应用数学和力学, 第 21 卷 第 10 期(2000 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 10_1093_07

含椭圆夹杂二维各向异性电磁弹性介质的耦合问题*

姜稚清, 刘金喜

(石家庄铁道学院 力学与工程科学系, 石家庄 050043)

(陈大鹏推荐)

摘要: 研究了无限大二维各向异性电磁弹性固体的椭圆夹杂问题• 基于广义 Stroh 方法、保角变换和扰动概念, 得到了基体和夹杂内电场、磁场和弹性场的封闭解• 本文结果可用于研究电磁弹性复合材料的有效性能

关 键 词: 电磁弹性介质; Stroh 方法; 耦合场; 夹杂

中图分类号: O343.7; O482.41 文献标识码: A

引 言

确定夹杂引起的扰动场对于研究先进复合材料的物理性能是十分重要的• 一般来讲, 先进复合材料可分为用于承载的结构复合材料和实现能量转换的功能复合材料, 如: 压电、热释电以及电磁复合材料等• 自 50 年代以来, 人们已经对结构材料的夹杂问题进行了大量的研究, 取得了丰富的成果• 90 年代初, 力学工作者开始研究功能材料的夹杂问题, 其中大部分工作是针对压电材料的• 代表性的工作包括: Benveniste[1]、Wang[2]、Chen[3]以及 Dunn 和 Taya[4]研究了含椭球夹杂压电材料的三维问题; Pak[5]分析了压电材料反平面应变状态下圆形夹杂产生的弹性场和电场; Liang 等人[6]和 Chung 与 Ting[7]得到了含椭圆夹杂压电材料电弹耦合场的解析解• 最近, Huang 与 Kuo[8]和 Huang 等人[9]用等效夹杂法研究了电磁弹性介质的椭球夹杂的问题, 其重点是预报压电_压磁复合材料的有效模量•

本文的主要目的是推导含椭圆夹杂电磁弹性介质耦合场的精确解•

1 基 本 方 程

在直角坐标 $x_j(j = 1, 2, 3)$ 下, 线性电磁弹性固体的基本方程为[10]

本构方程

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijks}\varepsilon_{ks} - e_{sij}E_s - h_{sij}H_s, \\ D_i &= e_{iks}\varepsilon_{ks} + \alpha_{is}E_s + \beta_{is}H_s, \\ B_i &= h_{iks}\varepsilon_{ks} + \beta_{is}E_s + \gamma_{is}H_s, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中, 重复下标表示求和; σ_{ij}、ε_{ij}、D_i、E_i、B_i 和 H_i 分别为应力、应变、电位移、电场、磁感强度和

* 收稿日期: 1999_05_26
作者简介: 姜稚清(1947—) , 男, 江办海门人, 院长, 教授, 研究生导师.

磁场; C_{ijks}、α_{is} 和 γ_{is} 分别是弹性、介电和磁通常数; e_{iks}、h_{iks} 和 β_{is} 分别为压电、压磁和电磁耦合常数. 材料常数满足下面的对称性

$$\left.\begin{aligned} &C_{ijks}=C_{jiks}=C_{ijsk}=C_{ksij},\quad e_{sij}=e_{sji},\\ &h_{sij}=h_{sji},\quad \beta_{ij}=\beta_{ji},\quad \alpha_{ij}=\alpha_{ji},\quad \gamma_{ij}=\gamma_{ji}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

和正定性

$$C_{ijks}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ks}>0,\quad \alpha_{is}E_iE_s>0,\quad \gamma_{is}H_iH_s>0.\tag{3}$$

梯度方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad E=-\varphi_{,i},\quad H=-\phi_{,i},\tag{4}$$

式中, 逗号表示对变量的偏导数; u_i、φ 和 ϕ 分别是弹性位移、电位和磁位.

平衡方程

$$\sigma_{ij,i}=0,\quad D_{i,i}=0,\quad B_{i,i}=0,\tag{5}$$

式中忽略了体力、体电荷和体电流.

将(4)代入(1)得到

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ij}=C_{ijks}u_{k,s}+e_{sij}\varphi_{,s}+h_{sij}\phi_{,s},\\ &D_i=e_{iks}u_{k,s}-\alpha_{is}\varphi_{,s}-\beta_{is}\phi_{,s},\\ &B_i=h_{iks}u_{k,s}-\beta_{is}\varphi_{,s}-\gamma_{is}\phi_{,s}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

再将(6)代入(5)可得用弹性位移、电位和磁位表示的偏微分方程组为

$$\left.\begin{aligned} &(C_{ijks}u_k+e_{sij}\varphi+h_{sij}\phi)_{,si}=0,\\ &(e_{iks}u_k-\alpha_{is}\varphi-\beta_{is}\phi)_{,si}=0,\\ &(h_{iks}u_k-\beta_{is}\varphi-\gamma_{is}\phi)_{,si}=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

2 广义 Stroh 方法和一般解

Stroh 方法[11]因具有许多良好的数学特性已成为求解各向异性弹性问题的有力工具(见 Ting 最近的专著[12]). 最近, 人们推广 Stroh 方法求解了压电材料的一些电弹边值问题. 本节我们使用 Stroh 方法推导二维各向异性电磁弹性固体的一般解.

对于弹性位移 u_k、电位 φ 和磁位 ϕ 仅与 x_1 和 x_2 有关的二维耦合问题, 假定方程(7)的一般解为[11, 6, 7]

$$u_k=a_kf(z),\quad \varphi=a_4f(z),\quad \phi=a_5f(z),\qquad z=x_1+px_2,\tag{8}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{u}=\{u_k,\ \varphi,\ \phi\}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{a}f(z),\tag{9}$$

式中, 上标 T 表示矩阵的转置; p 和 $\boldsymbol{a}$ 为待定的常数和常向量; $f(z)$ 是复变量 z 的任意函数. 将(8)或(9)代入(7)得到

$$[\boldsymbol{Q}+p(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})+p^2\boldsymbol{T}]\boldsymbol{a}=0,\tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{1jk1} & \boldsymbol{e}_{1j1} & \boldsymbol{h}_{1j1}\\ \boldsymbol{e}_{1k1}^{\mathrm{T}} & -\alpha_{11} & -\beta_{11}\\ \boldsymbol{h}_{1k1}^{\mathrm{T}} & -\beta_{11} & -\gamma_{11}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{1jk2} & \boldsymbol{e}_{2j1} & \boldsymbol{h}_{2j1}\\ \boldsymbol{e}_{1k2}^{\mathrm{T}} & -\alpha_{12} & -\beta_{12}\\ \boldsymbol{h}_{1k2}^{\mathrm{T}} & -\beta_{12} & -\gamma_{12}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{2jk2} & \boldsymbol{e}_{2j2} & \boldsymbol{h}_{2j2}\\ \boldsymbol{e}_{2k2}^{\mathrm{T}} & -\alpha_{22} & -\beta_{22}\\ \boldsymbol{h}_{2k2}^{\mathrm{T}} & -\beta_{22} & -\gamma_{22}\end{bmatrix}.\tag{11}$$

由(2)易知 5×5 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是对称矩阵，而且根据(3)式和内能的正定性可证 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是满秩矩阵·

将(8)代入(1)，可得用广义应力函数 Φ 表示的应力、电位移和磁感强度为

$$\Sigma_1=\{\sigma_{1j},D_1,H_1\}^{\mathrm{T}}=-\Phi_{,2},\quad \Sigma_2=\{\sigma_{2j},D_2,H_2\}^{\mathrm{T}}=\Phi_{,1},\tag{12}$$

式中

$$\Phi=\boldsymbol{b}f(z),\quad \boldsymbol{b}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+p\boldsymbol{T})\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{Q}+p\boldsymbol{R})\boldsymbol{a}/p\cdot\tag{13}$$

在(10)式中，$\boldsymbol{a}$ 的非零解要求其系数矩阵的行列式满足

$$\det[\boldsymbol{Q}+p(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})+p^2\boldsymbol{T}]=0\cdot\tag{14}$$

上式是非线性特征方程· 类似于压电问题，可化为标准特征值问题，即

$$\boldsymbol{N}\xi=p\xi,\quad \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{N}_3 & \boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad \xi=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix},\tag{15}$$

式中

$$\boldsymbol{N}_1=-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{N}_2=\boldsymbol{T}^{-1},\quad \boldsymbol{N}_3=\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Q}\cdot\tag{16}$$

此式表明 $\boldsymbol{N}_2$ 和 $\boldsymbol{N}_3$ 是对称矩阵· 用 $\mathrm{d}f(z)/\mathrm{d}z$ 乘方程$(15)_1$的两边并利用$(8)_4$、(9)和(13)，得到关于 $\boldsymbol{u}$ 和 Φ 的矩阵微分方程为

$$\boldsymbol{N}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_{,1}\\ \Phi_{,1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_{,2}\\ \Phi_{,2}\end{Bmatrix}\cdot\tag{17}$$

$(15)_1$ 的特征值可由方程

$$\det(\boldsymbol{N}-p\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\tag{18}$$

解出· 式中 $\boldsymbol{I}$ 是 10×10 的单位矩阵·

根据 C_{ijks}、α_{ij} 和 γ_{ij} 的正定特性，(14)或(18)的根不可能是实数，所以可假定为5对互不相等的复根，记为

$$p_{\alpha+5}=\bar{p}_\alpha,\ \mathrm{Im}\{p_\alpha\}>0,\qquad(\alpha=1,2,3,4,5),\tag{19}$$

式中，变量上方的一横表示共轭，Im表示虚部· 相应的特征向量记为

$$\boldsymbol{a}_{\alpha+5}=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,\quad \boldsymbol{b}_{\alpha+5}=\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha\cdot\tag{20}$$

由微分方程理论，一般解 $\boldsymbol{u}$ 和 Φ 为形如(9)和$(13)_1$的10个解的叠加，即

$$\boldsymbol{u}=2\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{5}\boldsymbol{a}_\alpha f_\alpha(z_\alpha)\right\},\quad \Phi=2\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{5}\boldsymbol{b}_\alpha f_\alpha(z_\alpha)\right\},\qquad z_\alpha=x_1+p_\alpha x_2\cdot\tag{21}$$

这里已经使用了 $f_{\alpha+5}=\bar{f}_\alpha\ (\alpha=1,2,3,4,5)$·

在大多数应用中，$f_\alpha\ (\alpha=1,2,3,4,5)$ 有相同的函数形式，故可写成

$$f_\alpha(z_\alpha)=q_\alpha f(z_\alpha)\qquad(\text{不对}\ \alpha\ \text{求和}),\tag{22}$$

式中 q_α 为任意待定的复常数· 定义对角矩阵

$$\langle f(z_\alpha)\rangle=\mathrm{diag}[f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4),f(z_5)]\tag{23}$$

和 5×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5],\quad \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_5],\tag{24}$$

则(21)中的一般解成为

$$\boldsymbol{u}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{A}\langle f(z_\alpha)\rangle\boldsymbol{q}\},\quad \Phi=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}\langle f(z_\alpha)\rangle\boldsymbol{q}\},\tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{q}$ 是元素为 q_α，$(\alpha=1,2,3,4,5)$ 的 5×1 矩阵·

至此，我们已经使用各向异性弹性力学的Stroh方法得到了二维电磁弹性介质的一般解·

对于具体的问题,我们所需要做的工作是根据问题的性质和边界条件确定 $f(z_\alpha)$ 和 $\boldsymbol{q}$•

鉴于电磁弹性介质和压电介质之间有相似的控制方程,则用 Stroh 方法解压电问题时所得到的一些恒等式也适用于本文的问题• 下面仅给出本文用到的几个恒等式[6,7],即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{26}$$

和

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{i}(2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I}),\quad \boldsymbol{H} = 2\mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{L} = -2\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

式中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$• 矩阵 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 是实矩阵, 而且 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 是对称和非奇异矩阵[10],它们满足关系式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{H} \\ -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{H} \\ -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}• \tag{28}$$

3 基体和夹杂内的耦合场

假定一无限大基体中含一椭圆夹杂,基体和夹杂均为各向异性的电磁弹性材料,上标“(M)”和“(I)”分别标注相应于基体和夹杂的材料常数和场变量• 椭圆的边界用参数方程表示为

$$\Gamma:\ x_1 = a\cos\theta,\quad x_2 = b\sin\theta, \tag{29}$$

式中, a 和 b 分别为椭圆的长半轴和短半轴, θ 为实参数• 夹杂沿 x_3 方向为无限大,而且基体和夹杂沿界面 Γ 是理想连接的• 设基体在无穷远作用有满足 $\varepsilon_{33}^{\infty} = E_3^{\infty} = H_3^{\infty} = 0$ 的均匀电磁弹性载荷 σ_{ij}^{∞}、D_i^{∞} 和 B_i^{∞} 或 $\varepsilon_{ij}^{\infty}$、$E_i^{\infty}$ 和 H_i^{∞}, 两种载荷之间满足

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\infty} &= C_{ijks}^{(\mathrm{M})}\varepsilon_{ks}^{\infty} - e_{sij}^{(\mathrm{M})}E_s^{\infty} - h_{sij}^{(\mathrm{M})}H_s^{\infty}, \\ D_i^{\infty} &= e_{iks}^{(\mathrm{M})}\varepsilon_{ks}^{\infty} + \alpha_{is}^{(\mathrm{M})}E_s^{\infty} + \beta_{is}^{(\mathrm{M})}H_s^{\infty}, \\ B_i^{\infty} &= h_{iks}^{(\mathrm{M})}\varepsilon_{ks}^{\infty} + \beta_{is}^{(\mathrm{M})}E_s^{\infty} + \gamma_{is}^{(\mathrm{M})}H_s^{\infty}• \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

综上所述,问题的边界条件为

$$\left\{\sigma_{ij}^{(\mathrm{M})}, D_i^{(\mathrm{M})}, H_i^{(\mathrm{M})}\right\} \to \left\{\sigma_{ij}^{\infty}, D_i^{\infty}, H_i^{\infty}\right\},\qquad \text{在无穷远}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{M})} = \boldsymbol{u}^{(\mathrm{I})},\quad \Phi^{(\mathrm{M})} = \Phi^{(\mathrm{I})},\qquad \text{沿界面 }\Gamma• \tag{32}$$

根据扰动概念[13],设基体的解为

$$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{M})} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})},\quad \Phi^{(\mathrm{M})} = \Phi_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})} + \Phi_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})}, \tag{33}$$

式中, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})}(\Phi_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})})$ 表示无夹杂时基体在电磁弹性载荷 σ_{ij}^{∞}、D_i^{∞} 和 B_i^{∞} 作用下的均匀场, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})}(\Phi_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})})$ 表示夹杂引起的扰动场• 基于文献[6,7]求解压电夹杂问题时的想法,均匀场 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})}(\Phi_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})})$ 和扰动场 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})}(\Phi_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})})$ 为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})} = x_1\boldsymbol{Z}_1^{\infty} + x_2\boldsymbol{Z}_2^{\infty},\quad \Phi_{\mathrm{h}}^{(\mathrm{M})} = x_1\Sigma_2^{\infty} - x_2\Sigma_1^{\infty}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})} = 2\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})}\langle f(z_\alpha^{(\mathrm{M})})\rangle\boldsymbol{q}\right\},\quad \Phi_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{M})} = 2\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})}\langle f(z_\alpha^{(\mathrm{M})})\rangle\boldsymbol{q}\right\}, \tag{35}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}_1^{\infty} = \left\{\varepsilon_{11}^{\infty}, 0, 2\varepsilon_{13}^{\infty}, -E_1^{\infty}, -H_1^{\infty}\right\}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Z}_2^{\infty} = \left\{2\varepsilon_{21}^{\infty}, \varepsilon_{22}^{\infty}, 2\varepsilon_{23}^{\infty}, -E_2^{\infty}, -H_2^{\infty}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{36}$$

$$\Sigma_1^{\infty} = \left\{\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{13}^{\infty}, D_1^{\infty}, B_1^{\infty}\right\}^{\mathrm{T}},\ \Sigma_2^{\infty} = \left\{\sigma_{21}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{23}^{\infty}, D_2^{\infty}, B_2^{\infty}\right\}^{\mathrm{T}}• \tag{37}$$

由于映射函数

$$\zeta_\alpha = \frac{z_\alpha + \sqrt{z_\alpha^2 - a^2 - p_\alpha^2 b^2}}{z_\alpha - \mathrm{i}p_\alpha b} \tag{38}$$

将 z_α 平面的 5 个椭圆的外域保角映射为 ζ_α 平面的单位圆的外域, 而且当 $|z_\alpha| \to 0$ 时, $\zeta_\alpha^{-1} \to 0$• 因此, 任意函数 $f(z_\alpha)$ 可取为

$$f(z_\alpha) = \zeta_\alpha^{-1}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)• \tag{39}$$

将(39)代入(35), 利用(33)~(35)得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{(\mathrm{M})} &= x_1 \boldsymbol{Z}_1^\infty + x_2 \boldsymbol{Z}_2^\infty + 2\mathrm{Re}\left\{ \boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})} \langle \zeta_\alpha^{-1} \rangle \boldsymbol{q} \right\}, \\ \Phi^{(\mathrm{M})} &= x_1 \Sigma_2^\infty - x_2 \Sigma_1^\infty + 2\mathrm{Re}\left\{ \boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})} \langle \zeta_\alpha^{-1} \rangle \boldsymbol{q} \right\}• \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

设待定的复向量 $\boldsymbol{q}$ 为未知实向量 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的线性组合, 即

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} + [\boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}, \tag{41}$$

则(40)成为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{(\mathrm{M})} &= x_1 \boldsymbol{Z}_1^\infty + x_2 \boldsymbol{Z}_2^\infty + 2\mathrm{Re}\Big\{ \boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})} \langle \zeta_\alpha^{-1} \rangle [\boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} + \\ &\qquad \boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})} \langle \zeta_\alpha^{-1} \rangle [\boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} \Big\}, \\ \Phi^{(\mathrm{M})} &= x_1 \Sigma_2^\infty - x_2 \Sigma_1^\infty + 2\mathrm{Re}\Big\{ \boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})} \langle \zeta_\alpha^{-1} \rangle [\boldsymbol{A}^{(\mathrm{M})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} + \\ &\qquad \boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})} \langle \zeta_\alpha^{-1} \rangle [\boldsymbol{B}^{(\mathrm{M})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} \Big\}• \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

现在, 我们分析夹杂内的耦合场• 根据 Huang 和 Kuo[8] 研究椭球夹杂时得到的结论: 均匀电磁弹性载荷作用下夹杂内的耦合场是均匀的, 即, $(\sigma_{ij}^{(\mathrm{I})}, D_i^{(\mathrm{I})}, B_i^{(\mathrm{I})})$ 和 $(\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{I})}, E_i^{(\mathrm{I})}, H_i^{(\mathrm{I})})$ 是常数• 这样, 我们有

$$\boldsymbol{u}^{(\mathrm{I})} = x_1 \boldsymbol{Z}_1^{(\mathrm{I})} + x_2 \boldsymbol{Z}_2^{(\mathrm{I})}, \quad \Phi^{(\mathrm{I})} = x_1 \Sigma_2^{(\mathrm{I})} - x_2 \Sigma_1^{(\mathrm{I})}, \tag{43}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_1^{(\mathrm{I})} &= \left\{ \varepsilon_{11}^{(\mathrm{I})}, \ \omega, 2\varepsilon_{13}^{(\mathrm{I})}, -E_1^{(\mathrm{I})}, -H_1^{(\mathrm{I})} \right\}^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{Z}_2^{(\mathrm{I})} &= \left\{ 2\varepsilon_{21}^{(\mathrm{I})} - \omega, \ \varepsilon_{22}^{(\mathrm{I})}, 2\varepsilon_{23}^{(\mathrm{I})}, -E_2^{(\mathrm{I})}, -H_2^{(\mathrm{I})} \right\}^{\mathrm{T}}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1^{(\mathrm{I})} &= \left\{ \sigma_{11}^{(\mathrm{I})}, \ \sigma_{12}^{(\mathrm{I})}, \ \sigma_{13}^{(\mathrm{I})}, D_1^{(\mathrm{I})}, B_1^{(\mathrm{I})} \right\}^{\mathrm{T}}, \\ \Sigma_2^{(\mathrm{I})} &= \left\{ \sigma_{21}^{(\mathrm{I})}, \ \sigma_{22}^{(\mathrm{I})}, \ \sigma_{23}^{(\mathrm{I})}, D_2^{(\mathrm{I})}, B_2^{(\mathrm{I})} \right\}^{\mathrm{T}}, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

式中, ω 是夹杂的反时针转动, 而且 $(\sigma_{ij}^{(\mathrm{I})}, D_i^{(\mathrm{I})}, B_i^{(\mathrm{I})})$ 和 $(\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{I})}, E_i^{(\mathrm{I})}, H_i^{(\mathrm{I})})$ 满足方程(1)•

由于(42)已满足无穷远条件(31), 所以问题归结为由界面连续条件(32)确定未知向量 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\Sigma_1^{(\mathrm{I})}$、$\Sigma_2^{(\mathrm{I})}$、$\boldsymbol{Z}_1^{(\mathrm{I})}$ 和 $\boldsymbol{Z}_2^{(\mathrm{I})}$•

注意到沿界面有

$$\zeta_\alpha = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \quad \langle \zeta_\alpha^{-} \rangle = (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)\boldsymbol{I}, \tag{46}$$

并利用(29)和(27), (42)和(43)成为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{(\mathrm{M})} &= (\boldsymbol{d} + a\boldsymbol{Z}_1^\infty)\cos\theta + (b\boldsymbol{Z}_2^\infty - \boldsymbol{S}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{c})\sin\theta, \\ \Phi^{(\mathrm{M})} &= (\boldsymbol{c} + a\Sigma_2^\infty)\cos\theta - (b\Sigma_1^\infty - \boldsymbol{L}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})\sin\theta; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{(\mathrm{I})} &= a\boldsymbol{Z}_1^{(\mathrm{I})}\cos\theta + b\boldsymbol{Z}_2^\infty • \sin\theta, \\ \Phi^{(\mathrm{I})} &= a\Sigma_2^\infty \cos\theta - b\Sigma_1^\infty • \sin\theta• \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

把(47)和(48)代入(32)后, 并比较方程两边 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的系数矩阵得到

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^{(\mathrm{I})} \\ \Sigma_2^{(\mathrm{I})} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^\infty \\ \Sigma_2^\infty \end{Bmatrix} + \frac{1}{a} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{c} \end{Bmatrix} \tag{49}$$

和

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_2^{(\mathrm{I})} \\ -\Sigma_1^{(\mathrm{I})} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_2^{\infty} \\ -\Sigma_1^{\infty} \end{Bmatrix} - \frac{1}{b}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{H} \\ -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{c} \end{Bmatrix}. \tag{50}$$

由于在(49)和(50)中方程数少于未知数,故需要寻求新的补充方程• 借助于(17),我们有

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_2^{\infty} \\ -\Sigma_1^{\infty} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}^{(\mathrm{M})}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^{\infty} \\ \Sigma_2^{\infty} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_2^{(\mathrm{I})} \\ -\Sigma_1^{(\mathrm{I})} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}^{(\mathrm{I})}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^{(\mathrm{I})} \\ \Sigma_2^{(\mathrm{I})} \end{Bmatrix}, \tag{51}$$

利用(49)和(51),(50)可表示成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}+\eta\boldsymbol{N}_1^{(\mathrm{I})} & \boldsymbol{H}+\eta\boldsymbol{N}_2^{(\mathrm{I})} \\ -\boldsymbol{L}+\eta\boldsymbol{N}_3^{(\mathrm{I})} & (\boldsymbol{S}+\eta\boldsymbol{N}_1^{(\mathrm{I})})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{c} \end{Bmatrix} = b(\boldsymbol{N}^{(\mathrm{M})}-\boldsymbol{N}^{(\mathrm{I})})\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z}_1^{\infty} \\ \Sigma_2^{\infty} \end{Bmatrix}, \tag{52}$$

式中 $\eta = b/a$•

解矩阵方程(52)并利用(49)和(50),便得到了所有未知向量的显示解,即得到了基体和夹杂内耦合场的解析解•

4 结 束 语

用广义Stroh方法并结合保角变换和扰动的概念,给出了含夹杂各向异性电磁弹性材料二维问题的封闭解,为解析地研究电磁弹性复合材料的有效性能提供了基础• 压电、压磁和电磁介质的夹杂问题均可视为本文的特例•

[参 考 文 献]

[1] Benveniste Y. The determination of the elastic and electric fields in a piezoelectric inhomogenity[J]. J Appl Phys, 1992, **72**(3): 1086—1095.

[2] Wang B. Three dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material[J]. Internat J Solids and Structures, 1992, **29**(3): 293—308.

[3] Chen T. The rotated rigid ellipsoidal inclusion embedded in an anisotropic piezoelectric medium[J]. Internat J Solids and Structures, 1993, **30**(15): 1983—1995.

[4] Dunn M L, Taya M. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1993, **443**: 265—287.

[5] Pak Y E. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity[J]. Internat J Solids and Structures, 1992, **29**(19): 2403—2419.

[6] Liang J, Han J C, Du S Y, et al. The electroelastic modeling of anisotropic piezoelectric materials with an elliptical inclusion[J]. Internat J Solids and Structures, 1995, **32**(20): 2989—3000.

[7] Chung M Y, Ting T C T. Piezoelectric solids with an elliptical inclusion or hole[J]. Internat J Solids and Structures, 1996, **33**(23): 3343—3361.

[8] Huang J H, Kuo W S. The analysis of piezoelectric/ piezomagnetic composite materials containing an ellipsoidal inclusion[J]. J Appl Phys, 1997, **81**(3): 1378—1386.

[9] Huang J H, Chiu Y H, Liu H K. Magneto_electro_elastic Eshelby tensors for a piezoelectric_piezomagnetic composite reinforced by ellipsoidal inclusions[J]. J Appl Phys, 1998, **83**(10): 5364—5370.

[10] Alshits V I, Darinskii A N, Lothe J. On the existence of surface waves in half_anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties[J]. Wave Motion, 1992, **16**: 265—283.

[11] Stroh A N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity[J]. Philosophical Magazine, 1958, **7**: 625—646.

[12] Ting T C T. Anisotropic Elasticity Theory and Application[M]. New York: Oxford Science Publi-

cations, 1996.

[13] Stagni L. On the elastic field perturbation by inhomogeneities in plane elasticity[J]. Z Angew Math Phys, 1982, **33**: 315—325.

Coupled Fields of Two_Dimensional Anisotropic Magneto_Electro_Elastic Solids With an Elliptical Inclusion

JIANG Zhi_qing, LIU Jin_xi

(Department of Mechanics and Engineering Science, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, P R China)

Abstract: The two_dimensional elliptical inclusion problems in infinite anisotropic magneto_electro-elastic solids are considered. Based on the extended Stroh formalism, the technique of conformal mapping and the concept of perturbation, the magneto_electro_elastic fields in both the matrix and the inclusion are obtained explicitly. The results are of very importance for studying the effective properties of piezoelectric_piezomagnetic composite materials.

Key words: magneto_electro_elastic solid, Stroh formalism; coupled field; inclusion