应用数学和力学, 第 21 卷 第 9 期(2000 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 09_0973_11

关于带跳的反射扩散过程的随机最优控制问题

丁 灯[1,2]

(1 中山大学 数学系, 广州 510725; 2 澳门大学 科技学院, 澳门 3001)

(薛大为推荐)

摘要: 研究一类半空间上带泊松跳的反射扩散过程的随机最优控制问题 得到关于这一控制问题的非线性 Nisio 半群, 和联系这一半群的带 Neumann 边界条件的哈密顿 雅可比 贝尔曼方程 讨论这一类方程的粘性解的存在唯一性等问题 证明该控制问题中的价值函数是这一方程的一个粘性解

关 键 词: 随机最优控制; 带跳反射扩散; 哈密顿 雅可比 贝尔曼方程; 粘性解

中图分类号: O211 63; O232 文献标识码: A

引 言

关于反射扩散过程的随机最优控制问题已被不少的数学家所考虑 例如, P. L. Lions 在文[1], 和 J. L. Menaldi 及 M. Robin 在文[2]中都研究过此问题 在本文我们将考虑一个关于半空间上带泊松跳的反射扩散过程的随机最优控制问题

设 d 2, $D = \{x = (x^1, x^2, \quad, x^d) \quad \mathbf{R}^d, x^d > 0\}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的半空间, 其边界为 $D = \{x \quad \mathbf{R}^d; x^d = 0\}$ 记 $Z = \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, 设 (dz) 是可测空间$(Z, \mathscr{B}(Z))$上的一个 _有限测度并满足: 对任一集合 $A \quad \mathscr{B}(Z)$, 如果 $A \quad \{0\} = \quad$, 则 $(A) <$ 设 $m \quad 1$, 记 是 R^m 上的一个紧凸集

假设 $b(u, x) = (b_i(u, x))_{i=1}^d$, $(u, x) = (\ _{ij}(u, x))_{ij=1}^d$, $c(u, x, z) = (c_i(u, x, z))_{i=1}^d$ 和 $(x) = (\ _i(x))_{i=1}^d$ 是分别定义在 $\mathbf{R}^d$, $\mathbf{R}^d \quad Z$ 和 $\mathbf{R}^d$ 上的向量值和矩阵值的 Borel 可测函数 我们还总假设 $_i(x) \quad 0, i = 1, 2, \quad, d - 1$, 和 $_d(x) \quad 1$

给定一个完备的概率空间$(\ , \mathscr{F}, P)$及其上的一个满足通常条件的流$\{\mathscr{F}_t\}_{t \quad 0}$ 设 $B = \{B_t, t \quad 0\}$ 是一标准 $\mathbf{R}^d$_值$(\mathscr{F}_t)$_布朗运动, $q(dt, dz)$ 为$(Z, B(Z))$上的一$(\mathscr{F}_t)$_鞅测度, 它对应一个以 (dz) 为特征测度的平稳泊松过程且与布朗运动 B 相互独立 一个 _值的随机过程 $U = \{U_t, t \quad 0\}$ 被称为是一个允许控制过程如果它是一个$(\mathscr{F}_t)$一循序可测过程 全体允许控制过程的集合记为 $\mathscr{A}_{ad}$

这里所考虑的随机系统 $X_t = X_t(x, U), t \quad 0$, 是一个$(\mathscr{F}_t)$_适应的右连左极 D_值扩散过

收稿日期: 1999_04_06; 修订日期: 2000_04_16
作者简介: 丁灯(1959), 广东人, 数学博士, 澳门大学助理教授.

程 $X = \{X_t, t \quad 0\}$ 满足下面的随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = b(U_t, X_t)\mathrm{d}t + \quad (U_t, X_t)\mathrm{d}B_t + $$

$$_Z c(U_t, X_{t-}, z)q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z) + \quad (X_t)\mathrm{d} \ _t \tag{1}$$

及反射边界条件:

$$_0^t X_s^d \mathrm{d} \ _s^e = 0, \text{ 和如果 } \ _t > 0 \text{ 则 } \ _t = 2X_t^d \quad (\quad t \quad 0), \tag{2}$$

这里控制过程 $U_0 \quad \mathscr{A}_{ad}$, $_0 = \{ \ _t, t \quad 0\}$ 是一个$(\mathscr{F}_t)$_适应的右连左极增过程, 记 $_t = \ _t - \ _{t-}$ 和 $_t^c = \ _t - \ _{s \ t} \ _s$

我们将考虑如下的费用函数:

$$J(t, x, g, U) = E\Big[\ _0^t f(U_s, X_s) \ (s; U, X)\mathrm{d}s + $$

$$h(X_t) \ (t; U, X)\Big], \tag{3}$$

在全体允许控制下的最小值 这里, $f(u, x)$, $e(u, x)$ 和 $h(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}^d$ 和 $\mathbf{R}^d$ 上的Borel可测函数, $X_t = X_t(x, U)$, $t \quad 0$, 是由方程(1) 及边界条件(2) 所确定的随机过程 另外

$$(t; U, X) = \exp\Big[- \ _0^t e(U_s, X_s)\mathrm{d}s\Big] \qquad (\quad t \quad 0) \tag{4}$$

因此, 我们将考虑如下的价值函数:

$$V(t, x, h) = \inf_{U \ \mathscr{A}_{ad}} J(t, x, h, U), \tag{5}$$

和

$$V(x) = \inf_{U \ \mathscr{A}_{ad}} E\Big[\ _0 f(U_t, X_t) \ (t; U, X)\mathrm{d}t\Big] \tag{6}$$

在下一节中, 我们首先简单地讨论由方程(1)~(2) 所确定的带跳反射扩散过程 然后, 我们在只对系统过程的跳作一般限制之下, 构造一个关于价值函数 $V(t, x, h)$ 的非线性半群(Nisio 半群) $\{Q_t\}_{t \quad 0}$ 我们还将讨论价值函数 $V(x)$ 的连续性及证明它满足一动态规划方程

在第 2 节中, 我们首先获得一个关于半群 $\{Q_t\}$ 的生成算子 A 的表示定理 进而我们考虑由这一表示定理所导出的一个带 Neumann 边界条件的哈密顿 雅可比 贝尔曼方程:

$$\left.\begin{aligned} &\sup_u \{- L(u) \ (x) + e(u, x) \ (x) - f(u, x)\} = 0 \quad (x \quad D), \\ & (x)/ \ x^d = 0 \quad (x \quad D), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这里 $L(u)$ 是一个联系于生成算子 A 的二阶积分_微分算子 然后, 我们给出一个关于这一类方程的粘性解的定义 并讨论了在不同条件下这一解的存在唯一性问题 最后, 我们证明了价值函数 $V(x)$ 是它的一个粘性解

1 带跳反射扩散和 Nisio 半群

对任一初值 $x \quad D$ 和控制 $U \quad \mathscr{A}_{ad}$, 如果存在一$(\mathscr{F}_t)$_适应的和右连左极的D_值过程$X_t = X_t(x, U)$, $t \quad 0$, 和一$(\mathscr{F}_t)$_适应的和右连左极的增过程 $_t = \ _t(x, U)$, $t \quad 0$, 满足如下的随机积分方程:

$$X_t = x + \int_0^t b(U_s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(U_s, X_s)\,dB_s + \int_0^t\int_Z c(U_s, X_s, z)\,q(ds, dz) + \int_0^t \gamma(X_s)\,d\xi_s \quad (t \ge 0), \tag{8}$$

和初值条件: $X_0 = x$, $\xi_0 = 0$, 及反射边界条件(2), 则称$(X, \xi) = \left\{(X_t, \xi_t), t \ge 0\right\}$为随机微分方程(1)在边界条件(2)下的一个解。为得到这一解的存在性及唯一性, 我们需要如下的假设:

A1) 函数 $b(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ 和 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 满足: 存在常数 $c_0 > 0$ 使得,

$$|b(u,x)| + |\sigma(u,x)| + \left|\int_Z c(u,x,z)\,\nu(dz)\right| \le c_0 \quad (\forall (u,x) \in \Gamma \times D), \tag{9}$$

和对 $\forall (u,x), (v,y) \in \Gamma \times D$,

$$|b(u,x) - b(v,y)|^2 + |\sigma(u,x) - \sigma(v,y)|^2 + \int_Z |c(u,x,z) - c(v,y,z)|^2\,\nu(dz) \le c_0(|x-y|^2 + |u-v|^2) \tag{10}$$

A2) 函数 $c_d(\cdot,\cdot,\cdot)$ 满足:

$$x^d + c_d(u,x,z) \ge 0 \quad (\forall (u,x,z) \in \Gamma \times D \times Z) \tag{11}$$

定理1.1 在条件A1)下, 方程(1)存在唯一满足边界条件(2)的解(X, ξ)。进一步, 如果条件A2)被满足, 则增过程ξ是连续的。

应用经典的逐次逼近法和关于非连续函数的Skorohod引理可证明这一定理(详细可参见[3]或[4])。下面为方便起见, 对任一允许控制 $U \in \mathscr{A}_{ad}$, 和 $x, y \in D$ 和 $t \ge 0$, 记 $X_t^x = X_t(x, U)$ 和 $\xi_t^x = \xi_t(x, U)$, 和 $X_t^y = X_t(y, U)$ 和 $\xi_t^y = \xi_t(y, U)$。应用Ito公式和标准的随机分析方法, 我们不难得到如下的估计:

定理1.2 在条件A1)下, 下面各命题成立:

a) 对任一固定的 $T > 0$, 存在常数 $c_{T,0} > 0$ 使得:

$$\sup_{U \in \mathscr{A}_{ad}} E\left[\sup_{0 \le t \le 1}(|X_t^x - X_t^y|^2 + |\xi_t^x - \xi_t^y|^2)\right] \le C_{r,0}|x-y|^2 \quad (\forall x, y \in D) \tag{12}$$

b) 对任一固定的 $T > 0$, 存在常数 $C_{T,1} > 0$ 使得对任意的 $x \in D$,

$$\sup_{U \in \mathscr{A}_{ad}} E[|X_t^x - X_s^x| + |\xi_t^x - \xi_s^x|^2] \le C_{T,1}|t-s| \quad (\forall s, t \in [0, T]) \tag{13}$$

c) 对任意的 $t > 0$ 和 $x \in D$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{U \in \mathscr{A}_{ad}} P(|X_t^x| > n) = 0 \tag{14}$$

令 $B_s(D)$ 是定义在D上的全体有界且上半连续函数所成的集合。则在上确界范 $\|h\| = \sup_{x \in D}|h(x)|$ 下, $B_s(D)$ 是由全体 D 上有界和可测函数所成的巴拿赫空间上的一个闭凸锥(见[5])。另记 $C_b(D)$ 是 D 上全体有界且连续函数所成的集合。

对任意的 $t \ge 0$, 我们定义一个 $B_s(D)$ 上的算子:

$$\left.\begin{aligned} Q_t h(x) &= V(t, x, h) \quad (\forall t > 0), \\ Q_0 h(x) &= h(x), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

这里 $V(t, x, h)$ 是由(5)所定义的价值函数。

下面我们将证明 $\left\{Q_t\right\}_{t \ge 0}$ 构成 $B_s(D)$ 上的一个非线性半群。这一半群也称为关于随机

最优控制问题的 Nisio 半群 在[2] 中, Menaldi 和 Robin 在条件 $A2)$ 下讨论了这一半群 下面我们将在设有这一限制下得到相应的结论

A3) 函数 $f(\ ,\ )$ 和 $e(\ ,\ )$ 满足, 存在常数 $c_1 > 0$ 使得

$$|f(u,x)|+|e(u,x)| \quad c_1 \quad (\quad (u,x) \qquad D), \tag{16}$$

和对任意的 $(u,x),(v,y) \qquad D,$

$$|f(u,x)-f(v,y)|^2+|e(u,x)-e(v,y)|^2$$
$$c_1(|x-y|^2+|u-v|^2) \tag{17}$$

A4) 函数 $e(\ ,\ )$ 满足, 存在常数 $_0 > 0$ 使得

$$e(u,x) \quad _0 \quad (\quad (u,x) \qquad D) \tag{18}$$

A5) $^*(\ ,\ )$ 是严格椭圆的: 存在常数 $_0 > 0$ 使得对任意的 $(u,x) \qquad D$ 和 $y \quad \mathbf{R}^d$, $|y| = 1$,

$$y \ (u,x) \ ^*(u,x)y^* \qquad _0, \tag{19}$$

这里 $^*(u,x)$ 和 y^* 分别是 (u,x) 和 y 的转置

定理 1 3 假设条件 A1) 和 A3) ~ A5) 被满足, 则 $\left\{Q_t\right\}_{t \quad 0}$ 满足:

1) $Q_t: B_s(D) \quad B_s(D) \quad (\quad t \quad 0)$,

2) $\quad Q_th_1 - Q_th_2 \qquad e^{- \ _0 t} \quad h_1 - h_2 \qquad (\quad t > 0)$ 和 $h_1, h_2 \quad B_s(D)$;

3) 如果 $h(\ ) \quad B_s(D)$ 在 D 上一致连续, 则当 $t \quad s$ 时, $\quad Q_th - Q_sh \qquad 0$,

4) $Q_{t+s}h(x) = Q_t(Q_sh(x)), \quad s.t > 0$ 和 $\quad h \quad B_s(D)$ 因此, $\left\{Q_t\right\}_{t \quad 0}$ 构成了 $B_s(D)$ 上的非线性半群

证明 1) 首先, 对任意的 $h(\ ) \quad C_b(D)$, 应用假设 A1) 和 A3) 及估计(12), 不难得到, 存在常数 $K_t > 0$ 使得对任意的 $x, y \quad D$ 和 $U \quad \mathscr{A}_{ad}$,

$$|J(t,x,h,U_0)-J(t,y,h,U)| \quad K_t(|x-y|+E[|h(X_t^x)-h(X_t^y)|])$$

对任意的 n 和任给的 > 0, 由于 $h(\ )$ 在 $\left\{x \quad D; |x| \quad n\right\}$ 上一致连续, 故存在 $_{n,} > 0$ 使得对任意 $x_1, x_2 \quad \left\{x \quad D; |x| < n\right\}$ 和 $|x_1 - x_2| < \ _{n,}$, 成立:

$$|h(x_1) - h(x_2)| < \ /2$$

设 $_n = \left\{w; |X_t^x(w)| \quad n, |X_t^y(w)| \quad n, |X_t^x(w) - X_t^y(w)| < \ _{n,}\right\}$

则可得:

$$E[|h(X_t^x)-h(X_t^y)|] \quad \left(\ \backslash_n + \ _n \right) |h(X_t^x(w))-h(X_t^y(w))| P(\mathrm{d}w)$$
$$2 \quad h \quad [P(|X_t^x|> n)+P|X_t^y|> n)+$$
$$P(|X_t^x - X_t^y| \quad _{n,})] + \ /2$$

应用切比雪夫不等式和(12), 我们有

$$P(|X_t^x - X_t^y| \quad _n) \quad C_{t,0}\frac{|x-y|^2}{^2_{n,}}$$

而由(14) 我们可得:

$$\lim_n[P(|X_t^x|> n)+P(|X_t^y|> n)] = 0$$

因此我们有:

$$E[|h(X_t^x)-h(X_t^y)|] \quad 0 \text{ 当 } |x-y| \quad 0$$

即 $J(t,\ ,h,U) \quad C_b(D)$, 从而 $Q_th(\ ) \quad B_s(D)$

现对 $h \in B_s(D)$, 存在一函数列 $h_n(\cdot) \in C_b(D)$ 使得 $h_n(x) \to h(x)$ 当 $n \to \infty$ (见[5]中定理 2.1 的证明). 应用法都引理, 可得对任一 $U \in \mathscr{A}_{ad}$, 当 $n \to \infty$ 时我们有

$$0 \le J(t, x, h_n, U) - J(t, x, h, U) \le$$
$$\le e^{-\lambda_0 t} E[h_n(X_t^x) - h(X_t^x)] \to 0.$$

因此当 $n \to \infty$ 时我们可得

$$0 \le Q_t h_n(x) - Q_t h(x) \le$$
$$\sup_{U \in \mathscr{A}_{ad}} [J(t, x, h_n, U) - J(t, x, h, U)] \to 0.$$

从而可得 $Q_t h(\cdot) \in B_s(D)$.

2) 和 3) 的证明是标准的, 在这我们略去其证明.

4) 应用上述的结论, 及如文[5], [6] 或[7] 中关于 Bellman 原理的证明方法, 可以证明: 对任意的 D 上的一致连续函数 $h(\cdot) \in B_s(D)$, 成立 $Q_{t+s} h(x) = Q_t(Q_s h(x))$. 这里忽略其详细证明.

现对任意的 $h(\cdot) \in C_b(D)$, 取 $g(\cdot) \in C^\infty(D)$ 满足如果 $|x| \le 1$ 则 $g(x) = 1$; 如果 $1 \le |x| \le 2$ 则 $0 \le g(x) \le 1$; 如果 $|x| \ge 2$ 则 $g(x) = 0$. 对任意的 n, 定义 $g_n(x) = g(x/n)$ 和 $h_n(x) = g_n(x) h(x)$.

显然对任意的 n, $h_n(\cdot)$ 在 D 上一致连续且有 $h_n(x) \uparrow h(x)$, $n \to \infty$. 因此可证: 对任意的 $h(\cdot) \in C_b(D)$, $Q_{t+s} h(x) = Q_t(Q_s h(x))$.

最后, 对任意的 $h(\cdot) \in B_s(D)$, 已知存在一函数列 $h_n(\cdot) \in C_b(D)$ 使得: $h_n(x) \uparrow h(x)$, $n \to \infty$. 因此也可证得对任意的 $h(\cdot) \in B_s(D)$, $Q_{t+s} h(x) = Q_t(Q_s h(x))$. 证毕

定理 1.4 在定理 1.3 的假设之下, 对任意的 $t > 0$, 由(6) 所定义的价值函数 $V(x)$ 是下面方程的唯一解

$$Q_t h = h, \quad h \in B_s(D). \tag{20}$$

证明 对任意的 $h(\cdot) \in B_s(D)$, 在定理的假设之下, 我们可得:

$$\left| Q_t h(x) - \inf_{U \in \mathscr{A}_{ad}} E\left[\int_0^t f(U_s, X_s) \varphi(s; U_0, X_0) \, ds\right] \right| \le \exp[-\lambda_0 t] \|h\|_\infty$$

和

$$\left| E\left[\int_t^\infty f(U_s, X_s) \varphi(s; U_0, X_0) \, ds\right] \right| \le \frac{1}{\lambda_0} \exp[-\lambda_0 t] C_1.$$

困此我们得到: $\lim_{t \to \infty} Q_t h(x) = V(x) \quad (\forall x \in D)$.

另一方面, 由定理 1.3 中的 2), 存在唯一的不动点 $h(\cdot) \in B_s(D)$ 使得: $Q_t h_t = h_t$. 但是, 对任意的 $t > 0$, 由定理 1.3 的 4), 有

$$Q_{2t} h_t = Q_t(Q_t h_t) = Q_t h_t = h_t.$$

因而, 由不动点的唯一性, 可得 $h_{2t} = h_t$. 由归纳法可得: $h_{nt} = h_t$. 因此对任意的 $t > 0$ 和 $x \in D$ 我们有: 对任意的 $x \in D$,

$$h_t(x) = \lim_{n \to \infty} h_{nt}(x) = \lim_{n \to \infty} (Q_{nt} h_{nt}(x)) =$$
$$\lim_{n \to \infty} (Q_{nt} h_t(x)) = V(x).$$

因此我们已证对任意的 $t > 0$, $h_t(x) = V(x)$. 证毕

根据定理 1.3 和定理 1.4, 应用如文[5] 或[7] 中所用的标准方法, 可证得下面的结果:

定理 1.5 在定理 1.3 的假设之下, 价值函数 $V(\cdot) \in C_b(D)$, 而且 $V(x)$ 满足如下的动态

规划方程:

$$V(x)=\inf_{U I \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^t f(U_t, X_t) <(t; U, X)\,\mathrm{d}t+V(X_t) <(t; U, X)\right]\#\tag{21}$$

这里 S 为一$(\mathscr{F}_t)$ _停时 #

2 哈密顿#雅可比#贝尔曼方程

设 $C_b^2(D)$ 是全体具有二阶有界连续偏导数的函数所成的集合, 并记 $C_{ub}^2(D)$ 为 $C_b^2(D)$ 中其各阶偏导数及自身都在 D 上一致连续的函数的全体 #

对任意的 $u \; I \; \#$, 定义 $C_b^2(D)$ 上的两个积分 _微分算子:

$$\begin{aligned}L_0(u)h(x)= Q_Z\Big\{& h[x+c(u,x,z)]-h(x)-\\ & \underset{i=1}{\overset{a}{E}} c_i(u,x,z)\frac{5h(x)}{5x^i}\Big\} M(\mathrm{d}z)\#\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}L(u)h(x)= &\frac{1}{2}\underset{i,j=1}{\overset{d}{E}} a_{ij}(u,x)\frac{5^2h(x)}{5x^i 5x^j}+\underset{i=1}{\overset{d}{E}} b_i(u,x)\frac{5h(x)}{5x^j}+\\ & L_0(u)h(x),\end{aligned}\tag{23}$$

这里 $a(u,x)= R(u,x)R^*(u,x)\#$ 下面我们将证明一个关于$\{Q_t\}_{t\backslash 0}$的生成算子 A 的表示定理, 这一表示定理将导致我们考虑一个哈密顿 # 雅可比 # 贝尔曼方程(简 H_J_B 方程)#

定理 211 设 A 为半群$\{Q_t\}_{t\backslash 0}$ 的生成算子# 假设 $h(\#) \; I \; C_{ub}^2(D)$ 且在 $5D$ 上满足 $5h(x)/5x^d=0\#$ 则在条件 A1) ~ A5) 下, $h(\#)$ 属于 A 的定义域, 而且

$$Ah(x)=-\sup_{u I \#}\{-L(u)h(x)+e(u,x)h(x)-f(u,x)\} \quad (P x \; I \; D)\#\tag{24}$$

证明 对任意的 $h(\#) \; I \; C_{ub}^2(D)$ 且在 $5D$ 上满足: $5h(x)/5x^d=0$, 记

$$\mathscr{L}h(u,x)=-L(u)h(x)+e(u,x)h(x)-f(u,x)\#\tag{25}$$

由于 # 是 R^m 中的紧凸集, 如在[5] 或[7] 中, 我们可证得:

$$\begin{aligned}&\sup_{U I \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^t \mathscr{L}h(U_s,x)\,\mathrm{d}s\right] \backslash \; t\#\sup_{u I \#}\mathscr{L}h(u,x)=\\ &\quad E\left[Q_0^t \sup_{u I \#}\mathscr{L}h(u,x)\,\mathrm{d}s\right] \backslash \sup_{U I \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^t \mathscr{L}h(U_s,x)\,\mathrm{d}s\right]\#\end{aligned}$$

因而

$$-t\sup_{u I \#}\mathscr{L}h(u,x)=-\sup_{U I \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^t \mathscr{L}h(U_s,x)\,\mathrm{d}s\right]\#\tag{26}$$

由于条件 A2) 被满足, 根据定理 211, 增过程 N# 是连续的# 应用 Ito 公式可得:

$$\begin{aligned}&E[h(X_t)<(t;U,X)]-h(x)=\\ &\quad E\left[Q_0^t <(s;U,X)(L(U_s)h(X_s)-e(U_s,X_s)h(X_s))\,\mathrm{d}s\right]\#\end{aligned}$$

因此, 我们有:

$$Q_t h(x)-h(x)=\inf_{U I \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^t <(t;U,X)(-\mathscr{L}h(U_s,X_s))\,\mathrm{d}s\right]\#\tag{27}$$

现由(26) 和(27) 两式可得

$$\left|-\sup_{u I \#}\mathscr{L}h(u,x)-\frac{Q_t h(x)-h(x)}{t}\right| [$$

$$\frac{1}{t}\sup_{U\in\mathscr{H}_{ad}}E\left[\int_0^t\left|\mathscr{L}h(U_s,x)-\mathscr{L}h(U_s,X_s)\right|\mathrm{d}s\right]+$$
$$\frac{1}{t}\sup_{U\in\mathscr{H}_{ad}}E\left[\int_0^t(1-\chi(s;U,X))\left|\mathscr{L}h(U_s,x)\right|\mathrm{d}s\right].$$

由定理 112, 我们可得: 存在常数 $K_0>0$ 使得

$$\frac{1}{t}\sup_{U\in\mathscr{H}_{ad}}E\left[\int_0^t(1-\chi(s;U,X))\left|\mathscr{L}h(U_s,x)\right|\mathrm{d}s\right]\le K_0 t.$$

和一致地在 D 上有

$$\frac{1}{t}\sup_{U\in\mathscr{H}_{ad}}E\left[\int_0^t\left|\mathscr{L}h(U_s,x)-\mathscr{L}h(U_s,X_s)\right|\mathrm{d}s\right]\to 0.$$

因此, 我们得到:

$$\lim_{t\to 0^+}\left|-\sup_{u\in\cdot}\mathscr{L}h(u,\cdot)-\frac{1}{t}(Q_t h(\cdot)-h(\cdot))+\right|_\infty=0.$$

定理得证. 证毕

由定理 211, 我们自然地考虑如下带 Neumann 边界条件的 H_J_B 方程.

$$\left.\begin{aligned}&\sup_{u\in\cdot}\{-L(u)U(x)+e(u,x)U(x)-f(u,x)\}=0\quad(x\in D),\\&\partial U(x)/\partial x^d=0\quad(x\in\partial D),\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

当 $L(u)$ 为二阶微分算子时, 这一方程已被 P. L. Lions 所考虑(参见文[1] 和[5]). 这里, 我们将推广他的定义至二阶微分_积分算子的情形.

定义 设函数 $U(\cdot)\in C_b(D)$. 如果对任意的 $W(\cdot)\in C^2_{ub}(D)$, $U(\cdot)$ 满足下面的二个条件, 则称 $U(\cdot)$ 是 H_J_B 方程(28) 的一个粘性解.

11 如果 x_0 是函数 $U-W$ 在 D 上的最大值点, 则当 $x_0\in D$, 或者 $x_0\in\partial D$ 且 $\partial W(x_0)/\partial x^d<0$ 时,

$$\sup_{u\in\cdot}\{-L(u)W(x_0)+e(u,x_0)U(x_0)-f(u,x_0)\}\le 0.\tag{29}$$

21 如果 x_0 是函数 $U-W$ 在 D 上的最小值点, 则当 $x_0\in D$, 或者 $x_0\in\partial D$ 且 $\partial W(x_0)/\partial x^d>0$ 时,

$$\sup_{u\in\cdot}\{-L(u)W(x_0)+e(u,x_0)U(x_0)-f(u,x_0)\}\ge 0.\tag{30}$$

下面, 我们可看出所得的粘性解是经典意义下解的推广, 另外我们也将讨论 H_J_B 方程(28) 在不同条件下其解的唯一性问题. 首先, 我们不难得到, 在一定条件下, 经典意义下的解是粘性解.

引理 212 假定条件 A1) ~ A5) 被满足. 如果 H_J_B 方程(28) 的一个经典意义下的解 $U(\cdot)\in C^2_{ub}(D)$, 则 $U(\cdot)$ 也是一个粘性解.

定理 213 在条件 A1) ~ A5) 下, H_J_B 方程(28) 具有如下意义的唯一性, 如果 H_J_B 方程(28) 具有两个满足下面条件的经典解 $U_1(\cdot)$ 和 $U_2(\cdot)$:

C1) 在 ∂D 上成立 $U_1(x)=U_2(x)$, 和当 $x\in D$, $|x|\to\infty$ 时, $U_1(x)-U_2(x)\to 0$;

C2) 对 $i=1,2$, $U_i(\cdot)\in C^2_{ub}(D)$,

则对任意的 $x\in D$, $U_1(x)=U_2(x)$.

证明 首先, 假设 $\sup_{x\in D}[U_1(x)-U_2(x)]>0$. 则由条件 C1) 可知函数数$(U_1-U_2)$ 有一个最大值点 $x_0\in D$. 由引理 212, $U_1(\cdot)$ 也是方程(28) 的一个粘性解. 因此, 由定义和条件 C2), 有

$$\sup_{uI\#}\left\{- L(u) U_2(x_0) + e(u, x_0) U_1(x_0) - f(u, x_0)\right\} [0,$$

和

$$\sup_{uI\#}\left\{- L(u) U_2(x_0) + e(u, x_0) U_2(x_0) - f(u, x_0)\right\} = 0\#$$

于是可得:

$$0 \backslash \inf_{uI\#}\left\{ e(u, x_0)(U_1(x_0) - U_2(x_0))\right\} \backslash (U_1(x_0) - U_2(x_0)) K_0 > 0,$$

但这是不可能的# 因此有 $\sup_{xID}[U_1(x) - U_2(x)] [0\#$

应用定义中的另一条件, 类似地我们可证得: $\inf_{xID}[U_1(x) - U_2(x)] \backslash 0\#$ 证毕#

现在我们将证明, 在一定的条件之下, 一个粘性解也是一个在经典意义下的解# 为此, 我们需要多一个假设#

A6) 函数 $b(\#, \#)$ 和 $c(\#, \#, \#)$ 满足条件, 存在两个常数 $A_0 > 0$ 和 $B_0 > 0$ 使得

$$b_d(u, x) [- A_0 \quad (P(u, x) I \# @5D), \tag{31}$$

和

$$| c(u, x, z) | [B_0 \quad (P(u, x, z) I \# @5D @Z)\# \tag{32}$$

引理 214 假设条件 A1)_A6) 都被满足# 如果方程(28) 有一个粘性解 $U(\#) I C^2_{ub}(D)$, 则 $U(\#)$ 也是 H_J_B 方程(28) 的一个在经典意义下的解#

证明 由于 $U(\#) I C^2_{ub}(D)$, 可取 $W(\#) = U(\#)$, 则由(29) 和(30) 马上可得: 对 $P x I D$

$$\sup_{uI\#}\left\{- L(u) U(x) + e(u, x) U(x) - f(u, x)\right\} = 0, \tag{33}$$

因此我们只需证明 $U(\#)$ 满足边界条件#

假设存在某一点 $x_0 I 5D$ 使得 $5U(x_0)/5x^d < 0\#$ 则存在 $E_0 > 0$ 使得 $5U(x_0)/5x^d + E_0 < 0\#$ 设 $g(\#) I C_0^{]}(R^d)$, 满足条件: $0 [g(x) [1$, 且当 $| x - x_0 | [B_0$ 时 $g(x) = 1\#$

现取 $W(x) = U(x) + E_0 x^d g(x)\#$ 则我们有

a1 $W(\#) I C^2_{ub}(D)$ 且 $W(x_0) = U(x_0)$, 另外, x_0 是函数$(U - W)$ 的一个最大值点;

b1 $5W(x_0)/5x^d = 5U(x_0)/5x^d + E_0$, 而且 $i X d$ 时, $5U(x_0)/5x^i = 5U(x_0)/5x^i$;

c1 对任意的 i 和 j, $5^2 W(x_0)/5x^i 5x^j = 5^2 U(x_0)/5x^i 5x^j$;

d1 对 $P(u, z) I \# @Z$,

$$W(x_0 + c(u, x_0, z)) = U(x_0 + e(u, x_0, z)) + E_0 c_d(u, x_0, z)\#$$

因而, 我们有 $L(u) W(x_0) = L(u) U(x_0) + E_0 b_d(u, x_0)\#$ 因此, 由(29) 可得

$$\sup_{uI\#}\left\{- L(u) U(x_0) - E_0 b_d(u, x_0) + e(u, x_0) U(x_0) - f(u, x_0)\right\} [0\#$$

从而由条件 A6) 得:

$$\sup_{uI\#}\left\{- L(u) U(x_0) + e(u, x_0) U(x_0) - f(u, x_0)\right\} [E_0(- A) < 0\#$$

这与(33) 矛盾, 因此可知 $5U(x)/5x^d \backslash 0, (Px I 5D)\#$

同样地, 我们也可证得: 对任意的 $x I 5D$, $5U(x)/5x^d [0\#$ 即我们证得在 $5D$ 上, $5U(x)/5x^d = 0\#$ 证毕#

应用这一引理, 及定理 213 的证明方法, 我们可证得下面的定理#

定理 215 在假设 A1) ~ A6) 之下, H_J_B 方程(28) 具有如下的唯一性, 如果方程(28) 有两个粘性解 $U_1(\#)$ 和 $U_2(\#)$ 满足条件 C1) 和 C3) $U_1 I C^2_{ub}(D)$, 则对任意的 $x I D$, $U_1(x) =$

$_2(x)$#

现在我们将讨论本文的主要结果#

定理 216 假设条件 A1)_A5) 被满足# 则价值函数 $V(\#)$ 是 H_J_B 方程(28) 的一个粘性解#

证明 根据定理 115, $V(\#)\ I\ C_b(D)$# 因而我们仅需证明不等式(29) 和(30) 成立#

设函数 $W(\#)\ I\ C^2_{ub}(D)$ 和 $x_0\ I\ D$ 是函数$(V-W)$ 的一个最大值点# 由于对任意的常数 A, 成立: $\mathscr{L}(u)W(x)=\mathscr{L}(u)(W(x)+A),\ P(u,x)\ I\ \#@D$, 我们可不失一般性地假设: $V(x_0)=W(x_0)$#

首先我们证明: 存在停时 S 使得对任意的 $t>0$,

$$\sup_{U\ I\ \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^{t\,C\,S}\mathscr{L}\mathscr{W}(U_s,X_s^0)\,\mathrm{d}s\right]\ [\ 0, \tag{34}$$

这里 $X_t^0=X_t(x_0,U),\ t\ \backslash\ 0$, 是随机微分方程(1) ~ (2) 的解 $\mathscr{L}\mathscr{W}(u,x)$ 如(25) 所定义#

1) 假设 $x_0\ I\ 5D$ 和 $5W(x_0)/5x^d<0$# 由于 $5W(x)/5x^d$# 在 D 上连续, 存在常数 $r_1>0$ 使得在集 $\mathscr{O}_1\ H\ D$ 上成立 $5W(x)/5x^d<0$, 这里 $\mathscr{O}_1=\left\{x\ I\ R^d;\ |\ x-x_0|<r_1\right\}$#

令 $S=\inf\left\{t\ \backslash\ 0;\ X_t^0\ \not I\ \mathscr{O}_1\right\}$, 则 S 是一个$(\mathscr{F}_t)$_停时# 由定理 115, 对任意的 $t>0$,

$$V(x_0)=\inf_{U_0\ I\ \mathscr{A}_{ad}} E\left[Q_0^{t\,C\,S} f(U_s,X_s^0)<(s;U_0,X_0^0)\,\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.V(X^0_{t\,C\,S})<(t\ C\ S;U,X^0)\right\}\# \tag{35}$$

应用 Ito 公式, 及由于对任意的 $s\ [\ t\ C\ S$, 成立 $5W(x_s^0)/5x^d<0$, 我们有

$$E[W(X^0_{t\,C\,S})<(t\ C\ S;U,X^0)]-W(x_0)=$$
$$E\left[Q_0^{t\,C\,S}<(s;U_0,X_0^0)\left\{(L(U_s)W(X_s^0)-\right.\right.$$
$$\left.\left.e(U_s,X_s^0)W(X_s^0))\,\mathrm{d}s+\frac{5W(X_s^0)}{5x^d}\mathrm{d}N_s^0\right\}\right]\ [$$
$$E\left[Q_0^{t\,C\,S}<(s;U_0,X_0^0)(\mathscr{L}(U_s)W(X_s^0)-)e(U_s,X_s^0 W(X_s^0))\,\mathrm{d}s\right]\#$$

另一方面, 由于对任意的 $x\ I\ D$, $V(x)\ [\ U(x)$, 故可得:

$$E[V(X^0_{t\,C\,S})<(t\ C\ S,U,X^0)]-V(x_0)\ [$$
$$E[W(X^0_{t\,C\,S})<(t\ C\ S;U,X^0)]-W(X_0)\ [$$
$$E\left[Q_0^{t\,C\,S}<(s;U,X^0)(\mathscr{L}(U_s)W(X_s^0)-e(U_s,X_s^0)W(X_s^0))\,\mathrm{d}s\right]\# \tag{36}$$

因此, 由(35) 和(36), 并注意到 $V(x_0)=W(x_0)$, 我们可得: 对任意的 $U\ I\ \mathscr{A}_{ad}$,

$$0\ [\ E\left[Q_0^{t\,C\,S} f(U_s,X_s^0)<(s;U,X^0)\,\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.W(X^0_{t\,C\,S})<(t\ C\ S;U,X^0)-W(x_0)\right]\ [$$
$$E\left[Q_0^{t\,C\,S}<(s;U,X^0)(-\mathscr{L}\mathscr{W}(U_s,X_s^0))\,\mathrm{d}s\right]\#$$

因此, 由于对任意的 $s\ [\ t\ C\ S$, $<(s;U,X^0)>0$, (34) 成立#

2) 假设 $x_0\ I\ D$, 则存在 $r_2>0$ 使得 $\mathscr{O}_2=\left\{x\ I\ R^d;\ |\ x-x_0|<r_2\right\}<D$# 令 $S=\inf\left\{t\ \backslash\ 0,\ X_t^0\ \not I\ \mathscr{O}_2\right\}$, 则 S 是一个$(\mathscr{F}_t)$_停时, 因此(35) 对任意的 $t>0$ 仍成立# 但根据定理 111 知, $N_t^0=N(x_0,U),\ t\ \backslash\ 0$, 是连续的# 而且当 $s<S$ 时 $N_s^0=0$# 因而(30) 也成立# 因此, 我

们可得(34)也成立。

现在我们证明(29)成立。我们有

$$\begin{aligned}
\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[\int_0^t \mathcal{L}W(U_s, x_0)\,\mathrm{d}s\right] \le{}& \sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[\int_0^{t\wedge\tau} \left|\mathcal{L}W(U_s, x_0)-\mathcal{L}W(U_s, X_s^0)\right|\mathrm{d}s\right]+\\
&\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[\int_0^{t\wedge\tau} \mathcal{L}W(U_s, X_s^0)\,\mathrm{d}s\right]+\\
&\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[I_{\{\tau<t\}}\int_{\tau}^{t\wedge\tau} \mathcal{L}W(U_s, x_0)\,\mathrm{d}s\right]。
\end{aligned}\tag{37}$$

另一方面，如定理2.1的证明，对任意的 $t>0$，我们可得：

$$\sup_{u\in\Gamma}\mathcal{L}W(u, x_0)=\frac{1}{t}\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[\int_0^t \mathcal{L}W(U_s, x_0)\,\mathrm{d}s\right]。\tag{38}$$

同时，由于 $W(\cdot)\in C_{ub}^2(D)$，由定理1.2，假设A1)和A3)，我们可得：

$$\frac{1}{t}\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[\int_0^{t\wedge\tau} \left|\mathcal{L}W(U_s, X_s^0)-\mathcal{L}W(U_s, x_0)\right|\mathrm{d}s\right]\to 0。$$

当 $t\to 0$。另外，应用切比雪夫不等式和定理1.2的性质b)，我们可得：对于 $r=r_1$ 或 $r=r_2$，存在常数 $C_1>0$ 使得：

$$\begin{aligned}
\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} P(\tau>t) ={}& \sup_{U_0\in\mathcal{U}_{ad}} P(|X_t^0-x_0|<r)\le\\
& 1-\frac{1}{r^2}\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} E[|X_t^0-x_0|^2]\le 1-\frac{c_1 t}{r^2}\to 1,
\end{aligned}$$

当 $t\to 0$。即我们得到：

$$\lim_{t\to 0}\sup_{U\in\mathcal{U}_{ad}} P(\tau\le t)=0。$$

因此，我们可证得：

$$\frac{1}{t}\sup_{U_0\in\mathcal{U}_{ad}} E\left[I_{\{\tau<t\}}\int_{\tau}^{t\wedge\tau} \mathcal{L}W(U_s, x_0)\,\mathrm{d}s\right]\to 0。\tag{39}$$

当 $t\to 0$。由(34)，(37)，(38)和(39)我们马上可得：

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in\Gamma}\left\{-L(u)W(x_0)+e(u, x_0)U(x_0)-f(u, x_0)\right\} ={}&\\
\sup_{u\in\Gamma}\mathcal{L}W(u, x_0)\le 0。&
\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明(30)也成立。定理得证。

致谢：　作者感谢薛大为教授和司徒荣教授，他们给予了作者极大的鼓励，并对本文提出许多极有价值的建议。作者还感谢本文的审稿专家，他极为中肯的评论引导了作者对本文的改进，特别是对文章的主要定理及其证明的修改。

[参 考 文 献]

[1] Lions P L. Optimal control of reflected diffusion processes[J]. Lect Notes in Control and Inf Sci, 1983, **61**: 157) 163.

[2] Menaldi J L, Robin M. construction and control of reflected diffusion with jumps[J]. Lect Notes in Control and Inf Sci, 1983, **69**: 309) 322.

[3] Maurel M C, Karoui N E, Marchal B. Reflexiom discontinue et systemes stochastiques[J]. Ann Probab, 1980, **8**(3): 1047) 1067.

[4] 丁灯. 关于带跳反射扩散过程的下鞅问题及其应用[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1995, **34**(2): 7) 13.

[5] Lions P L, Menaldi J L. Optimal control of stochastic integrals and Hamilton_Jacobi_Bellman equations, Parts 1 and 2[J]. SIAM J Control Optim, 1980, **20**(1): 58) 95.

[6] Krylov N V. Controlled Diffusion Processes[M]. Berlin: Springer, 1985.

[7] Nisio M. Lectures on Stochastic Control Theory[M]. Macmillan India Limited, 1981.

[8] Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes[M]. Tokyo: North_Holland Publishing Compang, 1981.

[9] Krylov N V, Pragarauskas H. On the Bellman equations for uniformly non_degenerated general stochastic processes[J]. Liet Matem Rink, 1980, **20**(1): 85) 95.

A Note on Stochastic Optimal Control of Reflected Diffusions With Jumps

DING Deng[1,2]

(11 Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510725, P R China;
21 Faculty of Science and Technology, University of Macau, P O Box 3001 Macau, P R China)

Abstract: Stochastic optimal control problems for a class of reflected diffusion with Poisson jumps in a half_space are considered. The nonlinear Nisio. s semigroup for such optimal control problems was constructed. A Hamilton_Jacobi_Bellman equation with the Neumann boundary condition associated with this semigroup was obtained. Then, viscosity solutions of this equation were defined and discussed, and various uniqueness of this equation was also considered. Finally, the value function in such optimal control problems is shown to be a viscosity solution of this equation.

Key words: stochastic optimal control; reflected diffusion with jumps; Hamilton_Jacobi_Bellman equation; viscosity solution