应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0721_11

凑合反推法和弹性理论中的多变量广义变分原理*

何吉欢

(上海大学; 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(赵兴华推荐)

摘要: 详细介绍了如何应用凑合反推法(semi_inverse method) 构造弹性理论中的两类独立变量的广义变分原理(包括熟知的 Hellinger_Reissner 变分原理,Hu_Washizu 变分原理) 及三类独立变量的广义变分原理(钱伟长广义变分原理)• 应用凑合反推法还可以清楚地看出各变量之间的约束关系, 从而再一次证明了 Hu_Washizu 变分原理实际上是两类独立变量的广义变分原理•

关 键 词: 弹性力学变分原理; 钱伟长广义变分原理; 胡_鹫原理; 凑合反推法; 试泛函; 临界变分

中图分类号: O176; O343 文献标识码: A

引 言

拉氏乘子法无论是在建立固体力学广义变分原理, 还是在构造流体力学广义变分原理过程中, 都起着非常重要的作用• 1954 年胡海昌教授首次应用试凑法推导得到了 Hu_Washizu 变分原理[1, 2]; 1964 年钱伟长教授系统地论述了拉氏乘子法, 并应用拉氏乘子法推导得到了 Hu_Washizu 变分原理[3], 从而使得推导广义变分原理从盲目走向科学• 1983 年钱伟长教授第一次发现了 Hu_Washizu 变分原理并非是三类独立变量的广义变分原理, 而只是一个二类独立变量的变分原理, 应力应变关系依旧是变分约束条件[4, 5]• 这一发现导致了高阶拉氏乘子法的诞生• 1990 年刘高联教授系统地阐述了流体力学变分原理建立及变换的系统途径[6]•

凑合反推法是胡海昌的试凑法、钱伟长的权余法和刘高联的系统方法的进一步综合与发展[7- 12]• 这种方法没有应用拉氏乘子, 可以方便地构造出各种多变量广义变分原理, 并且不会出现临界变分现象• 其实质就是选择一个带有待定函数 F 的具有能量形式的多变量的能量试泛函(energy trial_functional) , 让试泛函取驻值, 再根据已知的场方程或约束方程, 可以非常方便地识别待定函数•

作者在这里想另辟新径, 在胡海昌的试凑法、钱伟长的权余法和刘高联的系统方法的基础上, 引进一个新的方法——凑合反推法, 来推导有关的多变量的广义变分原理•

* 收稿日期: 1999_10_20; 修订日期: 2000_01_30
基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020318)
作者简介: 何吉欢(1965~) , 博士, 纽约科学院士, 乌克兰科学院名誉教授, 主要研究方向: 变分原理和非线性分析, 已发表论文 80 多篇.

1 临界变分及凑合反推法的基本思想

1.1 临界变分现象

凑合反推法(Semi_inverse method)[7~12]是作者在不断的实践过程中摸索出来的一种行之有效的方法,是胡海昌的试凑法、钱伟长的权余法和刘高联的系统方法的进一步综合和发展• 这一思想来自于下面要讲述的临界变分现象,为了让读者了解作者的思想过程,有必要在这里用一定的篇幅介绍•

我们在应用文献[6]建立流体力学广义变分原理时,常常会遇到各种临界变分现象[13~15],即当我们应用拉氏乘子法消除约束以求得广义变分原理时,我们却发现拉氏乘子为零的现象,这叫做第一类临界变分;或识别拉氏乘子后,泛函取驻值,我们只能得到部分欧拉方程,这一现象称之为第二类临界变分• 钱伟长教授首次应用高阶拉氏乘子法,消除了临界变分现象[4,5],刘高联教授应用预处理拉氏乘子等方法解决了流体力学中的临界变分现象[13],何吉欢则应用凑合反推法成功地消除了流体力学中的临界变分现象[14]和弹性力学中临界变分现象[15]•

下面先给出这个非常有趣的临界变分现象• 为了说明其普遍性,设流体力学的控制方程具有下面守恒形式:

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial D}{\partial y}=0, \tag{2}$$

其中 A, B, C, D 为流场参数(如压力、速度及密度)的函数•

由方程(1)和(2)定义二通用函数 Ψ 和 Φ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}=B, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y}=-A• \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=D, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=C• \tag{4}$$

于是方程(1)、(2)式自动满足

作者在应用刘高联系统方法的第二条路线,即反推拉氏乘子法建立流体力学广义变分原理时,得到了下面非常有趣的临介变分:

$$J(\Phi, \Psi)=\iint\{\Phi, \Psi\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5}$$

式中 $\{\Phi, \Psi\}$ 为Poisson括号[16]:

$$\{\Phi, \Psi\}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}• \tag{6}$$

这就是第二类临界变分,泛函取驻值,得不到任何欧拉方程• 但是作者发现Poisson括号在物理面(非映像平面)上具有能量形式,这给作者很大的启发• 这是因为,无论是流体力学变分原理,还时固体力学变分原理,泛函总具有能量形式• 因此有望对(5)式作适当的改造,从而构造出多变量的广义变分原理• 为此我们构造这样一个试泛函J(Trial_Functional):如把变量 Ψ 用另外二变量 A, B 来代替,并让 A, B 独立变分,再在泛函中加一待定函数 F• 这样就构成了凑合反推法的基本方法:

$$J(\Phi, A, B)=\iint\left(A\frac{\partial \Phi}{\partial x}+B\frac{\partial \Phi}{\partial y}+F\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y• \tag{7}$$

式中,F 是待定函数,它应是 A 和 B 的函数• 我们称带有待定函数 F 的泛函(7)式为试泛函

(trial_functional), 试泛函在物理平面上往往具有能量形式, 所以也常常称之为能量试泛函(energy trial_functional)•

很显然 $\delta\Phi$ 对应的欧拉方程就是(1)式• 因此我们的工作只需确定待定函数即可, 从而大大减少了工作量•

我们也可以从钱伟长的权余法和刘高联的反推法来引出这一基本思想• 如选 Φ 为权函数, 假如存在一泛函 J, 使下式成立:

$$\delta J(\Phi) = \iint\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\delta\Phi \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y• \tag{8}$$

应用分部积分可得:

$$J(\Phi) = -\iint\left[A\frac{\partial}{\partial x}(\delta\Phi) + B\frac{\partial}{\partial y}(\delta\Phi)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}I_b• \tag{9}$$

式中 δI_b 为积分边界项•

如果 A, B 为限制变量, 这可得以下“限制变分”泛函:

$$J(\Phi) = \iint\left(A\frac{\partial\Phi}{\partial x} + B\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{10}$$

式中, A, B 为限制变量[17]•

上述变分原理其实是没有任何意义的, 这是因为变量 A, B 不可能和变量 Φ 不相关• 然而如果我们让 A, B 独立变分, 则很显然 $\delta\Phi$ 对应的欧拉方程就是(1)式, 从而避免了由于反推法或权余法造成的困难• 因此只要对(10)作适当的修正, 便可得到(7)式•

上面阐述的是凑合反推法的最基本方法, 现已发展成一系统的方法, 它由以下三条路线组成:

1.2 第一条路线——从偏微分方程及边界条件出发构造多变量的广义变分原理

为了说明问题, 我们以流体力学中最简单的不可压无旋运动为例说明凑合反推法的基本思想• 不可压无旋运动的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = v• \tag{12a, b}$$

边界条件:

进口 Γ_{in}: $\quad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = q_0$, $\quad$ (13)

出口 Γ_{out}: $\quad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = q_1$, $\quad$ (14)

式中 $\boldsymbol{q} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$• 如我们希望建立以 Φ, u, v 为独立变量的多变量的广义变分原理• 为此我们这样构造试泛函: 变量 Φ 乘于(11)式, 然后分部积分, 再加一待定函数 F, 在边界上也可以用待定函数 G 和 H 表示:

$$J(\Phi, u, v) = \iint\left\{u\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + F\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} G\,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} H\,\mathrm{d}S• \tag{15}$$

由 $\delta J = 0$, 可得以下欧拉方程:

$$\delta\Phi: \quad -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\Phi} = 0, \tag{16}$$

$$\delta u: \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \tag{17}$$

$$\delta v: \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0• \tag{18}$$

上述三式对应于试泛函(15)的三个欧拉方程(11)及(12a, b)• 把(11)及(12a, b)式先作条件使用(这就是反推法),上述三式可进一步化简为:

$$F_\Phi = 0, \tag{19}$$

$$F_u = -u, \tag{20}$$

$$F_v = -v. \tag{21}$$

由(19)~(21)式可方便地识别 F 得:

$$F = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = -\frac{1}{2}q^2. \tag{22}$$

在边界上应用 Green 公式也可以用同样方法识别待定函数 G 和 H:

在进口处:

$$\delta\Phi: \quad \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} + G_\Phi = 0. \tag{23}$$

上式对应于进口处的边界条件,应用(13)式可得:

$$G_\Phi = -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = -q_0, \tag{24}$$

从而可识别 G 得:

$$G = -q_0\Phi. \tag{25}$$

同理可识别 H 得:

$$H = -q_1\Phi. \tag{26}$$

从而得以下广义变分原理:

$$J(\Phi, u, v) = \iint\left\{u\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{1}{2}q^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} q_0\Phi\mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} q_1\Phi\mathrm{d}S. \tag{27}$$

1.3 第二条路线——从已知的变分原理构造多变量的广义变分原理

我们也可以从单变量的变分原理出法,构造多变量的广义变分原理• 设已知一变分原理如下:

$$J(\Phi) = \iint(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{28}$$

其欧拉方程为:

$$\nabla^2\Phi = 0. \tag{29}$$

现引入对合变换[15]:

$$\Phi_x = p, \quad \Phi_y = q. \tag{30a, b}$$

把 p, q 看成独立变量,应用凑合反推法,来构造其相应的多变量广义变分原理:

$$J(\Phi, p, q) = \iint(p\Phi_x + q\Phi_y + F)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{31}$$

由 $\delta J = 0$,并假设方程(29)及(30a, b)是试泛函(31)的欧拉方程,于是可得:

$$\delta\Phi: F_\Phi = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \tag{32}$$

$$\delta p: F_p = -\Phi_x = -p, \tag{33}$$

$$\delta q: F_q = -\Phi_y = -q. \tag{34}$$

从而可识别 F 得:

$$F = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2). \tag{35}$$

从而得以下的多变量广义变分原理(边界项处理同上,这里略):

$$J(\Phi, p, q) = \iint\left\{p\Phi_x + q\Phi_y - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{36}$$

上述泛函和文献[18]用拉氏乘子法得到的结果是一致的•

1.4 第三条路线——从任意的能量积分构造多变量的广义变分原理

第三条路线是任意构造一具有能量形式的积分作为试泛函,如对于不可压无旋流,任意构造一个能量积分:

$$J(\Phi, u, v) = \iint\left\{u\Phi_x + F(\Phi, u, v)\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cdot \tag{37}$$

容易证明试泛函(37)具有能量形式•

令 $\delta J = 0$, 并假设方程(11)和(12a)是试泛函的欧拉方程,从而可得:

$$\delta\Phi: F_\Phi = u_x = -v_y, \tag{38}$$

$$\delta u: F_u = -\Phi_x = -u \cdot \tag{39}$$

根据上二式,我们可以初步识别待定函数 F:

$$F = -\frac{1}{2}u^2 - \Phi v_y + f(v) \cdot \tag{40}$$

式中 f 是新的待定函数,它是 v 的函数,把上式代入(37)式,并分部积分可得到一新的试泛函:

$$J(\Phi, u, v) = \iint\left\{-\frac{1}{2}u^2 + u\Phi_x + v\Phi_y + f(v)\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cdot \tag{41}$$

令上述新的试泛函取驻值,再假设方程(12b)是其欧拉方程,从而可得:

$$\delta v: f_v = -\Phi_y = -v \cdot \tag{42}$$

积分上式可得:

$$f = -\frac{1}{2}v^2 \cdot \tag{43}$$

把上式代到(41)式即得泛函(27)式•

2 弹性力学中的基本方程[5]

1) 平衡方程:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (\text{在 } \tau \text{ 内}) \cdot \tag{44}$$

其中 σ_{ij} 为应力, $\sigma_{ij,j} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, f_i 为体力, τ 为弹性体的体积•

2) 应力应变关系:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}e_{kl} \quad (\text{在 } \tau \text{ 内}), \tag{45a}$$

或

$$e_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (\text{在 } \tau \text{ 内}), \tag{45b}$$

其中 e_{ij} 为应变, a_{ijkl}, b_{ijkl} 分别表示弹性常数和柔性常数•

3) 应变位移方程:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } \tau \text{ 内}) \cdot \tag{46}$$

4) 位移已知边界:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 内}) \cdot \tag{47}$$

5) 外力已知边界:

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \quad (\text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 内}) \cdot \tag{48}$$

其中 Γ_u, Γ_σ 表示位移已知和外力已知边界,设总边界为 Γ, 则:

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma. \tag{49}$$

设 A 表示应变能, B 表示余能, 则:

$$A = \int_0^e \sigma_{ij} \mathrm{d} e_{ij} \text{ 或 } \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}, \tag{45c}$$

$$B = \int_0^\sigma e_{ij} \mathrm{d} \sigma_{ij} \text{ 或 } \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}. \tag{45d}$$

并且有:

$$A + B = e_{ij}\sigma_{ij}. \tag{50}$$

3 应用凑合反推法建立弹性理论中的多变量广义变分原理

3.1 第一条路线——从偏微分方程及边界条件出发构造多变量广义变分原理

1) 二变量 (σ_{ij}, u_i) 亚广义变分原理——Hellinger_Reissner 变分原理

试泛函的构造方法台下: 选 u_i 为独立变量乘于方程(44), 并分部积分, 再加一待定函数 F 得:

$$J(\sigma_{ij}, u_i) = \iiint (\sigma_{ij} u_{i,j} - f_i u_i + F) \mathrm{d}\tau + \iint_{\Gamma_u} G \mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_\sigma} H \mathrm{d}S, \tag{51}$$

式中 F, G, H 为待定函数, 它们是 σ_{ij}, u_i 的函数.

由 $\delta J = 0$, 可得以下欧拉方程:

$$\delta u_i: \quad -\sigma_{ij,j} - f_i + \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0, \tag{52}$$

$$\delta \sigma_{ij}: \quad \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \tag{53}$$

上述二式对应于试泛函(51) 的二个欧拉方程, 假设试泛函的欧拉方程为方程(44) 和(46) 式, 于是可得:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0, \tag{54}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = - e_{ij}. \tag{55}$$

反应力应变关系式(45d) 作为其变分约束条件, 从而识别 F 得:

$$F = - B \tag{56}$$

在边界 Γ_u 上(应用 Green 公式):

$$\delta u_i: \quad \sigma_{ij} n_j + \frac{\partial G}{\partial u_i} = 0. \tag{57}$$

初步识别 G 得:

$$G = - \sigma_{ij} n_j u_i + G_1. \tag{58}$$

其中 G_1 为待定函数.

$$\delta \sigma_{ij}: \quad \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = - u_i n_j + \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \tag{59}$$

应用(47) 式得:

$$\frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{ij}} = u_i n_j = \bar{u}_i n_j, \tag{60}$$

从而得:

$$G_1 = \bar{u}_i n_j \sigma_{ij}. \tag{61}$$

同理在边界 Γ_σ 上:

$$\delta u_i: \quad \frac{\partial H}{\partial u_i} = - \sigma_{ij} n_j = - p_i \cdot \tag{62}$$

$$\delta \sigma_{ij}: \quad \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \cdot \tag{63}$$

识别 H 得:

$$H = - p_i u_i \cdot \tag{64}$$

从而得以下多变量广义变分原理:

$$J(\sigma_{ij}, u_i) = \iiint (\sigma_{ij} u_{i,j} - f_i u_i - B) \mathrm{d}\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - u_i) \mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_\sigma} p_i u_i \mathrm{d}S \cdot \tag{65}$$

分部积分后,即变成Hellinger_Reissner变分原理· 很显然我们在反推过程中,应用了应力应变关系式(45d)式,而在泛函(65)式中,我们不能直接导出该式,所以(45d)式是变分约束条件·

2) 二变量 (e_{ij}, u_i) 广义变分原理, Hu_Washizu变分原理及其约束条件

现在我们来建立以 σ_{ij}, e_{ij}, u_i 为独立变量的广义变分原理,充试泛函具有以下形式:

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint \left\{ - \sigma_{ij} \left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) + F \right\} \mathrm{d}\tau + \iint_{\Gamma_u} G \mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_\sigma} H \mathrm{d}S \tag{66}$$

由 $\delta J = 0$, 可得以下欧拉方程:

$$\delta \sigma_{ij}: \quad - e_{ij} + \frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \cdot \tag{67}$$

注意到 $\sigma_{ij,j} = \sigma_{ji,i}$, 我们有:

$$\delta u_i: \quad - \sigma_{ij,j} + \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \cdot \tag{68}$$

把方程(46)及(44)式作为试泛函(66)的欧拉方程,从而由(67)和(68)式可得:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \tag{69}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = - f_i \cdot \tag{70}$$

从而可初步识别 F 得:

$$F(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = - f_i u_i + F_1(e_{ij}) \cdot \tag{71}$$

其中 F_1 为待定函数,它应是 e_{ij} 的函数· 把上式代到(66)式可得一更新的试泛函,再令新的试泛函取驻值可得以下欧拉方程:

$$\delta e_{ij}: \quad \frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{ij}) \cdot \tag{72}$$

识别 F_1 得:

$$F_1 = \int \sigma_{ij}(e_{ij}) \mathrm{d}e, \tag{73}$$

或

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}} \cdot \tag{74}$$

边界上的处理方式同上, 于是得以下变分原理•

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{F_1 - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\} d\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS - \iint_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \cdot \tag{75}$$

这就是三类独立变量的广义变分原理, 但它不能用显式的形式表示出来• (74) 式代入泛函 (75) 式, 我们可以得到以下二类独立变量的广义变分原理:

$$J(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\} d\tau - \iint_{\Gamma_u} \frac{\partial F_1}{\partial e_{ij}} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS - \iint_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \cdot \tag{76}$$

这就是文献[5] 中的(3.30) 式• 现引进一变分约束条件(45c) 式, 则可识别 $F_1 = A$, 从而上述泛函转化为Hu_Washizu 变分原理• 所以说Hu_Washizu 变分原理实质上是一个二类变量(e_{ij}, u_i)的广义变分原理(这和钱伟长教授得到的结果完全一致):

$$J(e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{A - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) - f_i u_i\right\} d\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS - \iint_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \cdot \tag{77}$$

它以(45c) 式为变分约束条件•

有意思的是如果把Hu_Washizu 变分原理中的 σ_{ij}, e_{ij}, u_i 看成是独立变量, 泛函取驻值能得到所有的欧拉方程及边界条件((44) ~ (48) 式) , 但这完全是巧合, 绝不能因此认为Hu_Washizu 变分原理是三类独立变量的广义变分原理• 如果Hu_Washizu 变分原理真的是三类独立变量的无约束的广义变分原理, 那么我们可以用代入消除约束的方法, 由Hu_Washizu 原理可推导出二类独立变量的变分原理• 现把应变位移方程作为约束代入(77) 可得最小位能原理(不考虑边界项) • 大家知道最小位能原理是单变量 (u_i) 的变分原理, 而非二类独立变量的变分原理• 这说明 Hu_Washizu 变分原理只能是二类独立变量的变分原理, 其变分约束条件是(45c) 式•

3) 三变量 $(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i)$ 广义变分原理——钱伟长广义变分原理变 I

在这一节里我们将同时选择二个独立变量 u_i 和 e_{ij}, (44) 式和(45c) 式作为对应的欧拉方程, 设试泛函具有以下形式:

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{\sigma_{ij} u_{i,j} - f_i u_i + \lambda(A - e_{ij}\sigma_{ij}) + F\right\} d\tau + \iint_{\Gamma_u} G dS + \iint_{\Gamma_\sigma} H dS, \tag{78}$$

式中 λ 为任意非零常数•

由 $\delta J = 0$, 并假设方程(3.1), (3.2) 及(3.3) 式是试泛函的欧拉方程, 于是可得:

$$\delta u_i: \quad \frac{\partial F}{\partial u_i} = \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \tag{79}$$

$$\delta e_{ij}: \quad \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = -\lambda\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij}\right) = 0, \tag{80}$$

$$\delta \sigma_{ij}: \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda e_{ij} = -(1 - \lambda) e_{ij} \cdot \tag{81}$$

识别 F 得:

$$F = -(1-\lambda)B \cdot \tag{82}$$

边界项的处理方式同上, 于是得以下三变量广义变分原理:

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint \left\{ \sigma_{ij}u_{i,j} - f_iu_i - B + \lambda(A + B - e_{ij}\sigma_{ij}) \right\} d\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij}n_j(u_i - \bar{u}_i)dS - \iint_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_iu_i dS \cdot \tag{83}$$

分部积分后即得钱伟长广义变分原理(即文献[4]中的 $\Pi_{G\lambda}$)•

3.2 第二条路线——从变分原理出发构造多变量广义变分原理

我们可以由最小位能原理或最小余能原理或 Hellinger_Reissner 变分原理等出发构造多变量广义变分原理• 这里以最小位能原理为例, 作一简单的说明• 设试泛函具有以下形式:

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint \left\{ (A - f_iu_i + F \right\} d\tau + \iint_{\Gamma_u} G dS + \iint_{\Gamma_\sigma} H dS \cdot \tag{84}$$

作为更一般的情况, 待定函数可表示为:

$$F = F(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, u_{i,j}, e_{ij,j}, \sigma_{ij,j}), \tag{85}$$

由 $\delta J = 0$, 并假设(44) 式是其欧拉方程, 于是可得:

$$\delta u_i: \quad \frac{\delta F}{\delta u_i} = f_i = -\sigma_{ij,j}, \tag{86}$$

式中

$$\frac{\delta F}{\delta u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \cdot \tag{87}$$

根据(86) 式可初步识别待定函数 F:

$$F = \sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \right) + \lambda e_{ij}\sigma_{ij} + F_1(e_{ij}, \sigma_{ij}, e_{ij,j}, \sigma_{ij,j}) \cdot \tag{88}$$

式中, F_1 为新的待定函数• 很显然上式是符合(86) 式的• 把上式待到试泛函(84) 式可得更新的试泛函, 再令新的试泛函取驻值, 并假设方程(45c) 及(46) 式是其欧拉方程, 从而可得:

$$\delta e_{ij}: \quad \frac{\delta F_1}{\delta e_{ij}} = -\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \lambda\sigma_{ij} = -(1+\lambda)\sigma_{ij}, \tag{89}$$

$$\delta\sigma_{ij}: \quad \frac{\delta FR_1}{\delta\sigma_{ij}} = -\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \lambda e_{ij} = -(1+\lambda)e_{ij} \cdot \tag{90}$$

由(89) 及(90) 式可识别待定函数 F_1:

$$F_1 = -e_{ij}\sigma_{ij} - \lambda(A + B), \tag{91a}$$

或

$$F_1 = -(1+\lambda)(A + B) \cdot \tag{91b}$$

于是可得以下广义变分原理:

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint \left\{ A - \sigma_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i} \right) - f_iu_i + \lambda(A + B - e_{ij}\sigma_{ij}) \right\} d\tau - \iint_{\Gamma_u} \sigma_{ij}n_j(u_i - \bar{u}_i)dS - \iint_{\Gamma_\sigma} u_i\bar{p}_i dS, \tag{92a}$$

或

$$J(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i) = \iiint\left\{B + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - f_i u_i + \lambda(A + B - e_{ij}\sigma_{ij})\right\}\mathrm{d}\tau - \iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S - \iint_{\Gamma_\sigma} u_i\bar{p}_i\mathrm{d}S \tag{92b}$$

上述二式分部积分后即得钱伟长广义变分原理Ⅰ及Ⅱ(即文献[4]中的 $\Pi_{G\lambda}$ 及 $\Pi^{*}_{G\lambda}$)•

4 结 束 语

应用凑合反推法可以十分方便地构造多变量广义变分原理,并且可以避免临界变分• 凑合反推法无论在弹性变分理论,还是流体力学变分理论都将起十分重要的作用•

[参 考 文 献]

[1] 胡海昌. 弹性理论和塑性理论中的一些变分原理[J]. 物理学报, 1954, **10**(3): 259~ 290.

[2] 胡海昌. 弹性理论中的一些变分原理[J]. 中国科学, 1955, **4**(1): 33~ 54.

[3] 钱伟长. 关于弹性力学的广义变分原理及其在板壳问题上的应用[A]. 钱伟长科学论文集[C]. 福州: 福建教育出版社, 1989.

[4] 钱伟长. 高加拉氏乘子法和弹性理论中的更一般的广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1983, **4**(2): 137~ 150.

[5] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 上海: 知识出版社, 1985.

[6] 刘高联. 流体力学变分原理建立与变换的系统性途径[J]. 工程热物理学报, 1990, **11**(2): 136~ 142.

[7] 何吉欢. 凑合反推法——流体力学变分原理建立的一条新途径[J]. 工程热物理学报, 1997, **18**(4): 440~ 444.

[8] He Jihuan. Semi_inverse method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aerodynamics[J]. Int J Turbo & Jet_Engines, 1997, **14**(1): 23~ 28.

[9] 何吉欢. 三维非定常可压跨声速有旋流动的统一变域变分理论原理[J]. 上海力学, 1999, **20**(4): 311~ 321.

[10] He Jihuan. Generalized variational principles for compressible s2_flow in mixed_flow turbomachinery using semi_inverse method[J]. Int J Turbo & Jet_Engines, 1998, **15**(2): 101~ 107.

[11] He Jihuan. Hybrid problems of determining unknown shape of bladings in compressible s2_flow in mixed_flow turbomachinery via variational technique[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 1999, **71**(2): 154~ 159.

[12] 何吉欢. 再论 Hellnger_Reissner 原理与 Hu_Washizu 原理之等价性[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(5): 515~ 524.

[13] Liu Gaolian. On variational crisis and generalized variational principles for inverse and hybrid problems of free surface flow[A]. In: Chew Y T, Tso C P, eds. Proc 6th Asian Congress of Fluid Mechanics[C]. Sigapore, 1995.

[14] 何吉欢. 流体力学中的临界变分及消除方法[J]. 上海理工大学学报, 1992, **21**(1): 29~ 35.

[15] 何吉欢. 弹性理论中的临界变分及消除方法, 上海力学, 1997, **18**(4): 305~ 310.

[16] 谷超豪. 孤立子理论于应用[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 1990.

[17] Finlayson B A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles[M]. New York: Acad Press, 1972.

[18] 钱伟长. 对合变换和薄板弯曲问题的多变量广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1985, **6**(1): 25~ 49.

Semi_Inverse Method and Generalized Variational Principles With Multi_Variables in Elasticity

He Jihuan

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Shanghai 200072, P R China)

Abstract: Semi_inverse method, which is an integration and an extension of Hu' s try_and_error method, Chien' s veighted residual method and Liu' s systematiic method, is proposed to establish generalized variational principles with multi_variables without any variational crisis phenomenon. The method is to construct an energy trial_functional with an unknown function F, which can be readily identified by making the trial_functional stationary and using known constraint equations. As a result generalized variational principles with two kinds of independent variables (such as well_known Hellinger_Reissner variational principle and Hu_Washizu principle) and generalized variational principles with three kinds of independent variables (such as Chien' s generalized variational principles) in elasticity have been deduced without using Lagrange multiplier method. By semi_inverse method, the author has also proved that Hu_Washizu principle is actually a variational principle with only two kinds of independent variables, stress_strain relations are still its constraints.

Key words: variational principle in elastic; Chien' s generalized variational principles; Hu_Washizu principle; semi_inverse method; trial_functional; variational crisis