\frac{4}{C_5}-C\right)|A_E^{3/4}u|^2.$$

则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_E^{1/4}u|^2\leq\frac{1}{2}C_5C_4^{4/3}C_6|A_E^{1/4}u|^4+$$

$$\left(\frac{4}{C_5} - C - \frac{(4C_6\gamma - 4CCC_6 - 1)(3 - C_2C_3)C_3}{4C_6(C_2 + C_3)}\right) |A_\varepsilon^{3/4}u|^2.$$

取 C_3 及 C_5 使得

$$\frac{4}{C_5} > 0 \text{ 及 } \frac{4}{C_5} - C - \frac{(4C_6\gamma - 4CCC_6 - 1)(3 - C_2C_3)C_3}{4C_6(C_2 + C_3)} = 0,$$

则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_\varepsilon^{1/4}u|^2 \le C_7 |A_\varepsilon^{1/4}u|^4.$$

考虑微分不等式 $5c \le C_7 5^2$, 可以得到 $T^* \ge k/|A_\varepsilon^{1/4}u_0|^2$, 其中 k 为常数与初值 u_0 无关.

注 由定理 1.1, 我们很容易得到: 对给定的 R_0, $N > 1$, 若 $u_0 \in D(A^{1/4})$, 使 $|A_\varepsilon^{1/4}u_0|^2 \le R_0$, 则 $|A_\varepsilon^{1/4}S(t)u_0|^2 \le NR_0$, 当 $0 \le t \le ((N-1)/N)\cdot(k/R_0)$, 其中 k 为常数, 且与 u_0 无关.

定理 1.2 的证明

若记 $T^N = ((N-1)/N)\cdot(1/R_0)$, 由定理 1.1 及其注则 $T^N < T^*(u_0)$, 其中 $R_0 = B_0^2h^{-2} + C_0^2\varepsilon^{-1}h^{-1}$, 或 $R_0^2 \le 2B_0^4h^{-4} + 2C_0^4\varepsilon^{-2}h^{-2}$. 则有 $R_0^2 \le \varepsilon^{-1}h^{-2}D_0^2$, 其中 $D_0^2 = B_0^2 + C_0^2$. 注意到, 如果 $T^* < \infty$, 则当 $N \to \infty$ 时, $T^N \to T^*$. 因此, 在下述说明中我们只要考虑 w 在区间 $[0, T^N)$ 中 $(N \ge 2)$. 由定理 1.1 的注则得到在 $[0, T^N)$ 上成立 $|A_\varepsilon^{1/4}u(t)|^2 \le NR_0$. 方程(4)式与 $A_\varepsilon^{1/2}w$ 取内积, 则得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_\varepsilon^{1/4}w|^2 + \gamma|A_\varepsilon^{1/2}w|^2 + C_1|A_\varepsilon^{3/4}w|^2 \le$$
$$|u|^{1/2}|A_\varepsilon^{1/4}u|^{3/2}|A_\varepsilon^{1/2}w|^{1/2}|A_\varepsilon^{3/4}w|^{1/2} \le$$
$$\frac{1}{2}C_2C^{4/3}C_3|A_\varepsilon^{1/4}u|^2 + \frac{C_2C^{4/3}}{4C_3}|A_\varepsilon^{1/2}w|^2 + \frac{4}{C_5}|A_\varepsilon^{3/4}w|^2,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_\varepsilon^{1/4}w|^2 \le C_2C^{4/3}C_3|A_\varepsilon^{1/4}u|^4 + 2\left(\frac{C_2C^{4/3}}{4C_3} + \frac{1}{2C_4} - \gamma\right)|A_\varepsilon^{1/2}w|^2 +$$
$$2\left(\frac{4}{C_2} + \frac{C_4}{2} - C_1\right)|A_\varepsilon^{3/4}w|^2.$$

因为 w 的相应于 x_2 的平均为零, 则有

$$\varepsilon^{-2}|A_\varepsilon^{1/2}w|^2 \le |A_\varepsilon^{3/4}w|^2,\quad \varepsilon^{2}|A_\varepsilon^{1/4}w|^2 \le |A_\varepsilon^{1/2}w|^2.$$

取 $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, 使得

$$2\left(\frac{C_2C^{4/3}}{4C_3} + \frac{1}{2C_4} - \gamma\right) = -\varepsilon^2,\quad 2\left(\frac{4}{C_2} + \frac{C_4}{2} - C_1\right) = 0.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A_\varepsilon^{1/4}w|^2 + \varepsilon^4|A_\varepsilon^{1/4}w|^2 \le \frac{1}{2}C_6^2N^2R_0^2,$$

从而

$$|A_\varepsilon^{1/4}w(t)|^2 \le \mathrm{e}^{-\varepsilon^4 t}|A_\varepsilon^{1/4}w_0|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}C_6^2N^2R_0^2.$$

由本定理假设, 得到

$$|A_\varepsilon^{1/4}w(t)|^2 \le \mathrm{e}^{-\varepsilon^4 t}C_0^2\varepsilon^{-1}h^{-1} + \varepsilon^4C_6N^2(B_0^4h^{-4} + C_0^4\varepsilon^{-2}h^{-2}) =$$
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon^4 t}C_0^2\varepsilon^{-1}h^{-1} + C_6^2N^2\varepsilon^2h^{-2}(B_0^4\varepsilon^2h^{-2} + C_0^4).$$

记 $D_1 = C_6^2N^2(B_0^4\varepsilon^2h^{-2}+C_0^4)$，对 $0<\varepsilon\le 1$，则

$$|A_\varepsilon^{1/4}w(t)|^2 \le e^{-\varepsilon^{-4}t}C_0^2\varepsilon^{-1}h^{-1}+\varepsilon^2h^{-2}D_1. \tag{15}$$

若 $t=T_1$，$e^{-\varepsilon^{-4}t}C_0^2\varepsilon^{-1}h^{-1}=\varepsilon^2h^{-2}D_1$，则

$$T_1=-\varepsilon^4\lg\frac{\varepsilon^3h^{-1}D_1}{C_0^2}.$$

现要求 $T_1\le T^N$，由此来找这样的 T_1。

因为 $R_0\le\varepsilon^{-1}h^{-2}D_0^2$，则

$$R_0T_1\le -D_0^2\varepsilon^3h^{-2}\lg\frac{\varepsilon^3h^{-1}D_1}{C_0^2},$$

则由 h 的选择，当 $\varepsilon\to0^+$ 时，$R_0T_1\to0$。从而 $\varepsilon\to0^+$ 时，也有 $T_1\to0$。则

$$T_1(\varepsilon_0)\le\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{R_0},$$

对某个 $\varepsilon_0>0$，$T_1\le T^N$。因此 $|A_\varepsilon^{1/4}w(T_1)|^2\le C_7^2\varepsilon^2h^{-2}$，其中 $C_7^2=2D_1$。

接下来研究 $u=v+w$ 中 v 的方程。在方程(4)的二边用 $A_\varepsilon^{1/2}v$ 作内积，则得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A_\varepsilon^{1/4}v|^2 \le{}& \frac{1}{2}C_2C^{4/3}C_3|A_\varepsilon^{1/4}v|^4+\\ &\left\{\frac{C_2C^{4/3}}{4C_3}+\frac{1}{2C_4}-G\right\}|A_\varepsilon^{1/2}v|^2+\left\{\frac{4}{C_2}+\frac{C_4}{2}-C_1\right\}|A_\varepsilon^{3/4}v|^2.\end{aligned} \tag{16}$$

取 C_2, C_3, C_4 使得

$$\frac{C_2C^{4/3}}{4C_3}+\frac{1}{2C_4}-G=0;\quad \frac{4}{C_2}+\frac{C_4}{2}-C_1=0;\quad \frac{1}{2}C_2C^{4/3}C_3=1.$$

注意到 $|A_\varepsilon^{1/4}u|^4\le2(|A_\varepsilon^{1/4}v|^4+|A_\varepsilon^{1/4}w|^4)$，则由(16)式得到

$$\frac{d}{dt}|A_\varepsilon^{1/4}v|^2\le2(|A_\varepsilon^{1/4}v|^4+|A_\varepsilon^{1/4}w|^4).$$

因为 $|A_\varepsilon^{1/4}v|^2\le NR_0$，$t\in[0,T_1]$，则

$$\frac{d}{dt}|A_\varepsilon^{1/4}v|^2-B|A_\varepsilon^{1/4}v|^2\le2|A_\varepsilon^{1/4}w|^4.$$

因为 $|A_\varepsilon^{1/4}w(t)|^2\le e^{-\varepsilon^{-4}t}C_0^2\varepsilon^{-1}h^{-2}+\varepsilon^2h^{-2}D_1$，则

$$|A_\varepsilon^{1/4}w(t)|^2\le2C_0^4e^{-\varepsilon^{-4}t}\varepsilon^{-2}h^{-2}+2\varepsilon^4h^{-4}D_1^2.$$

这时 $B=2NR_0=2N\varepsilon^{-1}h^{-2}D_0^2=\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2$，其中 D_2 为对 $0<\varepsilon\le1$ 一致有界。则

$$\frac{d}{dt}|A_\varepsilon^{1/4}v|^2-\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2|A_\varepsilon^{1/4}v|^2\le2C_0^4e^{-\varepsilon^{-4}t}\varepsilon^{-2}h^{-2}+2\varepsilon^4h^{-4}D_1^2,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2t}|A_\varepsilon^{1/4}v|^2)\le e^{-\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2t}(2C_0^4e^{-\varepsilon^{-4}t}\varepsilon^{-2}h^{-2}+2\varepsilon^4h^{-4}D_1^2).$$

在 $[0,T_1)$ 上积分，则

$$e^{-\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2T_1}|A_\varepsilon^{1/4}v|^2-|A_\varepsilon^{1/4}v_0|^2\le\varepsilon^5h^{-2}D_1^2D_2^{-1}+C_0^4\varepsilon^2h^{-2}\le D_3h^{-2},$$

其中 $D_3=\varepsilon^5D_1^2D_2^{-1}+C_0^4\varepsilon^2$，则 $|A_\varepsilon^{1/4}v(T_1)|^2\le\exp(\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2T_1)\{|A_\varepsilon^{1/4}v_0|^2+D_3h^{-2}\}$。由前述对 T_1 的选择，则当 $\varepsilon\to0$ 时，$\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2T_1\to0$，所以存在 ε_0，使 $\exp(\varepsilon^{-1}h^{-2}D_2T_1)\le2$，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$。则对 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，成立

$$|A_\varepsilon^{1/4}v(T_1)|^2\le2|A_\varepsilon^{1/4}v_0|^2+2D_3h^{-2}\le B_1^2h^{-2},$$

其中 $B_1^2 = \sup_{0<E<E_0}(2B_0^2 + 2D_3)$#

[参 考 文 献]

[1] 谷超豪. 孤立子理论及应用[M]. 应用数学丛书,杭州:浙江大学出版社,1990.

[2] 刘式适,刘式达,谭本馗. 非线性大气动力学[M]. 北京:国防工业大学出版社,1996.

[3] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 非线性科学丛书,上海:上海科技教育出版社,1995.

[4] 田立新,徐振源. 弱阻尼 KdV 方程长期动力学行为研究[J]. 应用数学和力学,1997,**18**(10):953) 958.

[5] Balmforth N L, Ierley G R, Worthing R. Pulse dynamics in unstable medium[J]. SIAM J Appl Math, 1997, **57**(1):205) 251.

[6] Ghidaglia J M. Weakly damped forced Korteweg_de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time[J]. J Differential Equations, 1988, **74**(2):369) 390.

[7] Ghidaglia J M. A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations [J]. J Differential Equations, 1994, **110**(2):356) 359.

[8] 卢殿臣,田立新,刘曾荣. 扰动周期 KdV 方程的小波基分析[J]. 应用数学和力学,1998, **19**(11):975) 979.

[9] Temam R, Wang S. Inertial form of Navier_Stokes equations on the sphere[J]. J Funct Anal, 1993, **117**(2):215) 243

[10] LIU Zeng_rong, XU Zhen_yuan. A new method of studying the dynamical behaviour of the sine_Gordon equation[J]. Phys Lett A, 1995, **204**(5):343) 346.

The Research of Blow_up in 2D Weakly Damped Forced KdV Equation on Thin Domain

TIAN Li_xin[1], LIU Yu_rong[2], LIU Zeng_rong[3]

(1. Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P R China;

2. Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P R China;

3. Department of Mathematics, Shanghai University, Jiading, Shanghai 201800, P R China)

Abstract: The time estimate of the blow_up of the weakly damped forced KdV equation in thin 2D domains is given.

Key words: weakly damped forced; nonlinear solitary equation; thin domains; higher_dimensional dynamical system