应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0686_07

用 Level Set 算法模拟孤立波与前台阶的相互作用*

谢伟松, 陶建华

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(周恒推荐)

摘要: 进一步研究了 Level Set 方法的数学基础, 研究了求解有自由水面水动力学问题的具体方法• 并在此基础上, 对孤立波与前台阶相互作用这一问题进行了计算及研究, 取得了与实验结果相符合的计算结果•

关 键 词: Level Set 方法; 距离函数; 孤立波; 前台阶
中图分类号: O351.2 文献标识码: A

引 言

Level Set 方法是 Osher 等[1],[2]提出的求解两相流体运动状况的一种新方法, 主要是通过求解整个计算区域内流体所应满足的 N_S 方程, 利用 Level Set 函数来隐式地跟踪两相流动的分界面•

Level Set 函数亦称为距离函数, 记作 $\phi(x, y, t)$, 定义为计算区域中的每一个计算点到两种流体界面的有符号的垂直距离, 当点(x, y) 位于分界面之上(下) 时, $\phi(x, y, t)$ 取为正(负) 值, 而 $\phi(x, y, t) = 0$ 的点则构成两种流体的分界面• 近年来, 许多学者对该方法进行了研究并加以推广和应用, 尤其是关于晶体的树状生长、岩石因表面物质的沉积与被侵蚀而增大或缩小的计算、扩散的气泡、正在下降的水滴和两种具有不同密度的气体的交界面的模拟以及火焰传播的计算, 都获得了较好的结果•

波与结构物的相互作用问题是海岸工程中的一个重要课题, 与海湾中各种结构物的设计和维护具有极其密切的关系• 孤立波在通过台阶时, 由于两者之间的相互作用, 孤立波将发生分裂并生成反射波, 从而对台阶产生冲击力, 是典型的具有自由水面、波与结构物相互作用的水动力学问题• 为了对以上问题有更充分的认识, Maxworthy (1976)[3] 和 Searba_Santos 等 (1987)[4] 进行了实验研究, 对该问题做了定性和定量的研究•

本文采用 Level Set 方法, 模拟了具有自由水面、孤立波与前台阶相互作用的水动力学问

* 收稿日期: 1999_03_01; 修订日期: 2000_03_13
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19772031)
作者简介: 谢伟松(1967~), 男, 汉族, 讲师, 博士, 现工作单位: 天津大学数学系.

题• 这里采用边界元法求解双调和方程[5]来确定距离函数,并利用二阶投影法求解两相流的N_S 方程• 其中,由于密度 ρ和粘性系数ν在自由面处发生间断,将导到方程解的不稳定性,因而需在自由面附近对密度 ρ和粘性系数ν进行适当的光滑处理•

通过与实验结果及曲率作用下长波方程的计算结果[4]相比较,可以看出用 Level Set 方法可以有效地模拟孤立波与前台阶的相互作用问题•

1 Level Set 方法的数学基础

考虑 $\mathbf{R}^2$ 中的一段曲线 AB,为方便起见,我们记之为 $\gamma(0)$• 设该曲线沿法线方向的运动速度为 F,并在时刻 t 运动到曲线 $\gamma(t)$,设 $\gamma(t)$ 上点的坐标为 $\boldsymbol{X}(x,t)=(x(s,t),y(s,t))$, $s\in[0,S]$• 其中 $A(t)$ 点的坐标为 $(x(0,t),y(0,t))$, $B(t)$ 点的坐标为 $(x(S,t),y(S,t))$•显然,t 也可表示为关于 x,y 的函数 $t=f(x,y)$• 从而,可得关于曲线 $\gamma(t)$ 的如下性质:

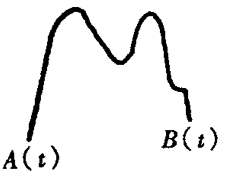

图 1 二维区域上的曲线

性质 1

$$x_t=F\frac{y_s}{(x_s^2+y_s^2)^{1/2}},\quad y_t=-F\frac{x_s}{(x_s^2+y_s^2)^{1/2}},\tag{1}$$

性质 2

$$F^2(f_x^2+f_y^2)=1•\tag{2}$$

现在假设曲线 $\gamma(t)$ 就是我们在计算中给出的自由水面在时刻 t 的位置,则 Level Set 方法所给出的距离函数 $\phi(x,y,t)$ 就是点 (x,y) 到自由水面 $\gamma(t)$ 的有方向的垂直距离,即,

$\phi(x,y,t)=$ 从 (x,y) 到 $\gamma(t)$ 的有方向的垂直距离

并且,当点 (x,y) 位于分界面之上(下)时,$\phi(x,y,t)$ 取为正(负)值,而 $\phi(x,y,t)=0$ 的点则构成两种流体的分界面,即

$$\phi(x,y,t)=0,\qquad (x,y)\in\gamma(t)•\tag{3}$$

于是,如果自由面 $\gamma(t)$ 上质点的速度为 $\boldsymbol{V}=(u,v)$,则有

$$F=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\tag{4}$$

$$\boldsymbol{n}=-\nabla\phi/|\nabla\phi|•\tag{5}$$

由(2)~(5),可以得到

$$\phi_t+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\phi=0•\tag{6}$$

这就是 Level Set 函数 $\phi(x,y,t)$ 在整个流场中满足的运动方程•

2 Level Set 函数的计算

在上节中我们给出了 Level Set 函数 $\phi(x,y,t)$ 所应满足的方程• 但是在计算气泡的扩散等较剧烈的运动时,如果在每一计算步之后都用(6)来重新计算流场中的 ϕ 值,则经过一段时间以后 ϕ 将不再保持为距离函数• 为克服这一缺点,Mark Sussman 等[2] 提出了一种迭代方法来使 η 保持为距离函数• 但是,由于这一方法仅对一些简单的界面比较有效,而当界面形状比较复杂时则会产生计算量大,收敛速度太慢乃至不收敛等情况,因而需要研究一种更合理,

更有效的方法。

本文通过求解双调和方程

$$\Delta^2\phi = 0, \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_\Gamma = 1, \quad \phi|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

给出了距离函数 ϕ, 得到了较好的结果。由于在确定 ϕ 的过程中采用了边界积分方法, 因而具有收敛快, 精度高等优点, 解决了设定Level Set 函数时所遇到的困难[2]。但是该方法只对具有固定边界和分界面的问题进行了计算, 本文将其推广到了具有自由水面问题的求解。

在本文的计算过程中, 我们在初始时刻通过求解(7)给出全场的距离函数, 而在计算的中间时刻, 则利用(6)来计算流场中的 ϕ 值, 由于求解N_S 方程时的时间步长较小, 且水波的波形变化一般不十分剧烈, 因而经过一段时间以后 ϕ 仍然保持为距离函数。

注意到, 在求解具有自由水面的问题时, 计算域中的物质是空气和水的两相流。于是, 求解域内的密度和运动学粘性系数可分别表示为

$$\rho = \begin{cases} \rho_a & (\phi > 0), \\ \dfrac{1}{2}(\rho_a + \rho_w) & (\phi = 0), \\ \rho_w & (\phi < 0), \end{cases} \tag{8}$$

$$\nu = \begin{cases} \nu_a & (\phi > 0), \\ \dfrac{1}{2}(\nu_a + \nu_w) & (\phi = 0), \\ \nu_w & (\phi < 0). \end{cases} \tag{9}$$

但是, 由于水和空气的密度比很大, 如果直接利用(8)式来定义 $\rho(\phi)$, 将在分界面处产生很强的间断, 导致我们所不希望的解的不稳定性。因此要对界面附近的密度作如下光滑处理:

$$\rho = \begin{cases} \rho_a & (\phi > \alpha), \\ \rho_a + \dfrac{\rho_w - \rho_a}{2\alpha}(\alpha - \phi) & (-\alpha \leqslant \phi \leqslant \alpha), \\ \rho_w & (\phi < -\alpha). \end{cases} \tag{10}$$

这样便可保证差分格式的稳定性不致遭到破坏。(这里 α 是一个很小的距离, 在计算中取为1.5~2.5个网格宽度。)

3 控制方程及其解法

本文中, 我们将在包含空气和水在内的整个计算区域内求解如下的N_S 方程

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}, \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{u} = [u, v]^{\mathrm{T}}$, 而 ρ, ν 分别由(10), (9) 所决定。

这里, 我们将采用二阶投影法[6]来求解以上的N_S 方程。其基本思想是: 由Hodge 分解法则, 求解域内的每一个矢量 $\boldsymbol{V}$ 都可唯一地分解为一个散度为零的矢量 $\boldsymbol{q}$ 和一个标量函数 φ 的

梯度，其中在外法线方向为 $\boldsymbol{n}$ 的边界处满足条件 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 具体地

将(11)式的第一个式子进行适当调整，有

$$\boldsymbol{u}_t+\frac{1}{\rho}\nabla\rho=\nu\nabla^2\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}. \tag{12}$$

设在 Hodge 分解中

$$\boldsymbol{V}=\nu\nabla^2\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}_t,\quad \varphi=\frac{1}{\rho}p.$$

如果用 $\boldsymbol{u}^n$ 表示 $t=n\Delta t$ 时刻的速度 $\boldsymbol{u}$，$p^{n+1/2}$ 表示 $t=(n+1/2)\Delta t$ 时刻的压强 p，则由(12)和(11)的第二式给出的问题的半离散格式为：在已知 u^n，$p^{n-1/2}$ 的条件下，求 $\boldsymbol{u}^{n+1}$，$p^{n+1/2}$，使得

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t}+\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1/2}=\nu\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{u}^{n+1}}{2}\right)-[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}]^{n+1/2}, \tag{13}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1}=0. \tag{14}$$

为求解以上问题，下面构造一种迭代格式：记 $\nabla p^{n+1/2}$ 的第 k 次近似为 $\nabla p^{n+1/2,k}$，则定义 $\boldsymbol{u}^{*,k}$，$\boldsymbol{u}^{n+1,k}$ 满足

$$\frac{\boldsymbol{u}^{*,k}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t}+\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1/2,k-1}=\nu\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{u}^{n+1}}{2}\right)-[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}]^{n+1/2}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}^{*,k}=\boldsymbol{u}^{n+1,k}+\frac{1}{\rho}\Delta t\nabla p^{*,k}, \tag{16}$$

$$p^{n+1/2,k}=p^{n-1/2}+p^{*,k}. \tag{17}$$

对以上三式进行迭代求解，即可得到流场内的速度和压力分布，如果当 $k\to\infty$ 时迭代收敛，则 $\boldsymbol{u}^{n+1,k}\to\boldsymbol{u}^{n+1}$，$p^{n+1/2,k}\to p^{n+1}$，在迭代开始时，令 $p^{n+1/2,0}=\begin{cases}p^{n-1/2}, & \text{如果 } n\geqslant 1,\\ 0, & \text{如果 } n=0.\end{cases}$

4 孤立波与前台阶相互作用的数值模拟

为了与 Searba_Santos 等(1987)[4]的实验和 CEILW 方程的数值计算结果(采用隐式有限差分法求解曲率作用下的长波方程)进行比较，本文的所有数据都与[4]相一致. 如图 2 所示，取孤立波波幅 $A=3.65$ cm，台阶前水深 $H=20$ cm，台阶高 $H_s=10$ cm，孤立波起始于台阶前方 3 m，即 $x=12$ m 处，计算区域为矩形域 $OBFE$，其中 $OB=30$ m，$OG=15$ m，$OC=20$ cm，$OE=40$ cm，初始时刻的形状、速度和压力分布按其通用的形式[7]给出.

在固壁 OG 上及台阶表面提粘性边界条件：

$$\boldsymbol{u}=0. \tag{18}$$

在上表面 EF 上提滑移边界条件：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=0. \tag{19}$$

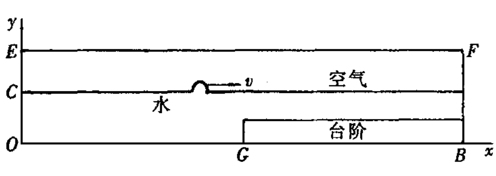

图 2 孤立波与前台阶的相互作用问题示意图

而进流边界 OE 及出流边界 BF 处采用如下的平行流边界条件：

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{BF,\,OE}=0. \tag{20}$$

图 3 给出了 $t=0.0$s 至 $t=10.8$s 之间自由面形状的演化过程图，由图中可以看出，随着孤立波的向前传播，用 Level Set 方法求得的孤立波的传播波面与实验结果基本吻合，反映了

Level set 方法求解实际问题的有效性• 从图中可以看到, 随着孤立波向台阶方向传播, 在台阶前沿上方, 孤立波波幅增大, 之后在台阶的上面, 由于台阶的作用, 孤立波发生了分裂• 继

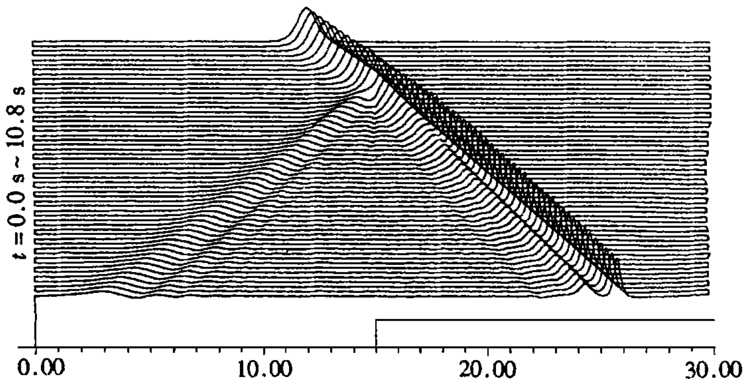

图 3　孤立波的波面演化示意图

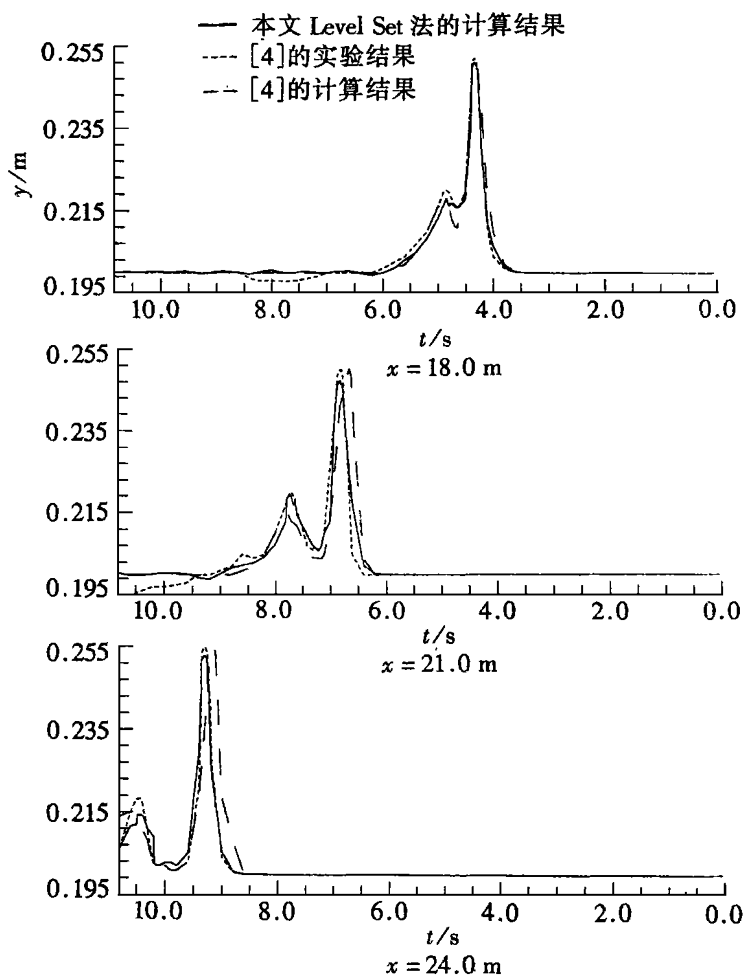

图 4　不同位置 x 处的波面时间历程图

续向前传播的孤立波主波波幅基本保持了一定的高度,同时波宽度变窄并仅随其后产生了一个波幅较小的子波,以及子波后面的一系列波幅极小的色散波;另外,因台阶的作用产生了向后传播的反射波,反射波的波幅较小,其后也尾随着一系列的小波幅色散波• 这些现象与[4]的实验结果基本一致•

图4是针对不同的位置 x 给出的波面时间历程图,其上、下两部分分别反映了反射波和孤立波主波及其子波的传播过程• 其中实线为本文的计算结果,短虚线为[4]的实验结果,长虚线为[4]中采用CEILW方程的隐式有限差分法的计算结果• 经过对以上结果进行比较可以看到,[4]中的计算结果与实验结果有一个相位差,而本文的计算结果则较好地模拟了真实流动现象•

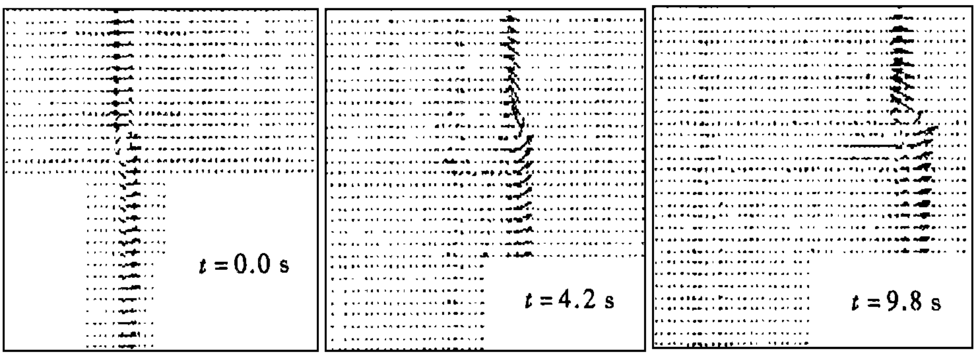

图5 不同时刻的速度场

图5给出了时刻 $t =$ 0.0s, 4.2s, 9.8s 时的速度场• 从图中可见,随着孤立波的传播,在下半部分的水由于台阶的作用其速度沿纵向有所增加,并带动上半部分的空气产生沿相反方向的运动,反映了孤立波运动的传播形式•

5 结 论

本文的计算结果表明:Level set 方法在模拟孤立波与前台阶的相互作用这一计算过程中取得了较好的结果,有效地给出了孤立波的传播过程及其反射波的传播过程,并且给出了与实验资料相符的每一时刻的波面形状和合理的流场速度分布• Level set 方法在处理具有自由水面的水动力学问题,特别是在计算非线性波的传播及演化问题时,具有较大的优势• 此方法可能会成为求解具有自由面的流体流动问题的一种有效的方法•

[参 考 文 献]

[1] Osher S, Sethain J A. Fronts propagating with curvature_dependent speed: algorithms based on Hamilton_Jacobl formulations[J]. J Comp Phys, 1988, **79**(1): 12~ 49.

[2] Sussman M, Smereka D, Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two_phase flow[J]. J Comp Phys, 1994, **114**(1): 146~ 159.

[3] Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves[J]. J Fluid Mech, 1976, **76**: 177~ 185.

[4] Seabra_Santos F J, Penouard D P, Temperville A M. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle[J]. J Fluid Mech, 1987, **176**: 117~ 134.

[5] 祝家麟. 用边界积分方程法解平面双调和方程的 Dirichlet 问题[J]. 计算数学, 1984, **6**(3): 278~ 288.

[6] Bell J B, Colella P, Glaz H M. A second_order projection method for the incompressible Navier_stokes equations[J]. J Comp Phys, 1989, **85**(2): 257~ 283.

[7] 邱大洪. 波浪理论及其在工程上的应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.

Interaction of a Solitary Wave and a Front Step Simulated by Level Set Method

Xie Weisong, Tao Jianhua

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: As a new method, the Level Set method had been developed to compute the interface of two_phase flow. The basic mathematical theory and the detailed method to solve the free surface hydrodynamic problem had been investigated. Then, by using the Level Set method, the transformation of a solitary wave over a front step was simulated. The results are in good agreement with laboratory experiments.

Key words: Level Set method; distance function; solitary wave; front step