应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0741_05

强非线性问题的改进的 L_P 解法*

袁镒吾[1], 刘又文[2]

(1. 中南工业大学, 长沙 410083; 2. 湖南大学 力学系, 长沙 410082)

(钱伟长推荐)

摘要: 用改进的 L_P 法求解了一类平方强非线性自由振动问题和一类非振动型的强非线性问题, 得到了精度很好的一级近似解, 方法与通用的改进的 L_P 法稍有不同•

关 键 词: 改进的 L_P 法; 强非线性; 振动; 微分方程

中图分类号: TB12; TB11 文献标识码: A

引 言

强非线性振动问题

$$\ddot{u}+\omega_0^2 u=\varepsilon f(u,\dot{u},\ddot{u}), \tag{1}$$

式中标号"•"表示对自变量 t 求导, ω_0、ε 均为任意常数, 当 ε 不是小量时(强非线性), 近年来已经有数种改进的 L_P 解法• 例如, 文[1] 令

$$\tau=\omega t, \tag{2}$$

$$\omega^2=4\omega_0^2+\omega_1\varepsilon+\omega_2'\varepsilon^2+\cdots, \tag{3}$$

$$\alpha=\omega_1\varepsilon/(4\omega_0^2+\omega_1\varepsilon), \tag{4}$$

$$u=u_0+\alpha u_1+\alpha^2 u_2+\cdots \tag{5}$$

式中 ω_1、ω_2'、… 均为任意常数, 将式(2) ~ (5) 代入式(1), 然后用通常的摄动方法求解•

文[2] 则把式(3)、(4) 改为

$$\omega^2=\omega_0^2+\omega_1\varepsilon+\omega_2'\varepsilon^2+\cdots, \tag{3$'$}$$

$$\alpha=\omega_1\varepsilon/(\omega_0^2+\omega_1\varepsilon)• \tag{4$'$}$$

但由式(4)、(4)′知, 对于实际问题, 可能出现 $|\alpha|>1$ 的情况, 此时, 如果仍按式(5) 将未知函数展为参数 α 的幂级数显然不合理了• 为此, 本文把式(3) 改为(3)′; 式(4) 则改为

$$\alpha=\omega_1^2\varepsilon/(\omega_0^2+\omega_1^2\varepsilon)• \tag{6}$$

对于非振动型强非线性问题, 本文也提出了类似于强非线性振动问题的求解方法•

1 一类平方强非线性自由振动问题的解法

兹研究下列平方强非线性自由振动问题

$$\ddot{u}+\omega_0^2 u+\varepsilon(a_1 u^3+u\dot{u}^2)=0, \tag{7}$$

---

* 收稿日期: 1999_06_01; 修订日期: 2000_03_15

作者简介: 袁镒吾(1929~), 男, 教授; 刘又文(1948~), 男, 教授, 硕士, 系副主任,《力学与实践》编委.

式中 ε 为参数, 可以不是小量, a_1 为任意常数, 由式(6) 得

$$\varepsilon = \omega_0^2\omega_1^{-2}\alpha + O(\alpha^2)\cdot \tag{8}$$

代入式(3)′得

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_0^2\omega_1^{-1}\alpha, \tag{9}$$

$$\omega^{-2} = \omega_0^{-2}(1 - \omega_1^{-1}\alpha)\cdot \tag{10}$$

以下均只准确至 $O(\alpha)$· 将式(5)、(8)、(10) 代入式(7) 得

$$\mathrm{d}^2u_0/\mathrm{d}\tau^2 + u_0 = 0\cdot$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\tau^2} + u_1 = \omega_1^{-1}u_0 - \omega_0^2\omega_1^{-2}(a_1\omega_0^{-2}u_0^3 + \dot{u}_0^2)\cdot \tag{11}$$

于是得

$$u_0 = a\cos(\tau + \beta), \tag{12}$$

式中 a、β 为积分常数, 由初始条件决定, 而式(11) 则成为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\tau^2} + u_1 = \omega_1^{-1}a\cos(\tau + \beta) - \omega_1^{-2}\omega_0^2a^2\left\{aa_1\cdot\omega_0^{-2}\left[\frac{3}{4}\cos(\tau + \beta) + \frac{1}{4}\cos3(\tau + \beta) + \frac{1 - \cos2(\tau + \beta)}{2}\right]\right\}\cdot$$

为了消去 u_1 的长期项, 应有

$$\omega_1 = 3a_1a^2/4\cdot \tag{13}$$

如果用文[2]的方法求解本问题, 仍然可以得到式(13)· 但由式(4)′及(13)知, 当 a_1 为负值时, 可能有 $|\alpha| > 1$, 这是不合理的·

取 $\omega_0 = 1$, 故得

$$\mathrm{d}^2u_1/\mathrm{d}\tau^2 + u_1 = -4(9a_1a)^{-1}\cos3(\tau + \beta) - 8(9a_1^2a^2)^{-1}\cdot[1 - \cos2(\tau + \beta)]\cdot \tag{14}$$

故得

$$u_1 = -8(9a_1^2a^2)^{-1} + (18a_1a)^{-1}\cos3(\tau + \beta) - 8(27a_1^2a^2)^{-1}\cos2(\tau + \beta)\cdot \tag{15}$$

于是, 利用式(6)、(13)得式(7)的一级近似解为 ($\omega_0 = 1$)

$$u = a\cos(\omega t + \beta) + \frac{a_1a^3\varepsilon}{(16 + 9a_1^2a^4\varepsilon)}\cdot\left[-\frac{8}{a_1a} + \frac{1}{2}\cos3(\omega t + \beta) - 8(3a_1a)^{-1}\cdot\cos2(\omega t + \beta)\right]\cdot \tag{16}$$

由式(3)′、(13)有

$$\omega = \sqrt{1 + (3/4)a_1a^2\varepsilon}\cdot \tag{17}$$

2　当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 式(7) 的解

1)　当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 文[3] 研究了下列问题

$$\ddot{u} + u + \varepsilon^2u^3 + \varepsilon\dot{u}^2 = 0, \tag{18}$$

如果令 $a_1 = \varepsilon$ 及 $\omega_0 = 1$, 则本文所研究的问题式(7) 便变成了式(18)·

文[3]得到了式(18)的解为(文[3]p. 129 式(42)、(43))

$$u = a\cos(\omega t + \beta_0) - \frac{1}{6}\varepsilon a^2[\cos 2(\omega t + \beta_0) + 3] + \cdots, \tag{19}$$

$$\omega = 1 + 0.2083\varepsilon^2 a^2. \tag{20}$$

其中为了和本文相区别, 将文[3]中的 a、ω 分别改为 a、ω.

2) 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 本文的式(16)、(17) 仍然适用, 在式(16) 中, 略去 $\cos 3(\omega t + \beta)$, 并设 $a \leqslant 1$ 及 $a_1 = \varepsilon$, 则式(16) 近似成为

$$u = a\cos(\omega t + \beta) - \frac{1}{2}a^2\varepsilon - \frac{1}{6}a^2\varepsilon\cos 2(\omega t + \beta). \tag{21}$$

式(17) 则成为

$$\omega = 1 + 0.375\varepsilon^2 a^2. \tag{22}$$

可见, 式(19) 和式(21) 只有很小的差异, 而这差异是由于在运算过程中, 没有把 a_1 视为参量而按照 α 展为幂级数所引起的.

通过上述检验, 可见式(16)、(17) 是可靠的.

3 一类非振动型强非线性问题的解法

当 u 值不是很大时(在平衡位置附近), 试求解

$$\ddot{u} + \varepsilon(-bu + u^3) = 0, \tag{23}$$

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0, \tag{24}$$

式中 ε 可以不是小量, b 为常数, 以后将指出, 当 b 为正值时, 应用 $b < 1/2$. 当 $b < 0$ 时, 式(23) 便成为 Duffing 方程.

先研究

$$\ddot{u} + (P_b^2 - \omega_1\varepsilon)u + \varepsilon(-bu + u^3) = 0, \tag{25}$$

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0, \tag{24}$$

如果

$$P_b^2 = \omega_1\varepsilon, \tag{26}$$

则式(25) 蜕变成为式(23), 令

$$\alpha = \omega_1^2\varepsilon/(1 + \omega_1^2\varepsilon), \tag{27}$$

则有

$$\varepsilon = \omega_1^{-2}\alpha + O(\alpha^2). \tag{28}$$

以后均只准确至 $O(\alpha)$, 将式(5)、(28) 代入式(25) 可得

$$\ddot{u}_0 + \alpha\ddot{u}_1 + (P_b^2 - \alpha\omega_1^{-1})(u_0 + \alpha u_1) +$$
$$\alpha\omega_1^{-2}[-b(u_0 + \alpha u_1) + (u_0 + \alpha u_1)^3] = 0.$$

故得

$$\ddot{u}_0 + P_b^2 u_0 = 0,$$

$$\ddot{u}_1 + P_b^2 u_1 = u_0\omega_1^{-1} - \omega_1^{-2}(-bu_0 + u_0^3),$$

$$u_0(0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0; \quad u_1(0) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\tau}(0) = 0,$$

于是,

$$u_0 = \cos P_b t, \tag{29}$$

$$\ddot{u}_1 + P_b^2 u_1 = \omega_1^{-1}\cos P_b t - \omega_1^{-2}\left[-b\cos P_b t + \frac{1}{4}(3\cos P_b t + \cos 3P_b t)\right],$$

为了使 u 值不是很大, u_1 中不应含有长期项, 故应该有

$$\omega_1 = -b + 3/4, \tag{30}$$

于是有

$$\ddot{u}_1 + P_b^2 u_1 = \frac{4}{(-4b+3)^2} \cdot \cos 3P_b t \cdot \tag{31}$$

式(25)、(24)的一级近似解为

$$u = \cos P_b t + \frac{\alpha}{2(-4b+3)^2} \cdot (\cos 3P_b t - \cos P_b t) \tag{32}$$

要使得上式成为式(23)、(24)的解, 必须利用式(26)· 由式(26)、(30)得

$$P_b = \sqrt{(-b+3/4)\varepsilon} \cdot \tag{33}$$

由式(30)、(27)得

$$\alpha = (-b+3/4)^2\varepsilon/[1+(-b+3/4)^2\varepsilon] \cdot$$

于是, 式(23)、(24)的一级近似解为

$$u = \cos P_b t + \frac{\varepsilon/32}{1+(-b+3/4)^2\varepsilon} \cdot (\cos 3P_b t - \cos P_b t) + O(\alpha^2), \tag{34}$$

其中 P_b 由式(33)确定·

令 $b = 1/8$, $\varepsilon = 4$, 则式(34)成为

$$u = (39/41)\cos 1.581\,1t + (2/41)\cos 3 \times 1.581\,1t \cdot \tag{35}$$

$$\dot{u} = -1.504\,0\sin 1.5811t - 0.231\,4\sin 3 \times 1.581\,1t \cdot \tag{36}$$

现求式(23)、(24)的精确解· 由式(23)得

$$\dot{u}\,d\dot{u} = -\varepsilon(-bu + u^3)\,du \cdot$$

表 1 ($b = 1/8$, $\varepsilon = 4$)

t	u 式(35)	$\dot{u}$ 本 文 式(36)	$\dot{u}$ 精 确 式(38)
0	1	0	0
0.1	0 982 75	−0.342 5	−0.342 6
0.3	0 853 39	−0.915 8	−0.896 3
0.5	0 634 12	−1.230 0	−1.173 7
0.7	0 377 72	−1.303 8	−1.237 2
0.9	0 119 16	−1.278 6	−1.227 5
1.1	−0 135 83	−1.280 2	−1.228 2
1.3	−0 394 71	−1.303 8	−1.236 7
1.5	−0 650 07	−1.218 0	−1.163 7
1.7	−0 865 13	−0.885 6	−0.868 3
1.9	−0 986 93	−0.298 9	−0.299 2
2.1	−0 978 00	+0.385 6	−0.385 4
2.3	−0 841 26	0.944 9	0.923 1
2.5	−0 618 01	1.241 0	1.182 9
2.7	−0 360 73	1.303 4	1.237 4
2.9	−0 102 50	1.277 1	1.226 8
3.1	0 152 53	1.282 0	1.229 0

故

$$\dot{u} = \pm\sqrt{(-\varepsilon b + \varepsilon/2) + \varepsilon(bu^2 - u^4/2)}. \tag{37}$$

再积得

$$\int_1^u \frac{du}{\pm\sqrt{(-\varepsilon b + \varepsilon/2) + \varepsilon(bu^2 - u^4/2)}} = t.$$

由于 $u = 1$ 时，上式出现奇性，求其数值积分很困难，故用式(37) 检验本文结果。

取 $b = 1/8$ 及 $\varepsilon = 4$，式(37) 变为

$$\dot{u} = \pm\sqrt{1.5 + u^2/2 - 2u^4}. \tag{38}$$

表 1 把 $b = 1/8$ 及 $\varepsilon = 4$ 时本文一级近似解式(36) 与准确解(38) 做了比较。由表 1 可见，二者十分符合。在区间[0, 3.1] 上，误差的最大值($t = 0.7$ 时) 才只 5.4%。

由式(37) 可见，必须有

$$b < 1/2, \tag{39}$$

否则，当 $|u| \ll 1$ 时，$\dot{u}$ 为虚数。所以，正如本文第 3 节的开头所指出的，b 值应当受到式(39) 的限制。

[参 考 文 献]

[1] 唐驾时，尹小波. 一类强非线性系统的分叉[J]. 力学学报，1996，**28**(3): 363~369.

[2] 张佑 ，陈树辉. 用改进的 Lindtstedt_Poincare 方法分析保守系统强非线性振动[A]. 见: 黄黔，潘立宙主编，应用数学和力学——钱伟长 80 诞辰祝寿文集[C]. 北京: 科学出版社，重庆出版社，1993，30~39.

[3] A. H. 奈弗. 摄动方法习题集[M]. 宋家 ，戴世强译. 上海: 上海翻译出版公司，1990，128~129.

Improved L_P Method for Solving Strongly Nonlinear Problems

Yuan Yiwu[1], Liu Youwen[2]

(1. Central South University of Technology, Changsha 410083, P R China;
2. Hunan University, Changsha 410082, P R China)

Abstract: Using the improved L_P method, a class of problems of square strongly nonlinear free oscillations and of strongly nonlinear nonoscilations were solved. Their first order approximate solution which has high accuracy is obtained. The method of this paper is different from the known L_P methods.

Key words: improved L_P method; strong nonlinearity; oscillation; differential equation