

文章编号: 1000-0887(2000) 08\_0852\_09

# 外激励下压电球壳的球对称稳态响应分析\*

李红云, 刘正兴, 林启荣

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(沈惠申推荐)

**摘要:** 对压电球壳空间球对称稳态响应问题进行了研究。考虑空间球对称压电材料, 不计体力和自由电荷, 在球坐标下利用弹性理论, 由压电材料的本构方程、几何方程和运动方程导出了外激励作用下位移、应力、应变、电势、电位移和电场强度各量的稳态解, 并对带压电激励和感应层的弹性球壳的球对称响应问题进行了求解。该结果可以给结构的球对称动力控制问题提供良好的理论依据, 为日后对于一般性的空间动力问题的研究提供参考。

**关键词:** 压电材料; 稳态响应; 球坐标系; 激励层; 感应层  
**中图分类号:** O343.1      **文献标识码:** A

## 引 言

随着科学技术的飞速发展, 越来越多的复杂机械和结构如柔性机器人、机器臂、太空中的飞行器、空间站等等已投入了使用。如何有效地动态监测、控制这些结构已受到研究人员的极大重视。近年来, 对于具有感知和控制能力的智能材料的广泛研究给复杂结构的形状和振动控制问题提供了一条思路<sup>[1, 2]</sup>。压电材料由于其自身具有的机电耦合特性而且易于制作成各种形状而成为一种理想的智能材料, 目前已有大量文献对于压电材料在结构控制中的应用问题进行了研究<sup>[3, 4, 5]</sup>。

压电材料空间轴对称静力问题的通解已有研究<sup>[6, 7, 8]</sup>, 本文就压电球壳空间球对称动力响应问题进行了研究, 在球坐标系下利用弹性理论, 由压电材料的本构方程、几何方程和运动方程导出了在外激励(表面力和外加电势)作用下压电体的位移、应力、电势、电位移和电场强度各量的解析解, 并将其通解应用于带压电激励、感应层的压电弹性层合球壳球对称响应问题的求解。该结果可以给结构的球对称动力控制问题提供良好的理论依据, 为日后对于一般性的空间动力问题的研究提供参考。

## 1 压电材料球对称振动的基本方程

### 1.1 本构方程

对于线性压电连续介质, 其本构关系为<sup>[9]</sup>:

\* 收稿日期: 1999\_08\_12; 修订日期: 2000\_04\_18

基金目: 船舶工业国防科技应用、基础研究基金资助项目(98J403.3); 振动、冲击、噪声国家重点实验室开放基金课题(VSN\_99001)

作者简介: 李红云(1972—), 女, 广东中山人, 讲师, 博士; 刘正兴(1940—), 男, 上海市人, 教授, 博导。

$$\begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = [c]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix}_{6 \times 1} - [e]_{6 \times 3}^T \begin{Bmatrix} E \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \tag{1a}$$

$$[D]_{3 \times 1} = [e]_{3 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix}_{6 \times 1} + [g]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} E \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \tag{1b}$$

其中,  $\{\sigma\}$ 、 $\{\varepsilon\}$ 、 $\{E\}$ 、 $\{D\}$  分别为应力、应变、电场强度和电位移矢量, 在球坐标表示下 (如图 1) 分别为  $\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{\theta\varphi}, \tau_{\varphi\theta}, \tau_{r\theta}\}^T$ ,  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\theta\varphi}, \gamma_{\varphi\theta}, \gamma_{r\theta}\}^T$ ,  $\{E\} = \{E_r, E_\theta, E_\varphi\}^T$ ,  $\{D\} = \{D_r, D_\theta, D_\varphi\}^T$ .  $[c]$ 、 $[e]$ 、 $[g]$  分别为弹性常数、压电应力常数和介电常数矩阵. 在实际工程应用中, 压电材料大都选取压电陶瓷或压电聚合物 PVDF. 这两类材料在宏观上大多都呈横观各向同性<sup>[9]</sup>. 本文所讨论的压电材料, 都是横观各向同性压电材料. 我们选取各向同性面为  $\theta_\varphi$  平面, 即纤维平行于  $r$  轴, 且沿  $r$  轴方向上极化(外加电势沿  $r$  轴施加). 此时, 横观各向同性压电材料的弹性刚度常数矩阵、压电应力常数矩阵和介电常数矩阵分别为:

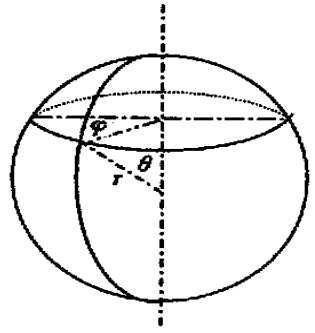


图 1 球坐标系示意图

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{22} - c_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

由于本文考虑空间压电材料球对称问题, 因此  $\gamma_{\theta\varphi} = \gamma_{\varphi\theta} = \gamma_{r\theta} = 0, E_\theta = E_\varphi = 0$ . 将(2) ~ (4) 代入(1) 可得  $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = \tau_{r\theta} = 0, D_\theta = D_\varphi = 0$ , 以及

$$\sigma_r = c_{11} \varepsilon_r + c_{12} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi) - e_{11} E_r, \tag{5}$$

$$\sigma_\theta = c_{12} \varepsilon_r + c_{22} \varepsilon_\theta + c_{23} \varepsilon_\varphi - e_{12} E_r, \tag{6}$$

$$\sigma_\varphi = c_{12} \varepsilon_r + c_{23} \varepsilon_\theta + c_{22} \varepsilon_\varphi - e_{12} E_r, \tag{7}$$

$$D_r = e_{11} \varepsilon_r + e_{12} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi) + g_{11} E_r. \tag{8}$$

### 1.2 几何方程

对于空间压电材料球对称问题, 只有径向位移  $u_r(r, t)$ , 在线性范围内, 应变和位移的关系表示为,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r(r, t)}{\partial r}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r(r, t)}{r}. \tag{10}$$

电场分量  $E_r$  和电势  $\phi(r, t)$  的关系为

$$E_r = - \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r}. \tag{11}$$

### 1.3 运动方程

不计体力且设不存在自由电荷, 运动方程为

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \frac{2\alpha_r - \alpha_\theta - \alpha_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2}{r} D_r = 0, \quad (13)$$

其中  $\rho$  为压电材料的质量密度, 未知量  $\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_\varphi, D_r, \xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi, E_r$  均为  $r$  和  $t$  的函数。

(5) ~ (13) 式组成了压电材料空间球对称动力问题的基本方程。

## 2 空间球对称稳态响应解

本文主要考虑在表面力  $q(t)$  和外加电势  $\phi_1(t)$  的激励下弹性压电球体的响应问题。设外加激励为简谐的, 即

$$q(t) = Q \cdot e^{i\omega t} \text{ 和 } \phi_1(t) = V_1 \cdot e^{i\omega t}, \quad (14)$$

其中  $Q, V_1$  分别为施加的载荷集度和电势的幅值,  $\omega$  为外激励的频率。本文主要关心的是在外激励下的稳态解, 因此如文[10]处理, 则(5) ~ (13) 式表示的压电材料空间球对称动力问题相应的稳态响应解也可表示为简谐的

$$u_r(r, t) = U(r) e^{i\omega t} \text{ 和 } \phi(r, t) = \Phi(r) e^{i\omega t}. \quad (15)$$

相应的, 未知函数  $\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_\varphi, D_r, \xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi, E_r$ , 也可分别表示为  $\alpha_r(r), \alpha_\theta(r), \alpha_\varphi(r), D_r(r), \xi_r(r), \xi_\theta(r), \xi_\varphi(r), E_r(r)$  乘上因子  $e^{i\omega t}$ 。因此, 将各未知量的简谐表示代入(5) ~ (13) 式, 压电体球对称响应问题转化为  $U(r), \Phi(r), \alpha_r(r), \alpha_\theta(r), \alpha_\varphi(r), D_r(r), \xi_r(r), \xi_\theta(r), \xi_\varphi(r)$  及  $E_r(r)$  的求解问题。

由(13)式积分得

$$D_r(r) = \frac{A_1}{r^2}, \quad (16)$$

其中  $A_1$  为积分常数。将(9)、(10)、(16)式代入(5) ~ (8) 式, 并消去  $E_r(r)$ , 可得

$$\alpha_r(r) = c_{11} \frac{dU(r)}{dr} + c_{12} \frac{U(r)}{r} - \frac{e_{11} A_1}{g_{11} r^2}, \quad (17)$$

$$\alpha_\theta(r) = \alpha_\varphi(r) = c_{12} \frac{dU(r)}{dr} + c_{22} \frac{U(r)}{r} - \frac{e_{12} A_1}{g_{11} r^2}, \quad (18)$$

其中  $c_{11} = c_{11} + \frac{e_{11}^2}{g_{11}}, c_{12} = c_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{g_{11}}, c_{22} = c_{22} + c_{23} + 2 \frac{e_{12}^2}{g_{11}}$ 。

将(17)、(18)代入(12)式得

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dU(r)}{dr} + \left[ \frac{B_1}{r^2} + B_2 \right] U(r) = \frac{B_3 A_1}{r^3}, \quad (19)$$

其中  $B_1 = \frac{c_{12} - 2c_{22}}{c_{11}}, B_2 = \frac{\rho\omega^2}{c_{11}}, B_3 = -\frac{2e_{12}}{c_{11} \cdot g_{11}}$ 。

方程(19)为二阶非齐次的 Bessel 方程。方程(19)对应的齐次 Bessel 方程的通解为<sup>[11]</sup>:

$$U_0(r) = A_2 \frac{Y_\nu(\sqrt{B_2}r)}{\sqrt{r}} + A_3 \frac{J_\nu(\sqrt{B_2}r)}{\sqrt{r}}, \quad (20)$$

其中  $A_2, A_3$  为待定常数,  $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4B_1}$ ,  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  分别表示  $\nu$  阶第一、二类 Bessel 函数, 级数表示为

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu + 2k},$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

其中  $\Gamma(x)$  为 GAMMA 函数.

(19) 式右端的非齐次项对应的特解可以用 Frobenius 级数进行求解

$$U_s(r) = A_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^{n-1}). \quad (21)$$

将(21)代入(19)的微分方程,比较方程两端  $r$  的各阶幂次的系数,最终特解  $U_s(r)$  可表示为

$$U_s(r) = A_1 \cdot B_4 \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} r^{2n-1}), \quad (22)$$

其中  $B_4 = \frac{B_3}{B_1}$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_{2n} = (-B_2)^n \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k(2k-1) + B_1} \right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

结合齐次方程的通解(20)和非齐次项的特解(22),最后方程(19)的解可以表示为

$$U(r) = U_0(r) + U_s(r) = A_1 b_{11} + A_2 b_{12} + A_3 b_{13}, \quad (23)$$

其中  $b_{11} = B_4 \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} r^{2n-1})$ ,  $b_{12} = \frac{Y_\nu(\sqrt{B_2}r)}{\sqrt{r}}$ ,  $b_{13} = \frac{J_\nu(\sqrt{B_2}r)}{\sqrt{r}}$ .

将上式代入(9)、(10)、(17)、(18)便可得到用位移  $U(r)$  的通解表示的  $\xi(r)$ 、 $\xi_0(r)$ 、 $\xi_\varphi(r)$ 、 $\xi_\varphi(r)$ 、 $\xi_\varphi(r)$ 、 $\xi_\varphi(r)$ 、 $E_r(r)$ :

$$\xi(r) = A_1 b_{21} + A_2 b_{22} + A_3 b_{23}, \quad (24)$$

$$\xi_0(r) = \xi_\varphi(r) = A_1 \frac{b_{11}}{r} + A_2 \frac{b_{12}}{r} + A_3 \frac{b_{13}}{r}, \quad (25)$$

$$\xi_\varphi(r) = A_1 \cdot \left[ c_{11} b_{21} + c_{12} \frac{b_{11}}{r} - \frac{e_{11}}{g_{11}} \frac{1}{r^2} \right] + A_2 \cdot \left[ c_{11} b_{22} + c_{12} \frac{b_{12}}{r} \right] + A_3 \cdot \left[ c_{11} b_{23} + c_{12} \frac{b_{13}}{r} \right], \quad (26)$$

$$\xi_\varphi(r) = \xi_\varphi(r) = A_1 \cdot \left[ c_{12} b_{21} + c_{22} \frac{b_{11}}{r} - \frac{e_{12}}{g_{11}} \frac{1}{r^2} \right] + A_2 \cdot \left[ c_{12} b_{22} + c_{22} \frac{b_{12}}{r} \right] + A_3 \cdot \left[ c_{12} b_{23} + c_{22} \frac{b_{13}}{r} \right], \quad (27)$$

$$E_r(r) = \frac{1}{g_{11}} \left[ A_1 \cdot \left[ \frac{1}{r^2} - e_{11} b_{21} - 2e_{12} \frac{b_{11}}{r} \right] + A_2 \cdot \left[ -e_{11} b_{22} - 2e_{12} \frac{b_{12}}{r} \right] + A_3 \cdot \left[ -e_{11} b_{23} - 2e_{12} \frac{b_{13}}{r} \right] \right], \quad (28)$$

其中

$$b_{21} = B_4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n} \cdot (2n-1) \cdot r^{2n-2}),$$

$$b_{22} = \sqrt{\frac{B_2}{r}} \left[ -Y_{\nu+1}(\sqrt{B_2}r) + \frac{\nu Y_\nu(\sqrt{B_2}r)}{\sqrt{B_2}r} \right] - \frac{Y_\nu(\sqrt{B_2}r)}{2r^{3/2}},$$

$$b_{23} = \sqrt{\frac{B_2}{r}} \left[ -J_{\nu+1}(\sqrt{B_2}r) + \frac{\nu J_\nu(\sqrt{B_2}r)}{\sqrt{B_2}r} \right] - \frac{J_\nu(\sqrt{B_2}r)}{2r^{3/2}}.$$

考虑到(11)中  $E_r(r)$  与  $\xi(r)$  的关系得

$$\Phi(r) = \frac{1}{g_{11}}(A_1 b_{31} + A_2 b_{32} + A_3 b_{33}) + A_4, \quad (29)$$

其中

$$b_{31} = \frac{1}{r} + B_4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_{2n} \left( e_{11} + \frac{2e_{12}}{2n-1} \right) r^{2n-1} \right],$$

$$b_{32} = e_{11} b_{12} + 2e_{12} \left[ \frac{1}{\sin(\sqrt{\pi})} (\cos(\sqrt{\pi}) G_1 - G_2) \right],$$

$$b_{33} = e_{11} b_{13} + 2e_{12} G_1,$$

$$G_1 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{B_2} \right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left( -\frac{B_2}{4} \right)^n r^{2n+\nu-1/2}}{n! \cdot \left[ 2n + \nu - \frac{1}{2} \right] \cdot \Gamma(n + \nu + 1)} \right\},$$

$$G_2 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{B_2} \right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left( -\frac{B_2}{4} \right)^n r^{2n-\nu-1/2}}{n! \cdot \left[ 2n - \nu - \frac{1}{2} \right] \cdot \Gamma(n - \nu + 1)} \right\},$$

$A_4$  为积分常数。

至此, 求出了压电材料球对称动力响应问题的应力、应变、位移、电位移、电势及电场强度的分布。在这些解中包含 4 个未知积分常数  $A_1, A_2, A_3, A_4$ 。它们由问题的机械和电场边界条件确定。

若材料为普通的横观各向同性弹性材料时, 只需令(23~27)式中的压电常数为零, 则可得纯弹性体的位移、应力和应变的解析表达式,

$$U^e(r) = A_5 b_{12}^e + A_6 b_{13}^e, \quad (30)$$

$$\varepsilon_r^e(r) = A_5 b_{22}^e + A_6 b_{23}^e, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{\theta}^e(r) = \varepsilon_{\phi}^e(r) = A_5 \frac{b_{12}^e}{r} + A_6 \frac{b_{13}^e}{r}, \quad (32)$$

$$\sigma_r^e(r) = A_5 \left[ c_{11}^e b_{22}^e + c_{12}^e \frac{b_{12}^e}{r} \right] + A_6 \left[ c_{11}^e b_{23}^e + c_{12}^e \frac{b_{13}^e}{r} \right], \quad (33)$$

$$\sigma_{\theta}^e(r) = \sigma_{\phi}^e(r) = A_5 \left[ c_{12}^e b_{22}^e + c_{22}^e \frac{b_{12}^e}{r} \right] + A_6 \left[ c_{12}^e b_{23}^e + c_{22}^e \frac{b_{13}^e}{r} \right], \quad (34)$$

其中  $c_{ij}^e (i, j = 1, 2)$  为弹性材料的弹性常数,  $\rho^e$  为弹性材料的质量密度,

$$B_1^e = \frac{c_{12}^e - 2c_{22}^e}{c_{11}^e}, \quad B_2^e = \frac{\rho^e \omega^2}{c_{11}^e}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4B_1^e}, \quad b_{12} = \frac{Y_{\nu}(\sqrt{B_2^e} r)}{\sqrt{r}},$$

$$b_{13} = \frac{J_{\nu}(\sqrt{B_2^e} r)}{\sqrt{r}}, \quad b_{22}^e = \sqrt{\frac{B_2^e}{r}} \left[ -Y_{\nu+1}(\sqrt{B_2^e} r) + \frac{\nu \cdot Y_{\nu}(\sqrt{B_2^e} r)}{\sqrt{B_2^e} r} \right] - \frac{Y_{\nu}(\sqrt{B_2^e} r)}{2r^{3/2}},$$

$$b_{23}^e = \sqrt{\frac{B_2^e}{r}} \left[ -J_{\nu+1}(\sqrt{B_2^e} r) + \frac{\nu \cdot J_{\nu}(\sqrt{B_2^e} r)}{\sqrt{B_2^e} r} \right] - \frac{J_{\nu}(\sqrt{B_2^e} r)}{2r^{3/2}}.$$

此时待定常数只有  $A_5, A_6$  两个。

### 3 压电弹性层合球壳在外激励下的机械和电场边界条件

对于  $N$  层的层合压电球壳(如图 2), 压电层可放置在层合球壳的内外表面, 也可放置在层间。若外、内壁上分别受到均布的简谐外载  $q_1 e^{i\omega t}$ 、 $q_2 e^{i\omega t}$ , 在结构的外内表面上必须分别满

足力学边界条件  $q_r = q_1$  和  $q_r = q_2$ 。

如果结构外表面层(第  $N$  层)作为压电激励层,内表面层(第 1 层)作为压电感应层,在激励层的外表面上施加电势  $V e^{i\omega t}$ , 结构还应满足相应的电学边界条件:

- 1) 压电激励层外表面:  $\Phi = V$ ;
- 2) 压电感应层内表面:  $D_r = 0$ 。

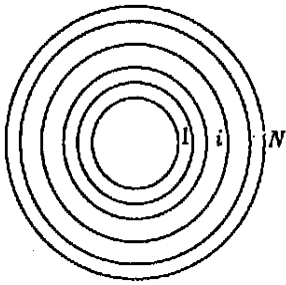


图 2 压电弹性层合球壳的示意图

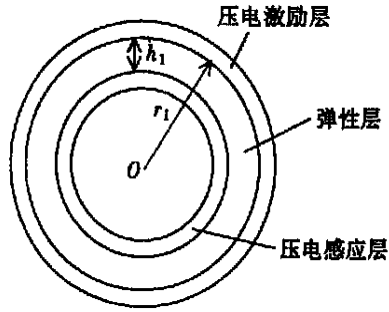


图 3 带压电层的弹性球壳的示意图

对于  $N$  层压电球壳,有  $N-1$  个界面,在界面上位移、应力及电学量应满足连续条件  $U = U^{i+1}$ ,  $\sigma_r^i = \sigma_r^{i+1}$ ,  $\Phi^i = \Phi^{i+1}$ ,  $D_r^i = D_r^{i+1}$  ( $i = 1, \dots, N-1$ )。

若压电弹性层合球壳有  $I$  层压电层,  $N-I$  层纯弹性层,由上节可知该结构的通解有  $2I + 2N$  个待定常数,同时该结构共有  $2I + 2N$  个边界和连续性条件,因此所有待定常数是可以唯一确定的。

## 4 数值算例

本文采用图 3 所示结构进行数值计算,压电层与弹性层交界面上  $\Phi = 0$ 。选用一种 PDMF 作为压电感应层和激励层的压电材料,其材料参数为<sup>[12]</sup>

$$E = 2.0 \text{ GPa}, \nu = 0.29, e_{11} = -0.072 \text{ C/m}^2, e_{13} = 0.046 \text{ C/m}^2, \\ g_{11} = g_{22} = 0.1062 \times 10^{-9} \text{ F/m}, \rho = 1800 \text{ kg/m}^3.$$

感应层和激励层的厚度取为相等,以  $h_2$  表示。

弹性层选用一种横观各向同性的弹性材料,其材料参数为:

$$E_L = 172.5 \text{ GPa}, E_T = 6.9 \text{ GPa}, \nu_L = \nu_T = 0.25, \rho^e = 7800 \text{ kg/m}^3.$$

其中下标 L 和 T 分别表示平行和垂直纤维的方向。

计算时所有变量均进行了无量纲化处理:

$$U^* = \frac{U}{h_1}, \sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{c_{11}^e}, \sigma_\theta^* = \frac{\sigma_\theta}{c_{11}^e}, \sigma_\varphi^* = \frac{\sigma_\varphi}{c_{11}^e}, D_r^* = \frac{D_r}{e_{11}^p}, \Phi^* = \frac{e_{11}^p \Phi}{c_{11}^e r_1}, \\ q_i^* = \frac{q_i}{c_{11}^e} \quad (i = 1, 2), V^* = \frac{e_{11}^p V}{c_{11}^e r_1}, r^* = \frac{r}{r_1}, \beta = \frac{h_1}{h_2}.$$

其中上标 e 和 p 分别表示弹性层和压电层的材料参数,  $r_1, h_1$  为弹性层的外径和厚度。以下算例中选用  $r_1 = 1.0 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ ,  $q_1^* = -0.1$ ,  $q_2^* = 0.0$ 。

通常情况下,粘贴压电层的弹性球壳的受力特性将会发生变化,若压电层的厚度较之弹性层的厚度很薄时,这种影响不会很大,为此,我们进行定量分析,在相同的外载条件下,激励层上不施加外加电压时,采用不同厚度比  $\beta$  进行了分析,并与不带压电层的同一弹性球壳的结果

进行了比较。图4给出了弹性层中部即( $r_0 = r_1 - h_1/2$ )处位移、应力在压电层取不同厚度时与不带压电层的弹性球体的相应量的比较,其中上标0表示没有压电层时弹性球壳在相同边界条件下对应的各变量。从图4可以看出,当 $\beta = 100$ 时,两种情况的径向位移 $U$ 、径向应力 $\sigma_r$ 及周向应力 $\sigma_\theta$ 已趋向一致,说明压电材料对于弹性层的机械性能的影响可以忽略。因此,在本文的分析中,我们取 $\beta = 100$ ,这样可以着重研究压电层的机电耦合特性对于弹性层的作用效果。

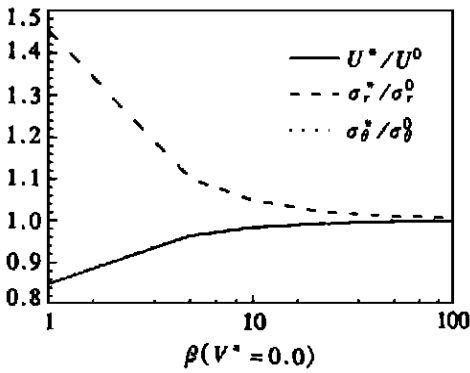


图4 弹性层中部( $r_0 = r_1 - h_1/2$ )处位移、应力在压电层取不同厚度时与不带压电层的弹性球体的比较

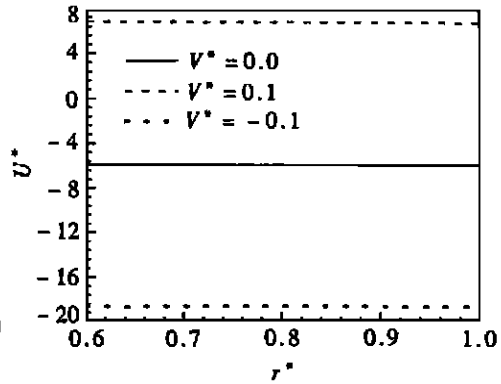


图5 不同外加电势情况下弹性层径向位移的分布

图5至图7表示激励层在有、无外加电势的情况下,弹性层的径向位移、径向应力、及周向应力沿厚度的分布规律。从图中看出激励层上外加电势的施加,可以引起弹性层的应力和位移的显著改变,而且正的电势产生拉应力和伸长变形,负的电势产生压应力和缩短变形。根据这个规律可以按照实际控制的要求施加合适方向的电势,从而达到对被控制结构减振或激振的目的。

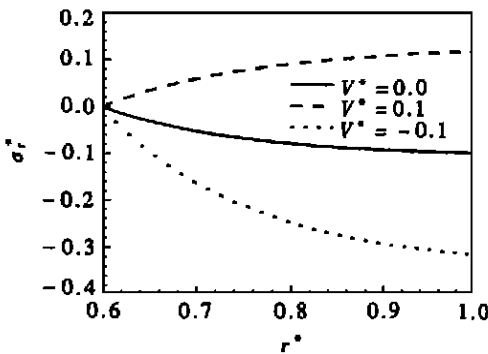


图6 不同外加电势情况下弹性层径向应力的分布

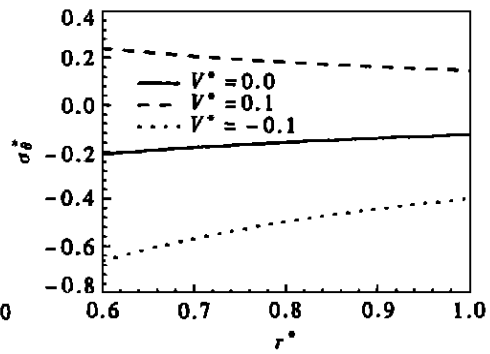


图7 不同外加电势情况下弹性层周向应力的分布

图8、图9表示激励层在有、无外加电势的情况下,电势沿激励层和感应层的厚度方向的分布规律。图中可以看出电势的分布几乎是线性的,这个规律可以应用于复杂结构的压电控制的近似理论中。

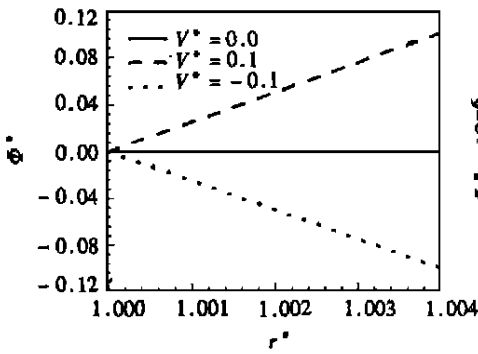


图8 不同外加电势情况下  
激励层的电势分布

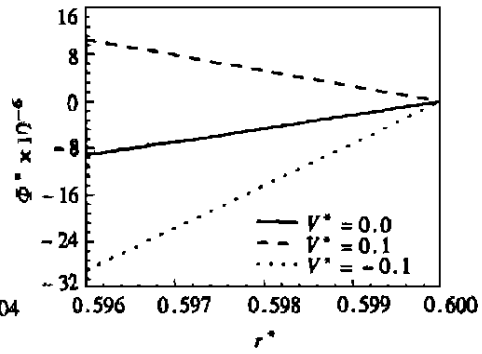


图9 不同外加电势情况下  
感应层的电势分布

## 5 结 论

本文利用弹性理论对压电球壳球对称稳态响应问题进行了研究,给出了外激励下相应的应力、位移和电势分布的通解。该结果对于理解压电材料在动力条件下的机电耦合效应十分有益,并给压电智能结构的球对称动力控制问题提供良好的理论依据,为进一步进行一般性的空间动力控制问题的研究提供参考。

### [参 考 文 献]

- [1] Tani J, Takagi T, Qiu J. Intelligent material systems: application of functional materials[J]. Applied Mechanics Reviews, 1998, 51(8): 505—519.
- [2] Chee C Y, Tong L Y, Steven G P. A review on the modelling of piezoelectric sensors and actuators incorporated in intelligent structures[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1998, 9(1): 3—19.
- [3] 李山青,杨耀文,刘正兴. 压电材料在智能结构形状和振动控制中的应用[J]. 力学进展, 1999, 29(1): 66—76.
- [4] Chandrashekara K, Smyser C P. Dynamic modeling and neutral control of composite shells using piezoelectric devices[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1998, 9(1): 29—43.
- [5] Tzou H S, Zhong J P. Electromechanics and vibrations of piezoelectric shell distributed systems[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, ASME, 1993, 115(3): 506—517.
- [6] Wang Z K, Zheng B L. The general solution of three dimensional problems in piezoelectric media [J]. Internat J Solids and Structures, 1995, 32(1): 105—115.
- [7] 王子昆,陈庚超. 压电材料空间轴对称问题的通解及其应用[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(7): 587—598.
- [8] 姚林泉,俞焕然. 压电材料球对称问题的通解[J]. 兰州大学学报(自然科学版): 1998, 34(1): 30—33.
- [9] 孙慷,张福学. 压电学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984.
- [10] Sun J, Norris M, Rossetti D, et al. Distributed piezoelectric actuators for shell interior noise control [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1996, 118(4): 676—681.
- [11] 奚定平. 贝塞尔函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.



- [12] Tzou H S, Tseng C I. Distributed piezoelectric sensor/ actuator design for dynamic measurement/ control of the distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach[J]. J Sound Vibr, 1990, 138(1): 17—34.

## **Spherical Symmetric Steady State Response of Piezoelectric Spherical Shell Under External Excitation**

LI Hong\_yun, LIU Zheng\_xing, LIN Qi\_rong

( Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong  
University, Shanghai 200030, P R China )

**Abstract:** Spherical symmetric steady state response problem of piezoelectric spherical shell in the absence of body force and free charges is discussed. The steady state response solutions of mechanical displacement, stresses, strains, potential and electric displacement were derived from constitutive relations, geometric and motion equations for the piezoelectric medium under external excitation (i. e. applied surface traction and potential) in spherical coordinate system. As an application of the general solutions, the problem of an elastic spherical shell with piezoelectric actuator and sensor layers was solved. The results could provide good theoretical basis for the spherical symmetric dynamic control problem of piezoelectric intelligent structure. Furthermore, the solutions can serve as reference for the research of general dynamic control problem.

**Key words:** piezoelectric material; steady state response; spherical coordinate system; actuator layer; sensor layer