应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0675_04

泛系方法论与幻方构造*

李 粤[1], 李立希[2], 吴学谋[3]

(1. 清华大学 计算机系, 北京 100080; 2. 广东工业大学 计算机系, 广州 510641;
3. 709 研究所, 武昌 430074)

(我刊编委吴学谋来稿)

摘要: 论述了泛系方法论的精缩影模式及其对求解、建模、算法生成与理论建构的作用, 同时用泛系方法提出并证明了: 1. 递归构造 n 阶幻方($n \geqslant 5$) 的方法; 2. 已知 m 阶幻方和 n 阶幻方($m, n \geqslant 3$), 求 mn 阶幻方的公式; 3 已知 m 阶幻方($m \geqslant 3$), 构造 $2m$ 阶幻方的方法•

关 键 词: 泛系方法论; 幻方; 递归
中图分类号: O150.5 文献标识码: A

引 言

泛系百法的一个精缩影是对大约 20 种泛系理论范畴的运筹, 表现为 56 字诀: 表里变变(泛导) 蕴机理, 集散观控生克力, 供求因缘敏应需, 五互八悟三层析, 简化强化运七易, 多源五转巧剪辑, 容悖容憾速次优, 泛系相对理正奇•

它们可以进一步简化为泛系的五互八悟• 这里"泛系"指广义系统、广义关系、广义对称/泛对称或它们的种种复合• "五互"指互联、互转、互导、互生、互克• "八悟"指表里、变变(泛导)、机理、集散、观控、生克、供求、因缘• "五转"指快鸟瞰, 深显微, 精缩影, 优扩形, 巧模拟• "七易"指变易、不易、简易、交易、互易、容易、平易• "泛系相对论"指泛系理论对主客环境中介及它们的五互八悟的相对性的研究• "泛对称"指泛导(或者广义的变变关系或其运转)的广义极取(相当于 $dy/dx \sim 0, \infty$; 广义的极值、驻值或对称), 也指相对的强变/多变、中变、弱变/少变、不变或者不易的五互• 泛对称的五互是更复杂的泛对称•

泛对称与泛对称的五互八悟是简化、强化、建模、规律、求解、优化、显生、运筹、公理系统建构、百科理法形式等等的方法论范畴• 力学、物理与数学不变式理论中的所谓 Noether 型定理揭示了许多事物的本质性规律, 实际上就是某种泛对称的五互• 百科中的高级理法, 特别是林林总总的守恒律的推导大都具有泛对称或泛对称五互的形式• Kalman 滤波算法, 快速 Fourier 算法, 谐波与小波分析方法, 著名的 Noether 定理的推导算法, 能导出几百个数学结果不同逼近模式的转化的算法、几十种应用力学与理性力学的原假设或公理系统的建构与几百种实用的简化算法, 量纲理论的建构, 周期律方法, 典型的一些模式识别算法, 电磁介质动力学等价论十

* 收稿日期: 1999_01_28; 修订日期: 2000_02_23
作者简介: 李粤(1974~), 女, 博士.

多个泛等价定理的形式与推导算法, 生物的遗传与变异的关系, 遗传密码, DNA 的双螺旋结构, DNA、RMA 和蛋白质的相互关系(中心法则: 复制、转录、逆转录、翻译), 河图洛书, 幻方, 八封及其衍生的种种序化模式与有关算法, 分形的本质、结构、机理、技理与算法, 中医的辨证论治模式, 林林总总握简驭繁的运筹技理, 非线性的许多具体研究的大思路以及仿真与建模的诸多技理与算法, 等等都可统一地、方法论地归诸"泛对称或七要的五互八悟"或者"泛系的五互八悟". 有关内容见[1]~[5].

本文用"泛对称的五互八悟"的泛系法来研究一种特殊的、典型的、重要的泛对称——幻方(每行、每列以及两条对角线的和都相等的矩阵——变化之中有所相对的不变)的算法的构造, 提出并证明: 1. 递归构造 n 阶幻方($n\geqslant 5$)的方法; 2. 已知 m 阶幻方和 n 阶幻方($m, n\geqslant 3$), 求 mn 阶幻方的公式; 3. 已知 m 阶幻方($m\geqslant 3$), 构造 $2m$ 阶幻方的方法.

1 递归构造 n 阶幻方($n\geqslant 5$)

记 $\boldsymbol{N}(a, n)=\{1+a, 2+a, \cdots, n+a\}$. 若一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素恰好是连续整数 $\boldsymbol{N}(a-1, n^2)$, $\boldsymbol{FA}: \boldsymbol{N}(0, n)\times\boldsymbol{N}(0, n)\leftarrow\boldsymbol{N}(a-1, n^2)$, $\boldsymbol{FN}$ 为满正反单值, 其每行、每列以及两条对角线的和都相等, 这个矩阵叫做 a_幻方, 记为 $\boldsymbol{A}(a, n)$, 其数值集合记为 $SA(a, n)$, 特别当 $a=1$ 时, 这个矩阵即为 n 阶幻方, 记为 $A(n)$, 其数值集合记为 $S\boldsymbol{A}(n)$. $\boldsymbol{A}(a, n)$ 的元素记为 $\boldsymbol{A}_{ij}(a, n)$, $\boldsymbol{A}(n)$ 的元素记为 $\boldsymbol{A}_{ij}(n)$.

下面介绍递归构造 n 阶幻方($n\geqslant 5$)的方法. 泛系思想: 已知泛对称 $A(n-2)$, 应用"泛对称或七要的五互八悟", 得到泛对称 $\boldsymbol{A}(2n-1, n-2)$, 用数集合 $N(0, n^2)-S\boldsymbol{A}(2n-1, n-2)$ 中的数, 按"泛对称或七要的五互八悟"原则来填写 $A(2n-1, 2n)$ 的外围四边, 使之构成泛对称 $A(n)$, 把泛对称 $\boldsymbol{A}(n)$ 的构造简化为已知泛对称 $\boldsymbol{A}(n-2)$"泛对称或七要的五互八悟"地加边问题. 填边方案有多种. 四边的填写又通过对角对边的一种对应而"泛对称或七要的五互八悟"的简化为两边的填写问题. 而所谓对应实际上是一种泛对称转化: $b\sim b'=n^2+1-b$. (b, b') 在$(0, n^2)$之中近似居中: b 和 b' 以 $n^2/2$ 或者$(n^2+1)/2$ 为中心近似对称.

下面是具体算法. 首先, 我们取:

$$\boldsymbol{A}_{ij}(n)=\boldsymbol{A}_{i-1, j-1}(n-2)+2n-2, \qquad (2\leqslant i\leqslant n-1; 2\leqslant j\leqslant n-1),$$

也就是说, $\boldsymbol{A}(n)$ 去掉第 1 行, 第 n 行, 第 1 列, 第 n 列后得到$\boldsymbol{A}(2n-1, n-2)$. 容易知道, 只要再使 $n\times n$ 矩阵从第 2 行(列)到第 $n-1$ 行(列)首末两数之和, 两对角线两端两数之和都 n^2+1, 而第 1 行(列)、第 n 行(列)各数之和都为 $n(n^2+1)/2$, 便可得到 $A(n)$.

$\boldsymbol{A}(n)$ 比 $A(2n-1, n-2)$ 多出 $\boldsymbol{W}: \{1, 2, \cdots, 2(n-1)\}$ 和 $\{n^2 n^2-1, \cdots, (n-1)^2+2\}$.

定义 b 和 $b'=n^2+1-b$ 为 W 的一组大小数对应数.

令: $\boldsymbol{A}_{1j}(n)=\boldsymbol{A}_{nj}(n)'$; $\boldsymbol{A}_{j1}(n)=\boldsymbol{A}_{jn}(n)'$; $(2\leqslant j\leqslant n-1)$. $\boldsymbol{A}_{11}(n)=\boldsymbol{A}_{nn}(n)'$; $\boldsymbol{A}_{1n}(n)=\boldsymbol{A}_{n1}(n)'$. 以下我们固定取 $\boldsymbol{A}_{11}(n)=n^2$, $\boldsymbol{A}_{nn}(n)=1$.

在 $\boldsymbol{W}$ 中再找出 $2n-2$ 个数填入 $\boldsymbol{A}(n)$ 的第一行和第一列, 使第一行和第一列各数之和都为 $n(n^2+1)/2$. 由上可知这 $2n-2$ 个数除了 $\boldsymbol{A}_{1n}(n)$ 和 $\boldsymbol{A}_{n1}(n)$ 是互为对应数外, 其它各组对应数都只取一个, 所以若第一行和第一列各数之和都为 $n(n^2+1)/2$, 则第 n 行和第 n 列各数之和也都为 $n(n^2+1)/2$, 得到 $\boldsymbol{A}(n)$.

2 由 m 阶幻方和 n 阶幻方构造 mn 阶幻方

泛系思想: 两种泛对称的泛对称组合排列: n^2 个泛对称 $\boldsymbol{A}(m)$ 的平移(转化/五互)$\boldsymbol{A}(m)$

$+[A(n)-1]m^2$, 这种平移本身又有泛对称性 $A(n)$, 而且按泛对称性 $A(n)$ 中间的元素的大小次序来排列, 使之满足 $A(mn)$ 的泛对称要求, 最后形成 $A(mm)$• 泛对称 $A(n)$ 作为宏观布局坐标, 泛对称 $A(m)$ 的相应平移(多种泛对称, 泛对称群本身又具有泛对称性) 作为多种微观布局坐标•

具体算法为

$$A_{mi+j,\ mr+s}(mn)=m^2(A_{i+1,r+1}(n)-1)+A_{js}(m)$$
$$(0\leqslant i;r\leqslant n-1;1\leqslant j;s\leqslant m)•$$

3 偶数阶幻方构造法

泛系思想: 上两种泛系思想的变形应用•

为了构造 $2m$ 阶幻方 $A(2m)$, 首先构造一个 $2m$ 阶矩阵 $M(2m)$, 它的元素都是 1, 2, 3, 4•此矩阵可以分成 m^2 块: $M(2m)=[M_{ij}(2n)](1\leqslant i,j\leqslant m)$• 其中 $M_{ij}(2m)$ 是 2×2 矩阵形式的泛对称, 并且四个元素为 1, 2, 3, 4 四数, 且每行两元素之和为 5• 对矩阵 $M(2m)$, 还要求泛对称条件: 它的每行、每列及两条对角线各数之和都是 $5m$• 这思路雷同前面 $A(mn)$ 大小布局宏微坐标的泛对称式的组合排列•

我们仍用递推法来构造 $M(2m)$, $M(6)$ 和 $M(8)$ 可以直接构造出来• 这里不多说• 下面我们叙述由 $M(2(m-2))$ 构造 $M(2m)$ 的方法, 其泛系思路同前面 n 阶幻方的递归构造 $(A(n-2)\Rightarrow A(n))$•

$M(2m)$ 的中心 $2(m-2)\times2(m-2)$ 矩阵就是 $M(2(m-2))$, 即: $M_{ij}(2m,2m)=M_{i-1,j-1}(2(m-2),2(m-2))$, $(2\leqslant i,j\leqslant m-1)$• 下面我们构造 $M(2m)$ 的四边, 即 $M_{ij}(1\leqslant j\leqslant m)$, $M_{i1}(1\leqslant i\leqslant m)$, $M_{mj}(1\leqslant j\leqslant m)$, $M_{im}(1\leqslant i\leqslant m)$• 令

$$M_{11}=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix},\quad M_{1m}=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix},\quad M_{m1}=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix},\quad M_{mm}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}•$$

任取 $M(2(m-2))$ 的两行 ——第 i 行($i=(i_1,i_2,\cdots,i_{(m-1)})$, $1\leqslant i\leqslant m-2$ 和第 j 行 ($j=(j_1,j_2,\cdots,j_{(m-2)})$, $1\leqslant j\leqslant m-2$ 填入 $M(2m)$ 的第一行和第二行余下的位置•

再把这个第 i 行经过变换后(i_1 与 i_2 交换, i_3 与 i_4 交换), 以此类推) 填入 $M(2m)$ 第 $m-1$ 行, 第 j 行经过同样变换后(j_1 与 j_2 交换, j_3 与 j_4 交换, 以此类推) 填入第 m 行• 这样就构造了 M_{1j} 和 $M_{mj}(1\leqslant j\leqslant m)$• 用雷同方法构造了 M_{i1} 和 $M_{im}(1\leqslant i\leqslant m)$• 容易证明所得矩阵 $M(2m)$ 满足要求•

取一个已知 m 阶幻方 $A(m)$, 作矩阵 $C=[C_{ij}](1\leqslant i,j\leqslant m)$, 其中 C_{ij} 是 2×2 矩阵, 它的元素均是 $A_{ij}(m)-1$• 令 $A(2m)=M(2m)+C$, 容易看出 $A(2m)$ 就是一个 $2m$ 阶幻方, 它是由泛对称 $M(2m)$ 平移成功的, 而平移又雷同大小布局、宏微坐标的泛对称组合排列显生•

[参 考 文 献]

[1] Wu Xuemou, Guo Dinghe. Pansystems theory: A transfield multilayer network_like research[A]. In: General Systems Studies and Applications[C]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 1997, 46~ 65.

[2] Wu Xuemou, Guo Dinghe. Pansystems: methodology and relativity/ from Confucius, Laozi, Descartes to Einstein[A]. In: Systems Science and Its Applications[C]. Tianjin: Tianjin People's

Publishing House, 1998, 1~ 6.

[3] Wu Xuemou. Pansystems investigations on nonlinearity and pansystems cybernetics[A]. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Nonlinear Mechanics[C]. Beijing: Peking University Press, 1993, 920~ 923.

[4] 吴学谋. 泛系: 一种形而泛学的创生[M]. 武汉: 湖北教育出版社, 1998, 1~ 630.

[5] 吴学谋. 泛系理论与数学方法[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1990, 1~ 122.

[6] 夏树人, 孙道杠. 中国古代数学的世界冠军[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

Pansystems Methodology and Construction of Magic Squares

Li Yue[1], Li Lixi[2], Wu Xuemou[3]

(1. Electronic Engineering Department, TsingHua University, Beijing 100084, P R China;

2. Computer Science Department, Guangdong University of Technology Guangzhou 510641, P R China;

3. Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan 430074, P R China)

Abstract: Some patterns of refined epitomes of pansystems methodology were revealed roles and the related of them in problem_solving, modeling, algorithm_generating and theory_constructing were introduced. An important application of pansystems methodology is to give some methods of constructing the typical pansymmetries_magic squares: 1. a method of recursively constructing magic squares of order $n(n \geqslant 5)$; 2. when magic squares of order $m(m \geqslant 3)$ and magic squares of order $n(n⑥ \geqslant 3)$ are given. a formula of obtaining magic squares of order mn; 3. when magic squares of order $m(m \geqslant 3)$ are given, a method of obtaining magic squares of order $2m$.

Key words: pansystems methodology; magic square; recursion