

文章编号: 1000-0887(2000) 09-0897-06

# 非线性粘弹性梁的动力学行为<sup>\*</sup>

陈立群<sup>1,2</sup>, 程昌钧<sup>1,2</sup>

(1 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2 上海大学 力学系, 上海 201800)

(本刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 建立了描述受周期荷载作用的均匀粘弹性梁动力学行为的非线性偏微分-积分方程, 梁的材料满足 Leaderman 非线性本构关系, 对于两端简支的情形用 Galerkin 方法进行了 2 阶截断后, 简化为常微分-积分方程, 进一步简化为便于进行数值实验的常微分方程, 最后用数值方法比较了 1 阶和 2 阶截断系统的动力学行为。

**关键词:** 粘弹性梁; 运动微分方程; Leaderman 关系; Galerkin 方法

**中图分类号:** O175.29      **文献标识码:** A

## 引 言

研究结构的动力学行为, 特别是非线性动力学行为, 往往采用 Galerkin 截断<sup>[1]</sup>。然而迄今为止, 尚无直接的根据, 证明低阶 Galerkin 截断的合理性, 尽管有若干间接的依据可以推断其合理性。Wojciech 等人的数值工作表明, 对于两端简支粘弹性梁, Galerkin 方法得到的结果与有限元法和刚性有限元法的结果一致<sup>[2]</sup>。Moon 等的实验工作表明, 对于一端固接弹性梁, 采用 Galerkin 截断得到的自由端位移的混沌运动与实验结果定性一致<sup>[3]</sup>。Abhyankar 等的数值工作表明, 由 Galerkin 方法得到非线性简支梁的动力学性态, 与直接求解非线性偏微分方程得到的结果定性一致<sup>[4]</sup>。为说明 Galerkin 截断方法对于研究粘弹性结构动力学行为的适用性, 除直接与数值和实验结果进行比较外, 还可对同一数学模型截取不同的项数而得到不同简化模型定性比较动力学行为的差异。

在对于粘弹性梁动力学行为的研究中常常采用 Galerkin 方法, 但仅限于 1 阶截断。1995 年 Suire 和 Cederbaum 研究了大变形线性粘弹性梁的周期和混沌动力学行为<sup>[5]</sup>, 其粘弹性本构关系为 Boltzmann 叠加原理。1996 年 Argyris 采用微分型本构关系研究了粘弹性梁的混沌运动<sup>[6]</sup>。

本文研究非线性粘弹性梁的动力学行为, 并采用 Leaderman 的非线性本构关系<sup>[7]</sup>描述梁的材料性质, 实验研究表明该本构关系可以适用于一类广泛的非线性粘弹性材料<sup>[8]</sup>。建立了基

\* 收稿日期: 1999\_07\_09; 修订日期: 2000\_05\_10

基金项目: 国家自然科学基金项目(19727027); 中国博士后科学基金项目(98JC14032), 上海市科技发展基金项目(98SHB1417, 98JC14032)资助项目

作者简介: 陈立群(1963—), 上海市人, 博士, 教授。

程昌钧(1937—), 女, 重庆市人, 教授, 博导, 研究方向: 非线性固体力学, 已发表论文 100 余篇; 多次获得省部级以上各种奖励, 1998 年获教育部科技进步(甲类)一等奖。

于 2 阶 Galerkin 截断的简化数学模型, 用数值方法比较 1 阶截断和 2 阶截断系统的动力学行为, 发现两者定性相同。

## 1 非线性粘弹性梁的数学模型

研究一类均匀梁在横向荷载作用下的运动。设梁的横向位移为  $y(x, t)$ , 单位长度质量为  $\rho$ , 横向分布荷载为  $F(x, t)$ 、截面弯矩为  $M(x, t)$ , 则梁的动力学方程为

$$\rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t). \quad (1)$$

其中  $M(x, t) = - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma(x, z, t) dz$ . (2)

且  $\sigma(x, z, t)$  为截面正应力,  $h$  为梁的高度。

对于非线性粘弹性材料, 其应力-应变关系由 Leaderman 关系<sup>[7]</sup>给出

$$\sigma(x, z, t) = E_0 g(\varepsilon(x, z, t)) + \int_0^t E(t - \tau) g(\varepsilon(x, z, t)) d\tau, \quad (3)$$

其中  $E(t)$  为拉伸松弛函数,  $E_0 = E(0)$  为材料初始弹性模量,  $\varepsilon(x, z, t)$  为轴向应变, 非线性函数  $g(\varepsilon)$  定义为

$$g(\varepsilon(x, z, t)) = \varepsilon(x, z, t) + \beta \varepsilon^2(x, z, t) + \gamma \varepsilon^3(x, z, t). \quad (4)$$

其中, 常数  $\beta$  和  $\gamma$  使得小应变时满足  $g(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$ 。

对于小变形, 应力-位移的几何关系为

$$\varepsilon(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

将式(4)和(5)代入式(3)得到

$$\begin{aligned} \sigma(x, z, t) = & E_0 \left[ -z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \beta z^2 \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 - \gamma z^3 \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \\ & \int_0^t E(t - \tau) \left[ -z \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} + \beta z^2 \left( \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^2 - \gamma z^3 \left( \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^3 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

将(6)代入式(2), 并计算相应积分得到弯矩的表达式

$$\begin{aligned} M(x, t) = & E_0 \left[ \frac{h^3 \partial^2 y(x, t)}{12 \partial x^2} + \gamma \frac{h^5}{80} \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \\ & \int_0^t E(t - \tau) \left[ \frac{h^3 \partial^2 y(x, \tau)}{12 \partial x^2} + \gamma \frac{h^5}{80} \left( \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^3 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

利用式(7), 可将式(1)写作

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + E_0 \left[ \frac{h^3 \partial^4 y(x, t)}{12 \partial x^4} + \gamma \frac{h^5}{80} \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \\ \int_0^t E(t - \tau) \left[ \frac{h^3 \partial^4 y(x, \tau)}{12 \partial x^4} + \gamma \frac{h^5}{80} \left( \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^3 \right] d\tau = F(x, t). \end{aligned} \quad (8)$$

非线性偏微分-积分方程(8)为描述非线性粘弹性梁运动的数学模型。

## 2 基于 2 阶 Galerkin 截断的简化数学模型

设梁的两端是简支的, 则有此时的边界条件

$$y(0, t) = 0, M(0, t) = 0; y(l, t) = 0, M(l, t) = 0, \quad (9)$$

其中,  $l$  为梁的长度。

由于非线性偏微分\_积分方程(8)难以求解,现采用 Galerkin 方法<sup>[9]</sup>进行截断简化,在边界条件(9)下,方程(8)的解可展开为 Fourier 正弦级数

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (10)$$

若只考虑式(10)中的2阶项,则将式(10)代入式(8),得到

$$\rho \left\{ \ddot{q}_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + \ddot{q}_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \right\} + E_0 G(x, t) + \int_0^t E(t-\tau) G(x, \tau) d\tau = F(x, t), \quad (11)$$

其中

$$G(x, t) = \frac{h^3}{12} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^4 \left\{ q_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + 16q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \right\} - \gamma \frac{h^5}{80} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ q_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + 4q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \right\}^3. \quad (12)$$

经过积分运算可以得到

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l G(x, t) \sin \frac{\pi x}{l} dx &= \frac{h^3}{12} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^4 q_1(t) + \gamma \frac{3\pi h^5}{640} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^7 q_1(t) (q_1^2(t) + 32q_2^2(t)), \\ \int_0^l G(x, t) \sin \frac{2\pi x}{l} dx &= \frac{3h^3}{4} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^4 q_2(t) + \gamma \frac{3\pi h^5}{20} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^7 q_2(t) (q_1^2(t) + 8q_2^2(t)). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

故由式(11),可以得到2阶截断后的系统

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1(t) + g_1(t) &= - \int_0^t D(t-\tau) g_1(\tau) d\tau + f_1(t), \\ \ddot{q}_2(t) + g_2(t) &= - \int_0^t D(t-\tau) g_2(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g_1(t) &= \omega^2 q_1(t) + kq_1(t) (q_1^2(t) + 32q_2^2(t)), \\ g_2(t) &= 16\omega^2 q_1(t) + 32kq_2(t) (q_1^2(t) + 8q_2^2(t)), \\ D(t) &= \frac{E(t)}{E_0}, \quad \omega^2 = \frac{E_0 h^3}{12\rho} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^4, \quad k = \frac{3\gamma E_0 h^5}{320} \left[ \frac{\pi}{l} \right]^8, \\ f_i(t) &= \frac{1}{\rho} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

非线性微分\_积分方程(14)为两端简支的非线性粘弹性梁的2阶 Galerkin 截断后得到的简化数学模型. 令  $q_1(t) = q(t)$  和  $q_2(t) = 0$ , 则得到基于1阶 Galerkin 截断后得到的简化数学模型

$$\ddot{q} + \omega^2 q + kq^3 + \omega^2 \int_0^t D(t-\tau) q(\tau) d\tau + k \int_0^t D(t-\tau) q^3(\tau) d\tau = f_1(t). \quad (17)$$

### 3 计算模型及其数值结果

取本构方程(3)中的  $E(t)$  为标准线性固体材料的松弛函数, 则式(16)中的函数  $D(t)$  为

$$D(t) = 1 - b + be^{-\alpha t}. \quad (18)$$

相应地, 式(14)为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1(t) + g_1(t) &= - \alpha be^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha\tau} g_1(\tau) d\tau + f_1(t), \\ \ddot{q}_2(t) + g_2(t) &= - \alpha be^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha\tau} g_2(\tau) d\tau + f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中  $g_i(t)$  和  $f_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) 仍由式(15)和(16)给定。

为得到便于数值计算的形式,通常将式(18)两边微分并应用 Leibnitz 求导法则化为 3 阶常微分方程组<sup>[5]</sup>,这种方法运算比较繁复。这里采用引入辅助变量的方法<sup>[10]</sup>。令

$$x_i(t) = -ab e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} g_i(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

将式(20)代入式(19),并将式(15)代入所得结果整理后可得到便于数值计算的数学模型为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \dot{x}_1 + \alpha(1+b)x_1 &= f_1(t), \\ \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \omega^2 q_1 + kq_1(q_1^2 + 32q_2^2), \\ \ddot{q}_2 + \dot{x}_2 + \alpha(1+b)x_2 &= f_2(t), \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 + 16\omega^2 q_1 + 32kq_2(q_1^2 + 8q_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

对应于 1 阶 Galerkin 截断的计算模型为

$$\ddot{q} + \dot{x} + \alpha(1+b)x = f_1(t), \quad \dot{x} = -\alpha x + \omega^2 q + kq^3. \quad (22)$$

$$\text{其中 } x(t) = -ab e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} [\omega^2 q(\tau) + kq^3(\tau)] d\tau. \quad (23)$$

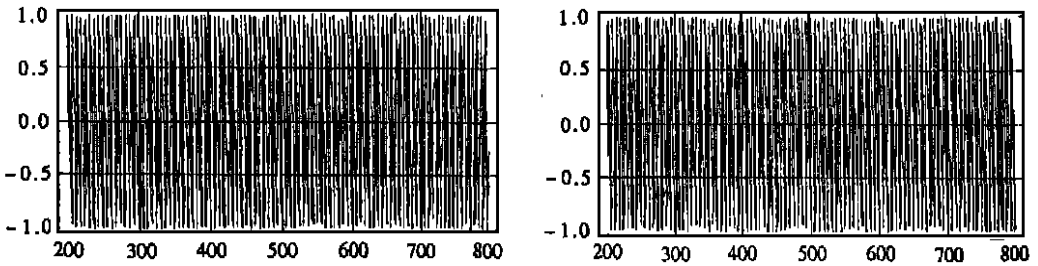


图 1 梁的近似等幅值有界运动

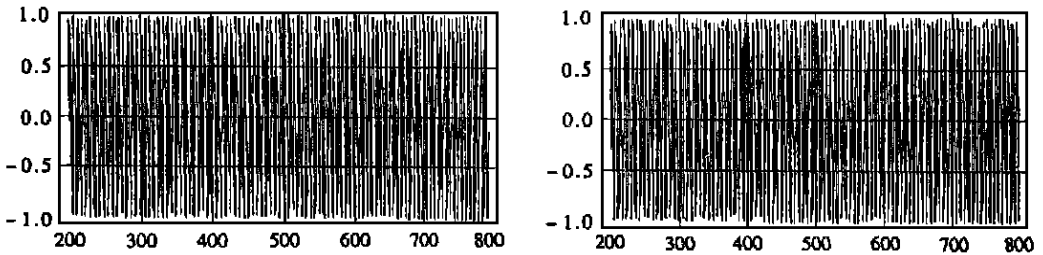


图 2 梁的变幅值有界运动

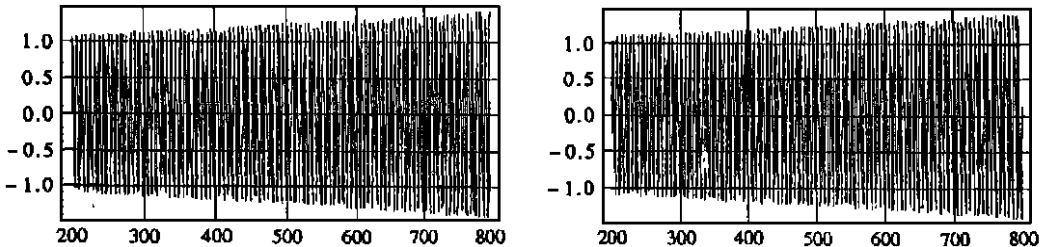


图 3 梁的运动开始发散

在以下计算中,取周期荷载沿梁均匀分布,从而有  $f_1(t) = f_0 \cos \Omega t$  和  $f_2(t) = 0$ ,且类似于 [5] 取  $\Omega = 2\omega$  固定  $f_0 = 0.01$ 、 $\omega = 1$ 、 $k = 0.01$  和  $b = 0.9$ 。随着  $\alpha$  值的逐渐增大,运动的

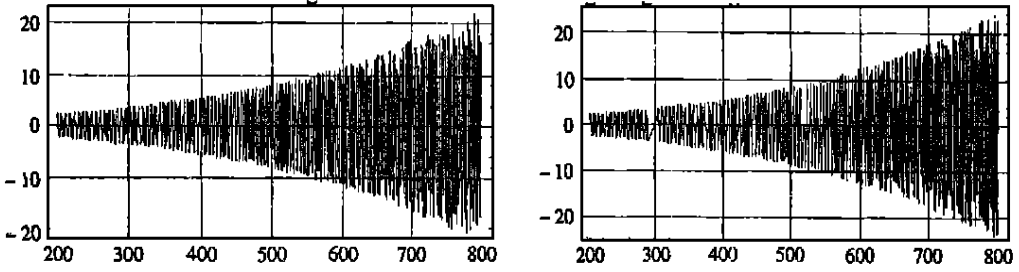


图4 梁的无界运动

类型大致可以分为4类。一种是有界运动而且幅值基本不变,如图1所示,其中 $\alpha = 0.00001$ 。另一类是有界运动但幅值略有变化,如图2所示,其中 $\alpha = 0.0001$ 。第三类是运动开始发散,如图3所示,其中 $\alpha = 0.001$ 。最后一类是无界运动,如图4所示,其中 $\alpha = 0.01$ 。在图1至图4中,左边的图是基于2阶 Galerkin 截断后的数学模型(21)计算得到的 $q_1(t)$ ,而右边的图是基于1阶 Galerkin 截断的数学模型(22)计算得到的 $q(t)$ 。并且相应的初值条件为 $q_1(0) = 0, \dot{q}_1(0) = 1.0, q_2(0) = 0, \dot{q}_2(0) = 0.5$ ,以及 $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 1.0$ ,根据式(19)和(23),有 $x_i(0) = 0 (i = 1, 2)$ 和 $x(0) = 0$ 。在计算中前200个时间单位用于耗散初值的影响。在图1~图4中,1阶和2阶 Galerkin 截断得到的简化模型的动力学行为定性相同。

现对于有界运动定量比较1阶和2阶 Galerkin 截断的结果

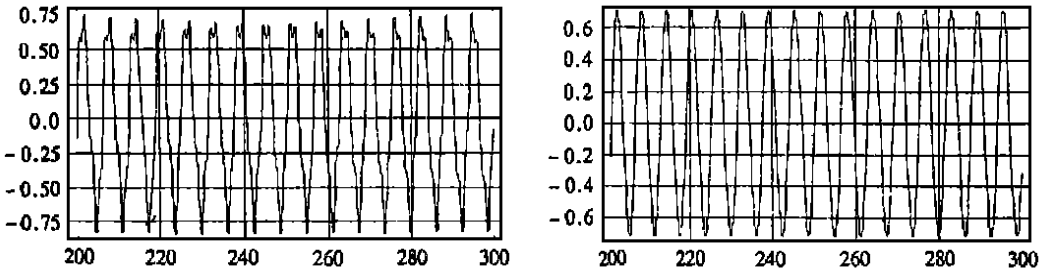


图5 梁上给定 $x_0 = l/4$ 处的位移响应

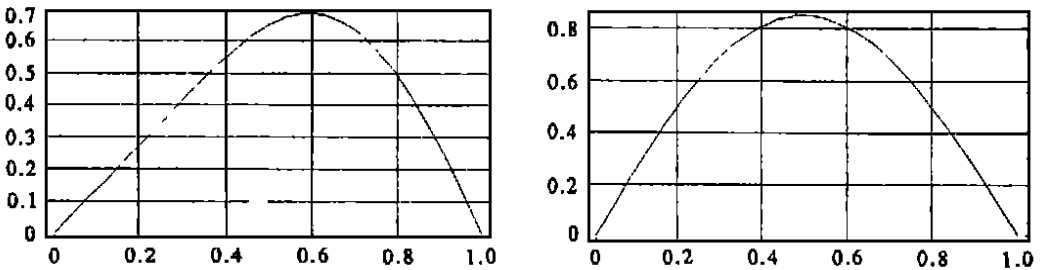


图6 梁在给定时刻 $t_1 = 240$ 位形

$$y_2(x, t) = q_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + q_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \tag{24}$$

$$y_1(x, t) = q(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{25}$$

其中 $q_i(t) (i = 1, 2)$ 和 $q(t)$ 分别由方程(21)和(22)确定。根据式(24),梁上受2阶模态影响最大的点为 $x_0 = l/4$ ,在该点位移响应 $y_2(x_0, t)$ 和 $y_1(x_0, t)$ 分别如图5中的左图和右图所

示,其中参数和初值同图2.在同样参数和初值下,对于给定时刻  $t_1 = 240$ ,梁的位形  $y_2(x, t_1)$  和  $y_2(x, t_1)$  分别如图6中的左图和右图所示.算例表明存在一定误差.

## 4 结 论

本文建立了描述非线性粘弹性梁动力学行为的非线性偏微分积分方程(8),对于两端简支的情形利用 Galerkin 方法简化为非线性微分积分方程(14)和(17),当材料松弛特性用式(18)描述时,式(14)和(17)分别进一步简化为计算模型(21)和(22).数值结果表明1阶和2阶 Galerkin 截断得到的简化模型的动力学行为定性相同,但定量比较存在一定误差.

### [参 考 文 献]

- [1] 陈立群,程昌钧.基于 Galerkin 截断的粘弹性结构动力学行为研究综述[J].自然杂志,1999,21(1):1—4.
- [2] Wojciech S, Klosowicz M, Nadolski W. Nonlinear vibrations of a simply supported viscoelastic inextensible beam and comparison of four methods[J]. Acta Mech, 1990, 85(1): 43—54.
- [3] Moon F C, Holmes P J. A magnetoelastic strange attractor[J]. J Sound Vib, 1979, 65(2): 285—296.
- [4] Abhyankar N S, Hall E K, Hanagud S V. Chaotic vibrations of beams: numerical solution of partial differential equation[J]. J Appl Mech, 1993, 60(1): 167—174.
- [5] Suire, G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear( elastica) bars under harmonic excitations[J]. Int J Mech Sci, 1995, 37(5): 753—772.
- [6] Argyris J. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. Chaos Solitons Fractals, 1996, 7(1): 151—163.
- [7] Leaderman H. Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike network polymers[J]. Polymer Trans Soc Rheol, 1962, 6(4): 361—382.
- [8] Smart J, Williams J G. A comparison of single integral nonlinear viscoelasticity theories[J]. J Mech Phys Solids, 1972, 20(2): 313—324.
- [9] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley 1979.
- [10] Potapov V D, Marasanov A Y. The investigation of the stability of elastic and viscoelastic rods under a stochastic excitation[J]. Int J Solids Struct, 1997, 34(9): 1367—1377.

## Dynamical Behavior of Nonlinear Viscoelastic Beams

CHEN Li\_qun<sup>1,2</sup>, CHENG Chang\_jun<sup>1,2</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China;

2 Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China)

**Abstract:** The integro-partial differential equation that governs the dynamical behavior of homogeneous viscoelastic beams was established. The material of the beams obeys the Leaderman nonlinear constitutive relation. In the case of two simply supported ends, the mathematical model was simplified into an integro-differential equation after a 2\_order truncation by the Galerkin method. Then the equation is further reduced to an ordinary differential equation which is convenient to carry out numerical experiments. Finally, the dynamical behavior of 1\_order and 2\_order truncation are numerically compared.

**Key words:** viscoelastic beam; differential equation of motion; Leaderman relation; Galerkin method