文章编号: 1000_0887(2000) 10_1009_04

Burgers_KdV 方程的二类行波解*

张玉峰,　张鸿庆

(大连理工大学 数学研究所, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要:　在熊树林关于“Burgers_KdV 方程的一类解析解”工作的基础上, 给出了 Burgers_KdV 方程的另外两类精确行波解, 扩充了范恩贵等人工作的结果•

关 键 词: Burgers_KdV 方程; 行波解; Riccati 方程
中图分类号: O175　　文献标识码: A

引　言

所谓 Burgers_KdV 方程是指如下非线性演化方程

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

它是人们在近十几年来研究含气泡的液体流动和弹性管道中的液体流动等问题中提出来的数学模型方程[1], 其中的 α 和 β 分别代表耗散系数和色散系数• 文献[1] 在求方程(1) 的解析解时, 首先设其行波解为:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - \lambda t• \tag{2}$$

将(2) 代入(1) 并关于 ξ 积分一次得到关于 ξ 的常微分方程

$$u''(\xi) - \frac{\alpha}{\beta}u'(\xi) + \frac{1}{2\beta}u^2 - \frac{\lambda}{\beta}u + \frac{c}{\beta} = 0• \tag{3}$$

其次作者作了一个变换 $u(\xi) = u_1(\xi) + \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2c}$, 代入(3) 并假设所得方程的解为如下形式

$$u_1(\xi) = \frac{A\mathrm{e}^{\beta(\xi+\xi_0)}}{(1 + \mathrm{e}^{\alpha(\xi+\xi_0)})^2},$$

经过代数运算得到了方程(1) 的一个解析解• 本文在此基础上, 又给出了 Burgers_KdV 方程另外两类行波解•

1　B_KdV 方程的第一类行波解

假设方程(1) 的解具有形式

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i v^i(\xi), \quad v'_\xi = k(1 - v^2),$$

* 收稿日期: 1999_04_16; 修订日期: 2000_04_29
基金项目: 国家重点基础发展规划项目(98014119); 国家教委博士点基金资助项目
作者简介: 张玉峰(1964—), 男, 山东泰安人, 在读博士生.

通过平衡 u'' 和 u^2 易确定出 $m=2$. 故可选择(3) 的解为:

$$u=A_0+A_1v+A_2v,\; v'=k(1-v^2), \tag{4}$$

其中 A_0、A_1、A_2、k 均为待定系数. 将(4) 代入(3) 并使关于 v 的每阶导数系数为 0 得

$$\begin{cases} 6\beta A_2k^2+\dfrac{1}{2}A_2^2=0, \\ 2\beta A_1k^2+2\alpha A_2k+A_1A_2=0, \\ -8\beta A_2k^2+\alpha A_1k+\dfrac{1}{2}A_1^2+A_0A_2-\lambda A_2=0, \\ -2\beta A_1k^2-2\alpha A_2k+A_0A_1-\lambda A_1=0, \\ 2\beta A_2k^2-\alpha A_1k+\dfrac{1}{2}A_0^2-\lambda A_0+c=0. \end{cases}$$

解上方程得:

$$k=\pm\frac{\alpha}{10\beta},\quad \lambda=\pm\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}, \tag{5}$$

$$A_0=\pm\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}+\frac{3\alpha^2}{25\beta}, \tag{6}$$

$$A_1=\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}, \tag{7}$$

$$A_2=-\frac{3\alpha^2}{25\beta}. \tag{8}$$

因为 Riccati 方程 $v'_\xi=k(1-v^2)$ 有如下形式的通解[2]

$$v=\frac{A-B\mathrm{e}^{-2k\xi}}{A+B\mathrm{e}^{-2k\xi}}=\begin{cases} 1, & B=0, \\ -1, & A=0, \\ \tanh\left(k\xi-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{B}{A}\right), & AB>0, \\ \coth\left(k\xi-\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{B}{A}\right)\right), & AB<0, \end{cases}$$

其中 A, B 满足 $A^2+B^2\neq 0$. 将(5) ~ (8) 代入(4) 即得方程(1) 的第一类精确行波解:

$$\begin{aligned} u(x,t)={}&\pm\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}+\frac{3\alpha^2}{25\beta}\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}\tanh\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\tanh^2\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right], \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u(x,t)={}&\pm\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}+\frac{3\alpha^2}{25\beta}\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}\coth\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\coth^2\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\right.\right. \\ &\left.\left.\frac{\sqrt{63\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

因为文献[3] 在求(3) 式时, 将任意积分常数 c 视为 0, 故得到的解仅是(9)、(10) 的特例. 易见, 当 $v=\pm 1$ 时, 由(9)、(10) 可得方程(1) 的两个常数解, 这是文献[3] 中没有的结果.

2 B_KdV 方程的第二类行波解

第二类行波解是指方程(3) 的形如下式的解

$$u(x,t)=u(\xi)=B_0+B_1v+B_2v^2,\ v'_\xi=k(1+v^2)\cdot \tag{11}$$

将(11) 代入(3) 并且令关于 v 的各阶导数系数为 0 得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}B_2^2+6\beta B_2k^2=0,\\ 2B_1\beta k^2-2\alpha B_2k+B_1B_2=0,\\ 8\beta B_2k^2-B_1k\alpha+\dfrac{1}{2}B_1^2+B_0B_2-B_2\lambda=0,\\ 2\beta B_1k^2-2\alpha B_2k+B_0B_1-B_1\lambda=0,\\ 2B_2k^2\beta-\alpha B_1k+\dfrac{1}{2}B_0^2-B_0\lambda+c=0,\end{cases}$$

解之得:

$$k=\pm\frac{\alpha}{10\beta},\quad \lambda=\mp\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}, \tag{12}$$

$$B_0=\pm\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}-\frac{3\alpha^2}{25\beta}, \tag{13}$$

$$B_1=\pm\frac{6\alpha^2}{25\beta},\quad B_2=-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\cdot \tag{14}$$

这里要求 c 满足 $625\beta^2c\geqslant 12\alpha^4$, 以下类同•

因为 Riccati 方程 $v'_\xi=k(1+v^2)$, $k\in\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 具有解

$$v=\tan(k\xi+\xi_0),\quad v=-\cot(k\xi+\xi_0), \tag{15}$$

其中 ξ_0 为任意常数, 所以将(12) ~ (14) 代入(15) 得方程(1) 的第二类精确孤波解:

$$u(x,t)=\pm\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}\pm\frac{6\alpha^2}{25\beta}\tan\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\tan^2\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]-\frac{3\alpha^2}{25\beta},$$

$$u(x,t)=\pm\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}\cot\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\cot^2\left[\pm\frac{\alpha}{10\beta}\left(x\mp\frac{\sqrt{3\alpha^4+5\,000\beta^2c}}{50\beta}t\right)+\xi_0\right]-\frac{3\alpha^2}{25\beta},$$

由此得到方程(1) 的三角函数行波解, 这是在文献[1] 、[3] 中都没有得到的结果•

[参 考 文 献]

[1] 熊树林. Burgers_KdV 方程的一类解析解[J]. 科学通报, 1989, **34**(1): 26—29.

[2] 尚亚东. 组合 KdV 与 MKdV 方程的显示精确解[J]. 应用数学, 1992, **12**(1): 6—8.

[3] FAN En_gui, ZHANG Hong_qing. A note on the homogeneous balance method[J]. Phys Lett A, 1998,

246: 403—406.

[4] 范恩贵, 张鸿庆. 获得非线性演化方程 Backlund 变换的一种新的途径[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(7): 603—608.

Two Types of Traveling Wave Solutions to Burgers_KdV Equations

ZHANG Yu_feng, ZHANG Hong_qing

(Institute of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: Two Types of exact traveling wave solutions to Burgers_KdV equation by basis on work of XIONG Shu_lin are presented. Furthermore, some new results are replenished in work of FAN En_gui et al.

Key words: Burgers_KdV equation; traveling wave solution; Riccati equation