应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0701_07

用链式模型讨论圣文南原理*

武建勋

(中国矿业大学 北京校区, 北京 100083)

(钱伟长推荐)

摘要: 用泛函分析的双空间理论为计算力学构造了一个严密的背景理论, 以此在链式模型上讨论圣文南原理, 同时将传统的连分数扩展为算子连分式作为链式模型的本征关系式· 平衡力系的影响在链式模型上由近及远的衰减受算子连分式的收敛性的控制, 所以圣文南原理的合理成分体现为算子连分式的收敛性· 发散的算子连分式对应着平衡力系的明显非零的影响可以传达到无穷远的场合, 所以“圣文南原理”并不是普遍成立的原理·

关 键 词: 圣文南原理; 算子连分式; 链式模型; 双空间; 宏观弹性力学
中图分类号: O34 文献标识码: A

引 言

圣文南原理按Love[1]的意见为: 平衡力系的影响范围不会很大· 此原理是弹性力学理论和实际应用间的桥梁, 但自 1855 年提出以来一直未得到一般证明·

Zanaboni[2], Mises[3], Hoff[4] 作过重要研究· 从 Toupin[5] 以后, 大量理论研究表明该原理在棒, 柱, 楔, 螺旋等特殊形体上是适用的, 著名的有 Horgan[6], Knowles, Sternberg, Naghdi, Synge, Oleinik, Roseman 等, 但弹性力学的一般证明进展缓慢· 本文作者与堤一发现结构力学中最简单的多层建筑可与连分数对应, 发散的连分数对应平衡力系的影响可以传达到无穷远的场合[7], 而后又提出链式模型[8]· 著者将连分数扩展为矩阵连分数, 并发现在计算力学中圣文南原理的合理成分体现为矩阵连分数的纯数学性质[9]· 计算力学属于近似计算, 于是著者又用泛函分析为计算力学配了个严密的背景理论(可叫宏观弹性力学), 在该严密理论中证明该原理的合理成分体现为算子连分式的纯数学性质[10]· 本文系此结果的综述·

1 链式模型

合力与合力矩均为零的平衡力系 f_1 作用于体力初应力热应力均为零的连续连通线弹性物体表面小域 P_1 上· 以一系列互不相交的光滑截面 $P_2, P_3, \cdots, P_n$ 将物体分为 n 段, 各段叫做环节, 各环节相接如链, 叫链式模型(图 1)· P_1 属于第一环节叫始端· 最后的环节上选一片与 P_n 不相交的表面作远端 P_{n+1}, 该远端可是自由的或固定的· P_i 上的面力函数记作 f_i, 变位

* 收稿日期: 1999_06_25; 修订日期: 2000_02_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19072070)
作者简介: 武建勋(1948~), 副教授, 博士.

函数记作 $u_i(i=1,2,\cdots,n+1)$.

总应变能为 U_n. 从 P_{j+1} 处切除该截面以远各环节, 令切开面自由 $(f_{i+1}=\theta)$ 或固定 $(u_{i+1}=\theta)$ 并让 f_1 仍作用于 P_1 上而形成应变能分别记作 U_{f_i}, $U_{r_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 的两个状态. 这里 θ 为零函数. 可以证明一般地有[8]

$$U_{f_1}>U_{f_2}>U_{f_3}>\cdots>U_{f_n}\geqslant U_n, \tag{1}$$

$$U_{r_1}<U_{r_2}<U_{r_3}<\cdots<U_{r_n}\leqslant U_n, \tag{2}$$

今定义

$$W_i=U_{f_i}-U_{r_i}>0\qquad(i=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

显然有

$$W_i>W_{i+1}\qquad(i=1,2,\cdots,n-1), \tag{4}$$

即 W_i 随距离增加而单调递减.

令 $n\to\infty$ 且 n 对应无穷远. 圣文南原理预言当有

$$\lim f_i=\theta, \tag{5}$$

$$\lim u_i=\theta. \tag{6}$$

此时让极远截面自由或固定将不会扰动原状态, 即应有

$$\lim U_{f_i}=\lim U_{r_i}, \tag{7}$$

或

$$\lim W_i=0. \tag{8}$$

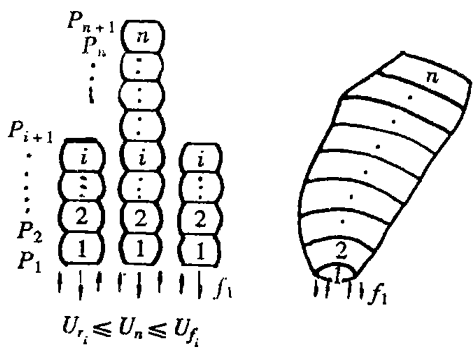

图 1 链式模型

反之, 若式(8)成立, 则要求式(5)和(6)成立, 否则由(1)(2)知必有

$$\lim W_i>0. \tag{9}$$

于是式(8)与式(5)和(6)等价. 式(8)为圣文南原理在链式模型上的表达式.

W_i 趋于零的速度与各环节有关, 但弹性力学缺乏讨论的手段. 文献[9]用结构力学讨论式(8)的成立条件成功. 结构力学不是严密理论, 但可用泛函分析为其造一严密的背景理论如下, 并在此基础上再现文献[9]的结果.

2 静力学的双空间理论

体力初应力热应力均为零的连续连通线弹性物体表面为 Ω. Ω 上可以定义的一切表面力函数 f 或表面变位函数 u 分别构成 Hilbert 空间 E_f 或 E_u. E_f 和 E_u 定义在同一 Ω 上构成双空间体系.

弹性力学的存在唯一性定理保证对任一 $f\in E_f$ 存在唯一的应变场及可能含一未定刚体位移项的表面变位 $u\in E_u$. 由于本课题不关心刚体位移, 可将彼此仅差一刚体位移的诸 u 归并为一类(Class)作为 E_u 中的同一元素, 于是 E_f 和 E_u 之间可建立一一对应. 在泛函分析中就是存在算子或映射 S 使得

$$u=Sf\qquad(f\in E_f,\ u\in E_u), \tag{10}$$

而且 S 有逆算子 $K=S^{-1}$, $KS=SK=I$ 存在使

$$f=Ku\qquad(f\in E_f,\ u\in E_u). \tag{11}$$

本文用 I 记单位算子或恒等算子, V 记投影算子, Θ 记零算子, θ 记零函数· 必要时以下标区别· E_f 和 E_u 中的 I(和 V) 必须是共同的· 对 S(及 S 的子算子) 可定义模 $\|S\|$· S 为线性算子, 因为

$$S(f_1+f_2)=Sf_1+Sf_2 \qquad (f_1,f_2\in E_f), \tag{12}$$

$$S(\alpha f)=\alpha Sf \qquad (f\in E_f,\ \alpha\in R)· \tag{13}$$

在 $E_f\times E_u$ 上定义"伪内积" $\langle x, y\rangle=\int_\Omega xy\,\mathrm{d}s\in R$, $x\in E_f$, $y\in E_u$ 或 $y\in E_f$, $x\in E_u$· 于是有

$$\left.\begin{aligned}&\langle f, u\rangle=\langle u,f\rangle,\\&\langle f_1+f_2, u\rangle=\langle f_1, u\rangle+\langle f_2, u\rangle,\\&\langle \alpha f, u\rangle=\alpha\langle f, u\rangle\\&\langle f, Sf\rangle\geqslant 0 \qquad (\text{等号仅在} f=\theta \text{时有效})·\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由于式(14)最后一式, S 是正定算子· 正定算子可以求逆· 正定算子之和是正定算子· 可将 $\langle f, u\rangle$ 理解为 $f(u)$ 或 $u(f)$, 于是符合泛函分析中的双空间定义·

若对 S 有算子 S^* 存在使得对任意 $f_1,f_2\in E_f$ 有 $\langle f, Sf\rangle=\langle S^*f,f\rangle$, 则 S^* 是 S 的伴随算子· 若 $S^*=S$ 则 S 是自伴随算子· Betti 定理保证 S 是自伴随算子· 又有

$$(AB)^*=B^*A^*, \tag{15}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}· \tag{16}$$

若力函数 f 仅在不相交的小域 Ω_1, Ω_2 上分别取非零值 f_1,f_2, 即 $f=f_1+f_2=V_1f_1+V_2f_2$(这里 V_1, V_2 为投影算子)· 则式(10) 化为

$$u=SV_1f_1+SV_2f_2,$$

上式左乘 V_1, V_2 分别可得

$$u_1=V_1u=(V_1SV_1)f_1+(V_1SV_2)f_2,$$

$$u_2=V_2u=(V_2SV_1)f_1+(V_1SV_2)f_2,$$

即

$$u_1=S_1f_1+S_2f_2, \qquad u_2=S_3f_1+S_4f_2, \tag{17}$$

显然 S_1, S_4 自伴正定, S_2, S_3 互为伴随算子·

泛函分析要求每个计算必须指明所在空间, 著者将该规定改为: 凡有物理意义就可计算, 凡无物理意义就不可计算· 于是算子推演就与矩阵分析十分相似了·

3 算子连分式

将式(17)用于链式模型· 当第 i 环节对第 $i+1$ 环节作用力 f_{i+1} 时, 其本身受反作用力 $-f_{i+1}$, 所以第 i 环节受主动力 f_i, $-f_{i+1}$ 作用· 对每一环节可得

$$u_i=S_1f_i-S_2f_{i+1}, \qquad u_{i+1}=S_3f_i-S_4f_{i+1} \qquad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{18}$$

这里 S_{1i}, S_{4i} 自伴正定, S_{2i}, S_{3i} 互为伴随算子·

将 P_{i+1} 以远各环节看为一个整体, 而且只在 P_{i+1} 上有主动力, 则有下列射影关系

$$u_{i+1}=\mathring{S}_{i+1}f_{i+1} \qquad (i=0, 1, \cdots, n)· \tag{19}$$

从式(18)(19)可得递推式

$$\mathring{S}_i=S_{1i}-S_{2i}(S_{4i}+\mathring{S}_{i+1})^{-1}S_{3i} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)· \tag{20}$$

今定义算子分数如下, 若 A, B, C 为算子, 则

$$AB^{-1}C = \frac{A ⋰ C}{B}. \tag{21}$$

这里分子若为单位算子则可略去• 于是式(20)可改写为

$$\mathring{S}_i = S_{1i} - \frac{S_{2i} ⋰ S_{3i}}{S_{4i} + \mathring{S}_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{22}$$

反复使用式(22)可得算子连分式型的始端柔性算子表达式如下

$$\mathring{S}_1 = S_{11} - \cfrac{S_{21} ⋰ S_{31}}{S_{41} + S_{12} - \cfrac{S_{22} ⋰ S_{32}}{S_{42} + S_{13} - \cfrac{\ddots}{\ddots \cfrac{S_{2n} ⋰ S_{3n}}{S_{4n} + \mathring{S}_{n+1}}}}}. \tag{23}$$

上式是链式模型的本征关系式,不含外力,但若f_1给定,一切f_i, u_i均可由式(23)算出,圣文南原理必然体现为该式的纯数学性质• 该式所占行多,可改写作下列等价形式

$$\mathring{S}_1 = S_{11} - \frac{S_{21} ⋰ S_{31}}{S_{41} + S_{12} -}\ \frac{S_{22} ⋰ S_{32}}{S_{42} + S_{13} -}\ \cdots - \frac{S_{2n} ⋰ S_{3n}}{S_{4n} + \mathring{S}_{n+1}}, \tag{24}$$

这里一些减号写于分母水平以区别于分数相减• 若从链式模型P_{i+1}处切除该截面以远各环节,令切开面自由或固定可得部分链的始端柔性算子${}_{f_i}\mathring{S}_1$, ${}_{r_i}\mathring{S}_1$如下

$${}_{f_i}\mathring{S}_1 = S_{11} - \frac{S_{21} ⋰ S_{31}}{S_{41} + S_{12} -}\ \frac{S_{22} ⋰ S_{32}}{S_{42} + S_{13} -}\ \cdots - \frac{S_{2,i-1} ⋰ S_{3,i-1}}{S_{4,i-1} + S_{1i}}, \tag{25}$$

$${}_{r_i}\mathring{S}_1 = S_{11} - \frac{S_{21} ⋰ S_{31}}{S_{41} + S_{12} -}\ \frac{S_{22} ⋰ S_{32}}{S_{42} + S_{13} -}\ \cdots - \frac{S_{2i} ⋰ S_{3i}}{S_{4i}}. \tag{26}$$

式(24)中正负号相同不便,可化为全正号形式

$$\mathring{S}_1 = C_{11} + \frac{C_{21} ⋰ C_{31}}{C_{41}} + \frac{⋰}{C_{12} +}\ \frac{C_{22} ⋰ C_{32}}{C_{42}} + \cdots + \frac{⋰}{\mathring{S}_{n+1}}, \tag{27}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} &C_{1i} = S_{1i} - S_{2i}S_{4i}^{-1}S_{3i}, \quad C_{2i} = S_{2i}S_{4i}^{-1}, \\ &C_{3i} = S_{4i}^{-1}S_{3i} = C_{2i}^{-1}, \quad C_{4i} = S_{4i}^{-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

限于篇幅,以下不加证明地介绍一些结论• 可与连分数理论或文献[9,10]对照•

定理1 C_{2i}, C_{3i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 可以求逆•

此定理在计算力学中是没有的• 由于

$$AB^{-1}C = (C^{-1}BA^{-1})^{-1}, \tag{29}$$

式(27)可简化为分子全为单位算子的简化算子连分式如下

$$\mathring{S}_1 = A_1 + \frac{⋰}{A_2 +}\ \frac{⋰}{A_3 +}\ \frac{⋰}{A_4 +}\ \cdots + \frac{⋰}{A_{2n+1}} \tag{30}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = C_{11}, \quad A_2 = C_{31}^{-1}C_{41}^{-1}C_{21}^{-1}, \\ &A_3 = C_{21}C_{12}C_{31}, \quad A_4 = C_{31}^{-1}C_{32}^{-1}C_{42}^{-1}C_{22}^{-1}C_{21}^{-1}, \\ &A_5 = C_{21}C_{22}C_{13}C_{32}C_{31}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ &A_{2i} = Z_i^{*-1}C_{4i}Z_i^{-1}, \quad A_{2i+1} = Z_iC_{1,i+1}Z_i^* \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \\ &A_{2n} = Z_n^{*-1}C_{4n}Z_n^{-1}, A_{2n+1} = Z_n\mathring{S}_{n+1}Z_n^*, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$Z_i = \prod_{j=1}^{i} C_{2j} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{32}$$

这里 A_i 一般正定，但 A_{2n+1} 在 P_{n+1} 为自由和固定时分别是无穷算子和零算子．式(30)的各级近似连分式 G_i 为

$$G_i = A_i + \frac{I}{A_2+}\ \frac{I}{A_3+}\ \frac{I}{A_4+}\ \cdots \frac{I}{+A_i} \qquad (i = 2, 3, \cdots, 2n+1) \tag{33}$$

$$ {}_{f}\overset{\circ}{S}{}_{1}^{i} = G_{2i},\ {}_{r}\overset{\circ}{S}{}_{1}^{i} = G_{2i-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{34}$$

$$\overset{\circ}{S}_1 = G_{2n+1}. \tag{35}$$

4 算子连分式的收敛性

引入下列辅助算子

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 = I, \quad P'_1 = A_1, \\ &Q_2 = A_2, \quad P'_2 = A_2A_1 + I, \\ &Q_i = A_iQ_{i-1} + Q_{i-2}, \quad P'_i = A_iP'_{i-1} + P'_{i-2}, \ (i = 3, 4, \cdots, 2n+1). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

则有

定理 2　$G_i = Q_i^{-1}P'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2n+1))$．　(37)

定义：　$B_i = (-1)^i(G_i - G_{i-1}) \qquad (i = 2, 3, \cdots, 2n-1)$　(38)

则有

定理 3　$B_i = (Q^*_{i-1}Q_i)^{-1} \qquad (i = 2, 3, \cdots, 2n+1)$　(39)

这里 B_i 常自伴正定，但 P_{n+1} 自由时 $B_{2n+1} = \Theta$．

由式(38)马上可得

$$\begin{aligned} G_i &= G_1 + (G_2 - G_1) + (G_3 - G_2) + \cdots + (G_i - G_{i-1}) = \\ &A_1 + B_2 - B_3 + B_4 - \cdots + (-1)^iB_i = \\ &A_1 + \sum_{j=2}^{i}(-1)^jB_j \qquad (i = 2, 3, \cdots, 2n+1). \end{aligned} \tag{40}$$

定义：　若 A, B, C 均为正定算子，$A = B + C$，则称 A 大于 B 或 B 小于 A，记作 $A > B$ 或 $B < A$．

并非任意两个算子都可比大小，所以这是半序空间．A 正定可记作 $A > \Theta$．

定理 4　若 $A > B > \Theta$，则 $A^{-1} < B^{-1}$．

推论 1　$B_i > B_{i+1} \qquad (i = 2, 3, \cdots, 2n+1)$．　(41)

但当 P_{n+1} 固定时 $B_{2n} = B_{2n+1}$ 是唯一例外．

推论 2　$G_1 < G_3 < G_5 < \cdots < G_{2n-1} \leqslant G_{2n+1} = \overset{\circ}{S}$　(42)

$$G_2 < G_4 < G_6 < \cdots < G_{2n} \geqslant G_{2n+1} = \overset{\circ}{S}_1, \tag{43}$$

今令 $n \to \infty$，则奇次或偶次的 G_1 将形成单调有界的算子无穷系列．

定理 5　单调有界的算子无穷系列有弱极限．

因为 $G_{2i} - G_{2i-1} = B_{2i} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$　(44)

等式两侧取弱极限知

$$\lim B_{2i} = \Theta \tag{45}$$

$$\lim G_{2i} = \lim G_{2i-1} \tag{46}$$

是等价的• 此时算子无穷连分式有确定的极限,称为收敛的• 反之若

$$\lim B_{2i} > \Theta \tag{47}$$

$$\lim G_{2i} > \lim G_{2i-1}, \tag{48}$$

则算子无穷连分式无确定的极限,称为发散的• 有发散判据如下

定理 6 若 $\sum_{i=2}^{\infty} \|A_i\| < \infty$ 则算子无穷连分式发散•

5 圣文南原理

链式模型上的圣文南原理表示为式(7)• 注意到 $f_1 \neq \theta$ 且

$$\left.\begin{aligned} &U_n = 0.5\langle f_1, \mathring{S}_1 f_1\rangle, \quad U_{f_i} = 0.5\langle f_1, G_2 f_1\rangle, \\ &U_n = 0.5\langle f_1, G_{2i-1} f_1\rangle, \quad W_i = U_{f_i} - U_{r_i} = 0.5\langle f_1, B_2 f_1\rangle \quad (i = 1, 2, \cdots)\bullet \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

则式(45)与式(7)等价,式(42)和(43)与式(1)和(2)等价• 由于定理 6, 圣文南原理不成立的场合客观存在,所以该原理并不是"普遍原理"•

实际中没有无穷远,可将"收敛性"理解为 B_{2i} 随 i 的增加而趋近于零算子的程度,则"收敛性"也可用于有限环节• 以下是两个收敛判据:

定理 7 若环节数足够多而且所有的环节都相同,则算子连分式的收敛不慢于某一对于环节数 i 的指数衰减,或对于距离的指数衰减•

定理 8 若环节数足够多而且所有的环节形状都相似且相似比相同,则算子连分式的收敛不慢于某一对于环节数 i 的指数衰减,或对于距离的幂次衰减•

定理 7 适用于杆,柱,螺旋,高层建筑的场合• 定理 8 适用于半空间,半平面,楔,角锥体的场合• 定理 8 并揭示指数衰减与幂次衰减的内在联系•

6 结 论

用泛函分析的双空间理论可为计算力学构造一个严密的背景理论,建议叫作宏观弹性力学• 在宏观弹性力学中链式模型的本征关系式是算子连分式• 平衡力系的影响在链式模型上由近及远的间断衰减受算子连分式的收敛性的控制,所以圣文南原理的合理成分体现为算子连分式的收敛性• 算子连分式的收敛可快可慢可发散• 发散的算子连分式对应着平衡力系的明显非零的影响可以传到无穷远的场合,所以"圣文南原理"并不是普遍成立的原理• 该原理的适用性可通过对应的算子连分式的收敛性予以把握•

[参 考 文 献]

[1] Love A E H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity[M]. 4th ed. Cambridgeat: the University Press, 1934, 131~ 132.

[2] Zanaboni N O. Dimmestrazione generacle der principio del De Saint_Venant[J]. Atti Accad Lincei, 1937, **25**: 117~ 121.

[3] Mises R V. On Saint_Venant' s principle[J]. Bull Amer Math Soc, 1945, **51**: 555~ 562.

[4] Hoff N J. The applicability of Saint_Venant' s principle to airplane structure[J]. J Aero Sci, 1945, **12**: 455~ 460.

[5] Toupin R A. Saint_Venant' s principle[J]. Arch Rational Meth Anal, 1965, **18**: 83~ 96.

[6] Horgan C O, Knoeles J K. Recent development concerning Saint_Venant' s principle[J]. Advances

in Applied Mechanics, 1983, **23**: 179~ 269.
[7] 武建勋, 堤一. A paradox on Saint_Venant's principle in discrete structure (AIJ Japan) [J]. Jour Stru Cons Engi, 1987, **374**: 57~ 62.
[8] 武建勋, 堤一. 关于圣文南原理的证明问题[J]. 固体力学学报, 1990, **11**(2): 148~ 158.
[9] 武建勋. 计算力学中的静力衰减[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(4): 321~ 330.
[10] 武建勋. 圣文南原理与算子连分式[J]. 工程力学(增刊), 1993, 254~ 259.

Consider Saint_Venant's Principle by Means of Chain Model

Wu Jianxun
(China University of Mining &Technology (Beijing Campus),
Beijing 100083, P R China)

Abstract: A precise background theory of computational mechanics is formed. Saint_Venant's principle is discussed in chain model by means of this precise theory. The classical continued fraction is developed into operator continued fraction to be the constrictive formulation of the chain model. The decay of effect of a self_equilibrated system of forces in chain model is decided by the convergence of operator continued fraction, so the reasonable part of Saint_Venant's principle is described as the convergence of operator continued fraction. In case of divergence the effect of a self_equilibrated system of forces may be non_zero at even infinite distant sections, so Saint_Venant's principle is not a common principle.

Key words: Saint_Venant's principle; operator continued fraction; chain model; duel spaces; macro_elasticity theory