

文章编号: 1000-0887(2000) 09_0909_07

非线性弹性杆的异常动态响应

张年梅¹, 韩强², 杨桂通², 徐秉业¹

(1 清华大学 工程力学系, 北京 100084; 2 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(本刊编委杨桂通来稿)

摘要: 讨论了拉伸速度呈周期变化的受拉非线性弹性直杆的动力行为。采用 Melnikov 方法研究时发现, 材料的非线性使得动力响应发生异常, 对确定的直杆而言, 当拉伸速度超过某个临界值时, 动力系统将出现次谐分岔和混沌。

关键词: 次谐分岔; 异宿轨道; 混沌; Melnikov 函数

中图分类号: O34 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 越来越多的人对梁在周期载荷作用下的混沌行为产生了浓厚的兴趣。1983 年, F C Moon 等人^[1]主要研究了非线性边界下受周期作用的梁的混沌运动; 1994 年, S. Anantha Ramu 和 T S Sankar 等^[2]以预屈曲梁为模型讨论了它的分岔、突变等现象。因混沌动力学目前尚处于发展阶段, 人们尚未注意到由于材料非线性引起的异常动态响应问题, 因此这一方面的研究很少见到报道, 太原工业大学蔡中民教授曾在这一方面做了许多相应的研究工作^{[3], [4]}。本文讨论本构关系可表达为三次函数的非线性弹性杆受拉后的动力行为, 应用 Galerkin 方法得到参数激励与强迫激励共同作用的微分动力系统, 采用 Melnikov 函数法, 确定了动力系统产生混沌行为的临界条件。

1 基本关系

所讨论直杆的本构关系为:

$$= E_1 + E_2 u^2 + E_3 u^3 \quad (1)$$

直杆一端固支, 一端自由, 在自由端受拉。假设非线性弹性杆的变形未引起颈缩, 系统的控制方程为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{l} \left[E_1 + 2E_2 \frac{u}{x} + 3E_3 \left(\frac{u}{x} \right)^2 \right] \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{u}{t} \quad (2)$$

其边界条件为:

$$u(0, t) = 0, \quad u_t(l, t) = V_0 \sin t, \quad (3)$$

系统的初始条件为:

收稿日期: 1999_09_03; 修订日期: 2000_06_08

基金项目: 国家自然科学基金和山西省自然科学基金资助项目

作者简介: 张年梅(1965), 女, 江西上饶人, 副教授, 博士。

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (4)$$

其中: u 是轴向位移, E_1, E_2, E_3 是弹性模量, γ 是阻尼系数, ϵ 是小量

首先对 u 进行以下变量代换:

$$w(x, t) = u(x, t) - \frac{V_0 x}{l}(1 - \cos t), \quad (5)$$

以 w 表示的控制方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & -\frac{V_0}{l}x \cos t + E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E_2 \left[\frac{w}{x} + \frac{V_0}{l}(1 - \cos t) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & 3E_3 \left[\frac{w}{x} + \frac{V_0}{l}(1 - \cos t) \right]^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{t} - \frac{V_0}{l}x \sin t, \end{aligned} \quad (6)$$

略去含 ϵ^2 的高阶小量后,得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & -\frac{V_0}{l}x \cos t + E_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E_2 \left[\frac{w}{x} + \frac{V_0}{l}(1 - \cos t) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & 3E_3 \left[\left(\frac{w}{x} \right)^2 + \frac{2}{l} \frac{V_0}{x} w(1 - \cos t) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{t} \end{aligned} \quad (7)$$

那么边界条件(3)和初始条件(4)可表达为:

$$w(0, t) = 0, \quad w_t(l, t) = 0, \quad (8)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad (9)$$

利用量纲一 $w = \frac{w}{l}, x = \frac{x}{l}, \tau = \frac{t}{0}$ 及 $\epsilon = \sqrt{\frac{l^2}{E_1}}$, 对(7)式进行量纲一化后,得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = & -A_1 x \cos \tau + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{w}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_3 (1 - \cos \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_4 \frac{w}{x} + \\ & A_5 \left(\frac{w}{x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_6 (1 - \cos \tau) \frac{w}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$A_1 = \frac{V_0 l}{E_1}, \quad A_2 = \frac{2E_2}{E_1}, \quad A_3 = \frac{2E_2 V_0}{E_1 l},$$

$$A_4 = \sqrt{\frac{l^2}{E_1}}, \quad A_5 = \frac{3E_3}{E_1}, \quad A_6 = \frac{6E_3 V_0}{E_1 l}$$

根据边界条件设位移模态为:

$$W = (x) (1 - \cos 2x), \quad (11)$$

将位移模态代入(9)式,并应用 Galerkin 法,得到常微分方程表示的动力系统:

$$\ddot{w} + \frac{4}{3} w + \epsilon^3 = - \left[\frac{1}{3} V_0 \cos \tau + \epsilon \frac{V_0}{l} (1 - \cos \tau) + \right], \quad (12)$$

其中:

$$\epsilon = \frac{4E_3}{E_1}, \quad \epsilon^3 = \frac{8E_2}{3E_1} \epsilon^2, \quad \epsilon = \sqrt{\frac{l^2}{E_1}},$$

$$V_0 = V_0 \sqrt{\frac{l^2}{E_1}}, \quad \epsilon = \sqrt{\frac{l^2}{E_1}}$$

2 动力分析

由(12)式可见,针对不同的 E_3 , 微分动力系统将有着完全不同的特性,而 E_2 的影响只出

现在作为小量的项中 以下对两种材料进行分析

1) $E_3 < 0$ 的材料

当 $\epsilon = 0$ 时, (11) 的无扰系统有三个不动点, $(0, 0)$ 是中心, $\left(\frac{2}{\sqrt{-3}}, 0 \right)$ 是两双曲鞍点

包围着中心的是一簇周期轨道:

$$\left. \begin{aligned} k(\theta) &= \sqrt{\frac{8}{3} \frac{k^2}{1+k^2}} \operatorname{sn} \left(\frac{2}{\sqrt{2(1+k^2)}}, k \right), \\ k(\theta) &= \frac{4}{3} \frac{k^2}{1+k^2} \sqrt{\frac{2}{-}} \operatorname{cn} \left(\frac{2}{\sqrt{3(1+k^2)}}, k \right) \operatorname{dn} \left(\frac{2}{\sqrt{3(1+k^2)}}, k \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其周期为:

$$T(k) = \frac{2}{\sqrt{-}} \sqrt{3(1+k^2)} K(k) \quad (14)$$

超次谐轨道的 Melnikov 函数为:

$$M_n^m(\theta_0) = \int_0^{n\theta_0} \left[\frac{1}{3} V_0 \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{4} V_0 (1 - \cos(\theta + \theta_0))^{k+1} \right] d\theta \quad (15)$$

经过复杂的积分后, 得:

$$M_n^m(\theta_0) = V_0 \left[\frac{1}{3} \cos \theta_0 + \frac{1}{4} V_0 \frac{2(m, n)}{3} + \frac{1}{4} V_0 \frac{3(m, n)}{3} \sin \theta_0 + \frac{1}{4} V_0 \frac{4(m, n)}{3} \right] \quad (16)$$

其中:

$$1(m, n) = \begin{cases} 0 & (n-1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}), \\ \frac{2}{6K} \sqrt{\frac{2}{-}} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{mK}{2K}} & (n=1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}), \end{cases} \quad (17)$$

$$2(m, n) = 0, \quad (18)$$

$$3(m, n) = \begin{cases} 0 & (n-1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}), \\ -\frac{1}{2K} \operatorname{csch} \frac{mK}{2K} & (n=1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}), \end{cases} \quad (19)$$

$$4(m, n) = -\frac{64n^3}{9} [(k^2-1)K + (k^2+1)E], \quad (20)$$

从上式可知, 只有次谐轨道存在 当次谐轨道的 Melnikov 函数 $M_n^m(\theta_0)$ 存在简单零点时, 系统将发生次谐分叉, 此时要求:

$$\frac{V_0}{\sqrt{[1(m, n)]^2 + [3(m, n)]^2}} \frac{4(m, n)}{3} = 0 \quad (21)$$

通过鞍点的异宿轨道是:

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{-}} \operatorname{th} \left[2 \sqrt{\frac{2}{3}} \right], \\ &= \sqrt{\frac{2}{-}} \frac{4}{3} \operatorname{sech}^2 \left[2 \sqrt{\frac{2}{3}} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

扰动系统的 Melnikov 函数为:

$$M(\theta_0) = \int_0^{n\theta_0} \left[\frac{1}{3} V_0 \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{4} V_0 (1 - \cos(\theta + \theta_0))^{k+1} \right] d\theta = \frac{1}{3} V_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{4} V_0 \frac{2(m, n)}{3} + \frac{1}{4} V_0 \frac{3(m, n)}{3} \sin \theta_0 + \frac{1}{4} V_0 \frac{4(m, n)}{3} \quad (23)$$

其中:
$$1 = \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) d = \frac{2}{12} \sqrt{\frac{2}{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{4} \right)}}, \quad (24)$$

$$2 = \frac{1}{3} d = 0, \quad (25)$$

$$3 = \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) d = - \frac{1}{2 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{4} \right)} \sin \theta, \quad (26)$$

$$4 = \frac{2}{3} d S = - \frac{16 P^3}{9 A} \sqrt{\frac{2}{3}} \# \quad (27)$$

若 V_0/L 满足下述条件, 导宿轨道破裂, 系统进入 Smale 马蹄变换意义下的混沌状态:

$$\frac{V_0}{L} \setminus \frac{K_4}{\sqrt{(K_1)^2 + (K_3)^2}} \# \quad (28)$$

由(28)式可得 $V_0/L \sim X$ 的关系示意曲线, 如图 1 所示# 可见随 X 的变化, 系统进入混沌态有一个最小的门槛值, 此时 X 满足:

$$\operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{X_0}{4} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{X_0}{8} \frac{18 P^2 A_1^2 - A X_0^2}{9 P^2 A_1^2 - A X_0^2}$$

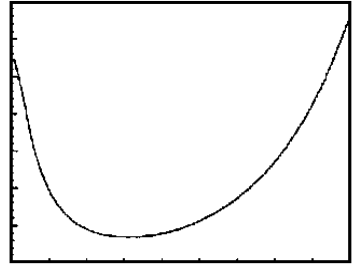


图 1

2) $E_3 > 0$ 的材料,

系统不受扰动时, 围绕中心(0, 0)有一簇周期轨道:

$$\begin{cases} U^k(S) = ? \sqrt{\frac{8 P^2 k^2}{3 A (1 - 2 k^2)}} \operatorname{cn} \left[\sqrt{\frac{4 P^2}{3 (1 - 2 k^2)}} S, k \right] \\ \dot{W}^k(S) = ? \frac{4 k P^2}{3 (1 - 2 k^2)} \sqrt{\frac{2}{A}} \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{4 P^2}{3 (1 - 2 k^2)}} S, k \right] \operatorname{dn} \left[\sqrt{\frac{4 P^2}{3 (1 - 2 k^2)}} S, k \right] \end{cases}, \quad (29)$$

其周期为:

$$T(k) = 2 \sqrt{\frac{3(1 - 2 k^2)}{P^2}} K(k) = \frac{2 P m \#}{n X} \quad (30)$$

超次谐轨道的 Melnikov 函数可由(15)式计算, 但 U^k, \dot{W}^k 应以(29)式代入, 得到的系数如下:

$$K_1(m, n) = \begin{cases} 0 & (n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}), \\ - \frac{P X^2}{6 K} \sqrt{\frac{2}{A}} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{P m K c}{2 K}} & (n = 1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}); \end{cases} \quad (31)$$

$$K_2(m, n) = 0 \quad (32)$$

$$K_3(m, n) = \begin{cases} 0 & (n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}), \\ - \frac{P A_1 X}{A} \operatorname{csch} \frac{P m K c}{2 K} & (n = 1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}); \end{cases} \quad (33)$$

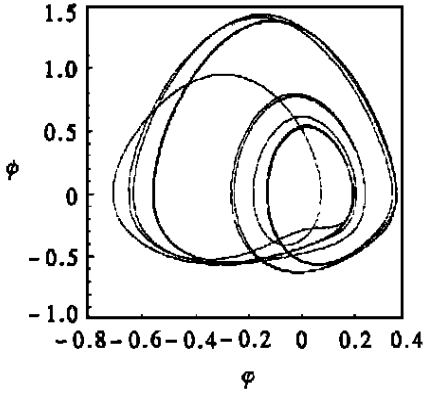
$$K_4(m, n) = - \frac{64 n P^3}{9 A \sqrt{3(1 - 2 k^2)}} \left[\frac{(1 - k^2)}{(1 - 2 k^2)} K - E \right] \# \quad (34)$$

若 $M_n^m(S_0)$ 有简单零点, 则无扰系统原有的周期轨道将分叉出次谐轨道, 此时 V_0/L 应满足下式:

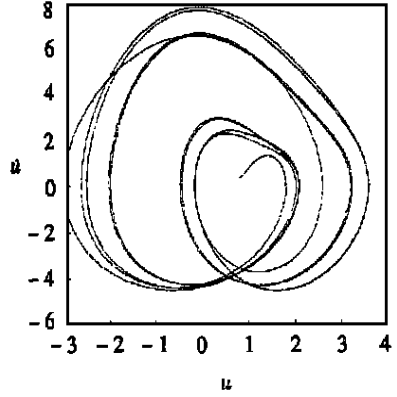
$$\frac{V_0}{L} \sqrt{\frac{\kappa_4(m, n)}{\sqrt{[\kappa_1(m, n)]^2 + [\kappa_3(m, n)]^2}}} \quad (35)$$

其中 $\kappa_1(m, n), \kappa_2(m, n), \kappa_3(m, n), \kappa_4(m, n)$ 如(31) ~ (34) 式所示#

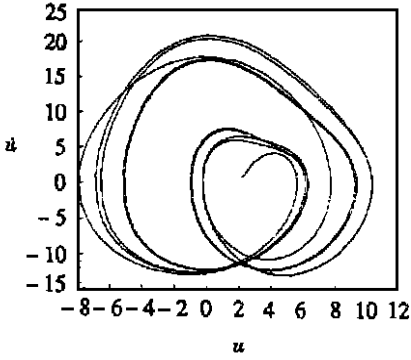
图2, 图3, 图4是以 $E_1 = 213 @ 10^5, E_2 = 513 @ 10^4, E_3 = -116 @ 10^4, Q = 2600, X = 3114$ 做出的相图, Poincare 映射图和时程图#



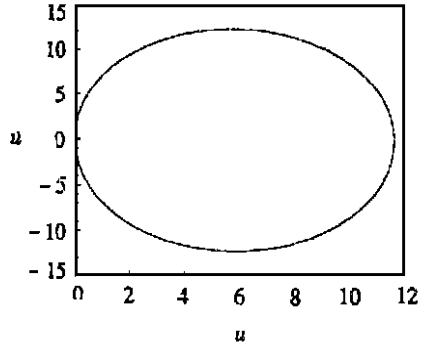
(a)



(b) $x = 012l$

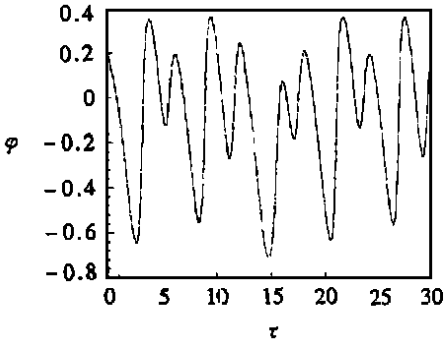


(c) $x = 016l$

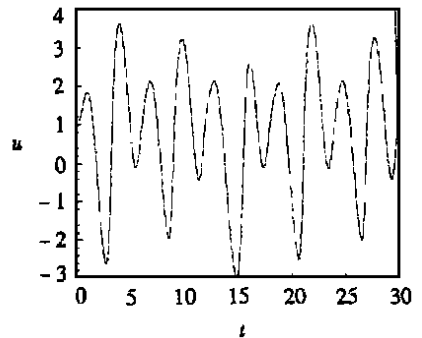


(d) $x = l$

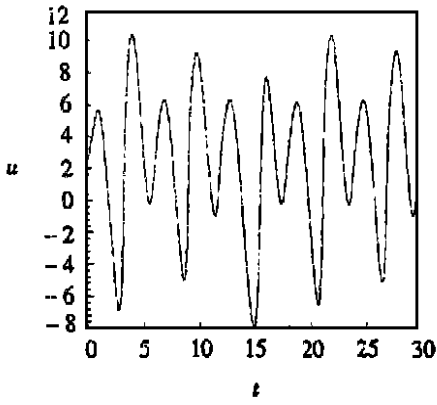
图2 相轨迹图



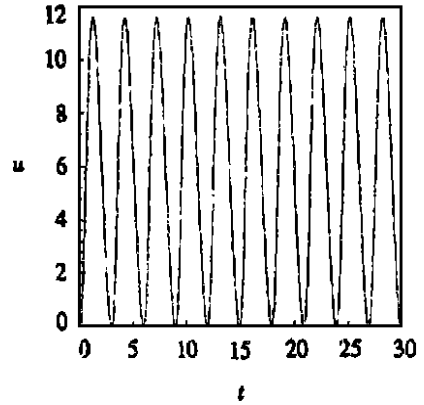
(a)



(b) $x = 012l$

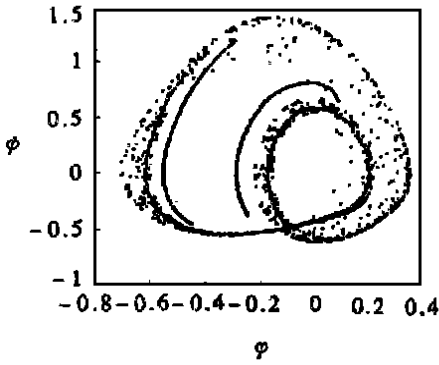


(c) $x = 0.16l$

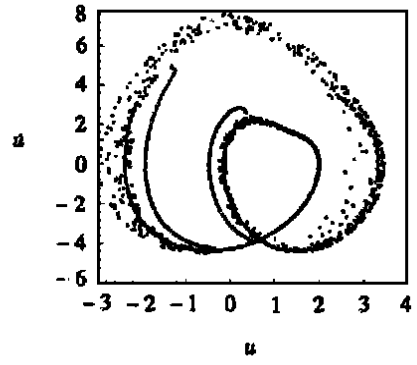


(d) $x = l$

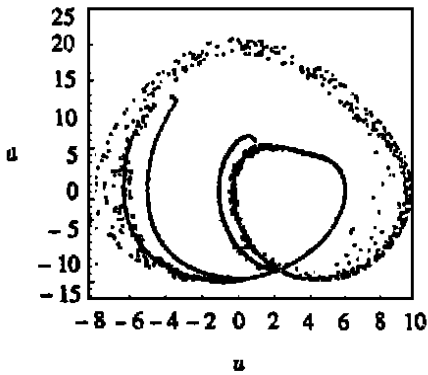
图3 时程图



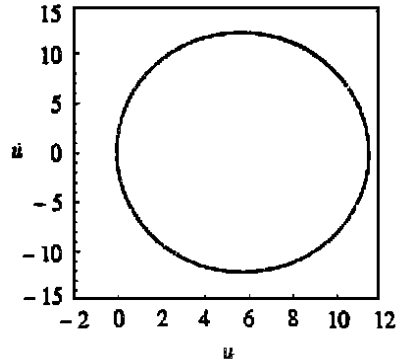
(a)



(b) $x = 0.12l$



(c) $x = 0.16l$



(d) $x = l$

图4 Poincare 映射图

3 结 论

1) 材料的非线性是系统非线性的决定因素, 它引起动力系统的异常响应# 线弹性杆的动态响应将是确定性的#

2) 从(12)式可知, 本构关系中二次非线性项的作用只以小量的形式存在, 对系统动态行

为的影响很小# 系统动力响应的性质主要取决于材料的三次非线性项#

3) 对 $E_3 < 0$ 的非线性弹性杆, 当系统无扰动($D=0$) 时, 围绕中心有一簇周期轨道, 包围周期轨道的是异宿轨道; 系统受扰后, 产生次谐分叉# 对 $E_3 > 0$ 的非线性弹性杆, 无扰系统仅有唯一的中心, 中心附近只有一簇周期轨道, 系统受扰后, 可能会分叉出次谐轨道#

4) 图 1 中的曲线说明, 当 $X < X_0$ 时, 进入混沌区域的临界值随着频率的增大而减小; 当 $X > X_0$ 时, 进入混沌区域的临界值随着频率的增大而增大#

5) 由图 2, 图 3 和图 4 所示的杆中不同位置的相轨迹图# 时程图和 Poincare 映射图可见, 在远离处 $= l$, 各点的实际运动轨迹与 U , U 很相似# 尽管本文主要是以 w 为变量进行分析的, 但是它可以描述杆中某些点的运动特性, 因此本文的分析方法是可行的#

[参 考 文 献]

- [1] Moon F C, Shaw S W. Chaotic vibration of a beam with nonlinear boundary conditions[J]. Non Linear Mech, 1983, 18(6).
- [2] Ramu Anantha S, Sankar T S, Ganesan R. Bifurcations, catastrophes and chaos in a pre_buckled beam[J]. Int J Nonlinear Mechanics, 1994, 29(3).
- [3] 赵建宏, 蔡中民. 非线性粘弹性圆柱杆在阶跃载荷速度下的迭代解[A]. 力学与工程应用[M]. 太原:山西高教联合出版社, 1994.
- [4] 蔡中民. 零级次弹性圆柱杆在阶跃速度拉伸时的惯性效应[J]. 工程力学, 1993(增刊).
- [5] Lenci S, Menditto G, Tarantino A M. The chaotic resonance[J]. Eur J Mech A/Solid, 1994, 13(6).
- [6] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields[M]. Springer-Verlag, 1983.

A n o m a l o u s D y n a m i c s R e s p o n s e o f N o n l i n e a r E l a s t i c B a r

ZHANG Nian_mei¹, HAN Qiang², YANG Gui_tong², XU Bing_ye¹

(1) Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China;
 2) Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P R China)

Abstract: The dynamics behavior of tension bar with periodic tension velocity was presented. Melnikov method was used to study the dynamic system. The results show that material nonlinear may result in anomalous dynamics response. The subharmonic bifurcation and chaos may occur in the determined system when the tension velocity exceeds the critical value.

Key words: subharmonic bifurcation; heterodinic orbit; chaos; Melnikov function