

文章编号: 1000-0887(2000) 09-0949-05

# 变时滞关联大系统的镇定控制<sup>\*</sup>

余昭旭, 孙继涛

(上海铁道大学 应用数学研究所, 上海 200331)

(戴世强推荐)

**摘要:** 基于 Liapunov 理论, 针对关联矩阵的不同分解, 建立了变时滞线性关联大系统分散镇定的充分条件. 同时, 还给出了一种局部无记忆状态反馈控制律的设计方法, 所考虑的时滞皆为变时滞.

**关键词:** 大系统; 线性关联系统; 变时滞; 分散镇定

**中图分类号:** TP271      **文献标识码:** A

## 引 言

近年来, 关联大系统的分散镇定问题引起了人们的广泛关注. Lee 和 Radovic 在文[1~2]中, 就是考虑通过对关联矩阵的不同分解, 而得到由  $N$  个相互关联的子系统及  $N \times N$  时滞组成的线性连续和离散大系统进行研究. 得到了一些分散镇定控制条件. 后来 Hu, Trinh 和 Aldeen 在文[3~4]中对  $N$  时滞的线性连续大系统考虑了同样的问题, 然而, 在实际控制工程中, 我们经常遇见时变时滞系统, 因此, 对时变时滞关联大系统的分散镇定更具理论意义和实际意义.

在本文中, 基于 Liapunov 理论我们进一步利用关联矩阵的不同分解, 导出了变时滞线性关联大系统分散镇定的充分条件, 并依据所得的结果, 我们给出了局部无记忆状态反馈分散镇定控制律的设计.

## 1 系统描述及引理

考虑线性连续变时滞大系统, 它又如下  $N$  个相互关联的子系统  $S_i$  组成

$$S_i \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau_j(t)), \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t). \end{cases} \quad (1)$$

其局部无记忆反馈镇定控制律为  $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{k}_i \mathbf{x}_i(t)$ ,

$\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$ ,  $\mathbf{y}_i \in \mathbf{R}^{r_i}$  分别为子系统  $S_i$  的状态, 输入和输出向量, 且  $\sum_{i=1}^N n_i = n$ ,  $\sum_{i=1}^N m_i$

\* 收稿日期: 1999\_06\_23; 修订日期: 2000\_05\_20

基金项目: 高等学校骨干教师资助计划资助

作者简介: 余昭旭(1978—), 江西人, 研究生.

$= m$  和  $\sum_{i=1}^N r_i = r \cdot A_i, B_i, C_i$  和  $A_{ij}$  都是常数矩阵,  $A_{ij}$  为关联矩阵, 时滞  $\tau_{ij}(t)$  为连续函数且满足  $\tau_{ij}(t) > 0$ ,

$\tau_{ij}(t) \leq h < 1 \cdot k_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$  为控制增益常阵。

在本文中, 我们考虑  $A_{ij}$  的下面分解:

$$A_{ij} = B_i + H_{ij}D_{ij} \text{ 和 } A_{ij} = B_iL_{ij}C_j + E_{ij}C_j$$

在给出主要结论之前, 我们首先定义两个下标集合和引入对大系统(1)的下列假设:

$$J_i = \left\{ j \mid A_{ij} \neq \mathbf{0}, j = 1, 2, \dots, N \right\},$$

$$J'_i = \left\{ j \mid A_{ji} \neq \mathbf{0}, j = 1, 2, \dots, N \right\},$$

$N_i$  和  $N'_i$  分别为集合  $J_i$  和  $J'_i$  的基数

$$N_i = K(J_i), \quad N'_i = K(J'_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

则在控制律  $u_i(t) = k_i x_i(t)$  的作用下对应于系统  $S$  的闭环系统  $S$  由如下子系统组成

$$S_i: \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j \in J_i} A_{ij} x_j(t - \tau_{ij}(t)), \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \cdot \quad (2)$$

假设 1 对名义子系统  $\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), y_i(t) = C_i x_i(t)$  我们假定  $(A_i, B_i)$  完全可控, 而且  $(A_i, C_i)$  完全可观

假设 2 考虑  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  和  $C = \text{block\_diag}(C_1, C_2, \dots, C_N)$ , 有  $x^T(t) C^T C x(t) \geq 0 (t \geq 0)$ , 或更保守的假定  $C^T C > \mathbf{0}$ 。

最后我们给出本文所需的引理:

引理 1 设  $u \in \mathbf{R}^n, v \in \mathbf{R}^m$ , 对任意常阵  $M \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , 有:

$$2u^T M v \leq \varepsilon u^T M G^{-1} M^T v + \frac{1}{\varepsilon} v^T G v, \quad (3)$$

其中  $\varepsilon > 0, G$  为任意具适当维数的对称正定阵

$$G = G^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}^{m \times m}.$$

证明 由:  $2x^T y \leq \alpha x^T x + \frac{1}{\alpha} y^T y, \alpha > 0$  且  $G$  为对称正定阵。

$$\text{则 } \forall \varepsilon > 0, \quad 2u^T M v = 2u^T M G^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} v \leq \varepsilon u^T M G^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} M^T u + \frac{1}{\varepsilon} v^T G^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} v =$$

$$\varepsilon u^T M G^{-1} M^T u + \frac{1}{\varepsilon} v^T G v.$$

从而, 得证。

## 2 分散镇定反馈控制器的设计

定理 1 假定系统(1)中  $A_{ij} = B_i + H_{ij}D_{ij}$ , 如果

$$\sigma \left[ \frac{1}{1-h} W_i^{-1/2} [D_{i1}^T G_1^{1/2} \dots D_{iN_i}^T G_{N_i}^{1/2}] \right] < 1 \cdot \quad (4)$$

其中  $\sigma(\cdot)$  为最大奇异值

$$W_i = \varepsilon Q_i - \varepsilon_i^2 N_i P_i G_i^{-1} P_i > \mathbf{0}, \quad (5)$$

在此常数  $\varepsilon > 0, n_i \times n_i$  矩阵  $P_i$  为 Riccati 方程的对称正定解

$$P_i A_i + A_i^T P_i - N_i P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + \frac{1}{1-h} N_i T_i + Q_i = \mathbf{0} \quad (6)$$

$G_i = G_i^{1/2} G_i^{1/2}$ ,  $Q_i$ ,  $R_i$  和  $T_i$  为具合适维数的对称正定矩阵

则系统(1)在局部无记忆控制律  $u_i(t) = k_i x_i(t)$ , 作用下分散镇定.

$$\text{其中} \quad K_i = -\frac{1}{2} N_i \left( R_i^{-1} + \varepsilon_i \sum_{j \in J_i} H_{ij} \xi_j T_j H_{ij}^T \right) B_i^T P_i. \quad (7)$$

证明 取 Liapunov 函数为  $V(x_t) = \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i x_i^T(t) P_i x_i(t) + V_i(x_t)]$ ,

$$\text{其中} \quad V_i(x_t) = \sum_{j \in J_i} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t x_j^T(s) \frac{1}{1-h} (\xi_j T_j + D_{ij}^T G_i D_{ij}) x_j(s) ds,$$

$P_i$  为(6)的解,  $T_j > 0$  和  $G_i > 0$ .

考虑到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_t) = & \sum_{j \in J_i} \left[ x_j^T(t) \frac{1}{1-h} \xi_j T_j x_j(t) - \frac{(1-\tau_{ij}(t))}{1-h} x_j^T(t-\tau_{ij}(t)) \xi_j T_j x_j(t-\tau_{ij}(t)) \right] + \\ & \sum_{j \in J_i} \left[ x_j^T(t) \frac{1}{1-h} D_{ij}^T G_i D_{ij} x_j(t) - x_j^T(t-\tau_{ij}(t)) D_{ij}^T G_i D_{ij} x_j(t-\tau_{ij}(t)) \frac{(1-\tau_{ij}(t))}{1-h} \right] \leq \\ & \sum_{j \in J_i} \left[ \frac{1}{1-h} x_j^T(t) \xi_j T_j x_j(t) - x_j^T(t-\tau_{ij}(t)) \xi_j T_j x_j(t-\tau_{ij}(t)) \right] + \\ & \sum_{j \in J_i} \left[ \frac{1}{1-h} x_j^T(t) D_{ij}^T G_i D_{ij} x_j(t) - x_j^T(t-\tau_{ij}(t)) D_{ij}^T G_i D_{ij} x_j(t-\tau_{ij}(t)) \right], \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & \sum_{i=1}^N \left\{ 2 \varepsilon_i x_i^T(t) P_i \left[ A_i - \frac{1}{2} N_i B_i \left( R_i^{-1} + \varepsilon_i \sum_{j \in J_i} H_{ij} \xi_j^{-1} T_j^{-1} H_{ij}^T \right) B_i^T P_i \right] x_i(t) + \right. \\ & \left. 2 \varepsilon_i x_i^T(t) P_i \sum_{j \in J_i} B H_{ij} x_j(t-\tau_{ij}(t)) + 2 \varepsilon_i x_i^T(t) P_i \sum_{j \in J_i} D_{ij} x_j(t-\tau_{ij}(t)) + \dot{V}_i(x_t) \right\} \leq \\ & \sum_{i=1}^N \left\{ 2 \varepsilon_i x_i^T P_i \left[ A_i - \frac{1}{2} N_i B_i \left( R_i^{-1} + \varepsilon_i \sum_{j \in J_i} H_{ij} \xi_j^{-1} T_j^{-1} H_{ij}^T \right) B_i^T P_i \right] x_i(t) + \right. \\ & \left. \varepsilon_i^2 N_i x_i^T(t) \sum_{j \in J_i} P_i B H_{ij} \xi_j^{-1} T_j^{-1} H_{ij}^T B_i^T P_i x_i(t) + \sum_{j \in J_i} x_j^T(t-\tau_{ij}(t)) \xi_j T_j x_j(t-\tau_{ij}(t)) + \right. \\ & \left. \varepsilon_i^2 N_i x_i^T(t) P_i G_i^{-1} P_i x_i(t) + \sum_{j \in J_i} x_j^T(t-\tau_{ij}(t)) D_{ij}^T G_i D_{ij} x_j(t-\tau_{ij}(t)) + \dot{V}_i(x_t) \right\} = \\ & \sum_{i=1}^N \left\{ x_i^T(t) \varepsilon_i \left[ P_i A_i + A_i^T P_i - N_i P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + \frac{1}{1-h} N_i T_i \right] x_i(t) + \right. \\ & \left. \varepsilon_i^2 N_i x_i^T(t) P_i G_i^{-1} P_i x_i(t) + \frac{1}{1-h} x_i^T(t) \sum_{j \in J_i} D_{ij}^T G_i D_{ij} x_i(t) \right\} + \\ & - \sum_{i=1}^N \left[ x_i^T(t) (\varepsilon_i Q_i - \varepsilon_i^2 N_i P_i G_i^{-1} P_i) x_i(t) + \frac{1}{1-h} x_i^T(t) \sum_{j \in J_i} D_{ij}^T G_i D_{ij} x_j(t) \right] = \\ & - \sum_{i=1}^N x_i^T(t) \left[ W_i - \frac{1}{1-h} \sum_{j \in J_i} D_{ij}^T G_i D_{ij} \right] x_i(t) \leq \mu \|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

在此  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mu = \min_{i=1,2,\dots,N} \left\{ \lambda_m(W_i) \left[ 1 - \sigma_M^2 \left( \frac{1}{1-h} W_i^{-\frac{1}{2}} [D_{1i}^T G_i^{\frac{1}{2}} \dots D_{Ni}^T G_i^{\frac{1}{2}}] \right) \right] \right\} > 0$   
 $\lambda_m(\cdot)$  在后文同样表示为最小特征值, 定理得证

注意: 考虑到(6)是标准的 Riccati 方程, 假定 1 保证了(6)对于  $Q_i > 0$  和  $T_i > 0$  有唯一解  $P_i > 0$

定理 2 假定系统(1) 中  $A_j = B_i L_{ij} C_j + E_j C_j$ , 如果有

$$\sigma_M \left[ \frac{1}{1-h} Z_i^{-1/2} [E_{1i}^T G_i^{1/2} \dots E_{Ni}^T G_N^{1/2}] \right] < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (8)$$

其中  $G_i = G_i^{1/2} G_i^{1/2}$  和  $Z_i$  为合适维数的对称正定矩阵, 则系统(1) 在局部控制律

$$u_i(t) = K_i x_i(t), \quad K_i = -\frac{1}{2} N_i \left( R_i^{-1} + \sum_{j \in J_i} L_{ij} C_j T_j^{-1} C_j^T L_{ij}^T \right) B_i^T P_i, \quad (9)$$

在此  $R_i \in \mathbf{R}^{m_i \times m_i}$  和  $T_j \in \mathbf{R}^{n_j \times n_j}$  对称正定矩阵, 矩阵  $P_i$  为下列广义 Riccati 典型方程的对称正定解

$$P_i A_i + A_i^T P_i - N_i P_i (B_i R_i^{-1} B_i^T - G_i^{-1}) P_i + \frac{1}{1-h} N_i T_i + C_i^T Z_i C_i = \mathbf{0} \quad (10)$$

证明 同定理 1 相似的证明

取 Liapunov 函数为:  $V(x_t) = \sum_{i=1}^N [x_i^T(t) P_i x_i(t) + V_i(x_t)]$ ;

其中  $V_i(x_t) = \sum_{j \in J_i} \int_{\tau_j(t)}^t x_j^T(s) \frac{1}{1-h} (T_j + C_j^T L_{ij}^T G_i L_{ij} C_j) x_j(s) \cdot$

我们可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq \sum_{i=1}^N x_i^T(t) C_i^T \left[ Z_i - \frac{1}{1-h} \sum_{j \in J_i} E_{ji}^T G_j E_{ji} \right] C_i x_i(t) \leq \\ &- \min_{i=1,2,\dots,N} \left\{ \lambda_n(Z_i) \left[ 1 - \sigma_M^2 \left[ \frac{1}{1-h} Z_i^{-1/2} [E_{1i}^T G_i^{1/2} \dots E_{Ni}^T G_N^{1/2}] \right] \right] \right\} \times \\ &\sum_{i=1}^N \| C_i x_i(t) \|^2 \leq \rho x^T(t) C^T C x(t) \end{aligned}$$

在此  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\rho = \min_{i=1,2,\dots,N} \left\{ \lambda_n(Z_i) \left[ 1 - \sigma_M^2 \left[ \frac{1}{1-h} Z_i^{-1/2} [E_{1i}^T G_i^{1/2} \dots E_{Ni}^T G_N^{1/2}] \right] \right] \right\} > 0$

和  $C = \text{block-diag}(C_1, C_2, \dots, C_N)$ .

由于假设 2 和  $\dot{V}(x_t) \leq \rho x^T(t) C^T C x(t)$ ,

故对  $t \geq 0$  有  $\dot{V}(x_t) < 0$ , 证毕.

### 3 结 论

本文通过对关联矩阵的不同分解, 导出了变时滞线性连续关联大系统分散镇定的充分条件, 并且在此基础上给出了分散镇定反馈控制器的设计方法, 其存在性依赖于相应的 riccati 方程的对称正定解, 对于 Riccati 方程中对称正定阵  $T_i$ ,  $G_i$ ,  $R_i$ ,  $Q_i$  和  $Z_i$  均由设计者选定.

#### [参 考 文 献]

- [1] Lee T N, Radovic U L. General decentralized stabilization of large\_scale linear continuous and discrete time\_delay systems[J]. Int J Control, 1987, 46(6): 2127—2140.
- [2] Lee T N, Radovic U L. Decentralized stabilization of linear continuous a discrete\_time system with delays in interconnections[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1988, 33(8): 757—761.
- [3] Hu Z. Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1994, 39(1): 180—182.
- [4] Trinh H, Aldeen M A. Comment on "decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays" [J]. IEEE Trans Contr, 1995, 40(5): 914—916.

# Decentralized Stabilization of Large\_Scale Linear Interconnected Systems with Time\_Varying Delays

YU Zhao\_xu, SUN Ji\_tao

(Institute of Applied Mathematics, Shanghai Tiedao University, Shanghai 200331, P R China)

**Abstract:** The decentralized stabilization conditions for large\_scale linear interconnection systems with time\_varying delays were established by using some different decomposition cases of interconnection matrices, and a method for designing the decentralized local memoryless state feedback controllers was proposed. All of the considered delays are continous function, and satisfy some conditions.

**Key words:** large\_scale systems; linear interconnection systems; time\_varying delay; decentralized stabilization