应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0755_04

二阶非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统的守恒律*

方建会

(石油大学 应用物理系, 山东东营 257062)

(叶庆凯推荐)

摘要: 研究二阶非 ¶Ä±¶³ 型完整系统的守恒律• 引入 Jourdain 生成元, 给出无限小变换下 Jourdain 原理的不变性条件, 在一定条件下得到系统的守恒律• 并举例说明结果的应用•

关 键 词: Jourdain 原理; 非完整系统; 守恒律
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

力学系统的守恒律不仅具有数学上的重要性, 而且反映着深刻的物理规律• 寻求力学系统的守恒律有各种方法• 分析力学传统的方法是从系统的运动微分方程出发直接导出循环积分、广义能量积分等• 寻求守恒量的近代方法是基于 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性质, 这就是 A. E. Noether 的理论[1]• 利用微分变分原理也可以研究完整系统和非完整系统的守恒律[2~4]• 本文利用 Jourdain 原理来研究二阶非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统的守恒律, 给出无限小变换下 Jourdain 原理的不变性条件, 在一定条件下得到系统的守恒律• 由于 ¶Ä±¶³ 型非完整系统是非 ¶Ä±¶³ 型非完整系统的特殊情形, 因此本文结果具有更普遍的意义•

1 Jourdain 原理和非等时变分

在双面理想约束下, 力学系统 Jourdain 原理的广义坐标形式为[4]

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta_1\dot{q}_s = 0, \tag{1}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数, Q''_s 为非势广义力•

现在定义 Jourdain 非等时变分 $\Delta_1\dot{q}_s$, $(\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}}$ 和 $(\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}}$, 要求

$$\Delta_1 q_s = 0, \quad \Delta_1 t = 0 \tag{2}$$

利用 Δ_1 与 δ_1 运算的关系[5], 有

$$\Delta_1\dot{q}_s = \delta_1\dot{q}_s + \ddot{q}_s\Delta_1 t, \tag{3}$$

$$(\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}} = \delta_1\dot{q}_s + \ddot{q}_s\Delta_1 t + \dot{q}_s(\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}}, \tag{4}$$

$$\Delta_1\dot{q}_s = (\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}} - \dot{q}_s(\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{5}$$

* 收稿日期: 1999_01_27; 修订日期: 2000_03_20
作者简介: 方建会(1957~) , 男, 副教授.

注意到式(2),则有

$$\Delta_1 \dot{q}_s = \delta_1 \dot{q}_s, \tag{6}$$

$$(\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}} = \delta_1 \dot{q}_s + \dot{q}_s (\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}}, \tag{7}$$

$$\Delta_1 \dot{q}_s = (\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}} - \dot{q}_s (\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}} . \tag{8}$$

取广义坐标、时间和速度的无限小变换[2]

$$\left.\begin{aligned} & q_s^* = q_s,\ t^* = t, \\ & \frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = \delta_1 \dot{q}_s = \Delta_1 \dot{q}_s, \\ & \frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} - \frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = (\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

考虑无限小量 $(\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}}$ 和 $(\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}}$ 作为 Jourdain 无限小变换的组成元, 引入变换的 Jourdain 生成元[2]

$$(\Delta_1 q_s)^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon F_s(t, q, \dot{q}), \quad (\Delta_1 t)^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon f(t, q, \dot{q}) . \tag{10}$$

由关系式(6)~(8)将 Jourdain 等时变分表为生成元, 有

$$\delta_1 \dot{q}_s = \varepsilon[F_s(t, q, \dot{q}) - \dot{q}_s f(t, q, \dot{q})] . \tag{11}$$

2 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, 2, \cdots, n)$ 确定, 系统的运动受到 g 个彼此独立的二阶非 Четаев 型非完整约束

$$\varphi_\beta(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g) . \tag{12}$$

假设约束(12)加在速度空间的虚位移 $\delta_1 \dot{q}_s$ 上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi_{\beta s}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \delta_1 \dot{q}_s = 0 . \tag{13}$$

一般来说, $\varphi_{\beta s}$ 与 $\dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial \ddot{q}_s}$ 无关, 特别地, 当 $\varphi_{\beta s} = \dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial \ddot{q}_s}$ 时, 则为 Четаев 型非完整约束.

由 Jourdain 原理(1)和虚位移方程(13), 利用 Lagrange 乘子法, 可得到系统的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s'' + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \varphi_{\beta s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{14}$$

其中 λ_β 为约束乘子.

3 利用 Jourdain 原理研究系统的守恒律

由(12)、(13)和(14)描述的系统满足原理(1), 因为将方程(14)乘以 $\delta_1 \dot{q}_s$ 并对 s 求和得到的结果与式(12)联立, 便可得到式(1). 因此, 可以利用原理(1)研究(12)、(13)和(14)描述的系统.

现在研究原理(1)在无限小变换下保持不变的条件. 将式(11)代入式(1), 展开并加和减 $\varepsilon \dfrac{\partial L}{\partial t} f$, 整理得

$$\begin{aligned} \varepsilon \Bigg\{ & \sum_{s=1}^{n} \left[Q_s''(F_s - \dot{q}_s f) + \frac{\partial L}{\partial q_s} F_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{F}_s \right] - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_s} \dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s \right) f + \\ & \frac{\partial L}{\partial t} f - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s \dot{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (F_s - \dot{q}_s f) \right] \Bigg\} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

在式(15)中加和减去一个函数 $\varepsilon\dot{p}(t,q,\dot{q})$，得

$$\varepsilon\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[Q''_s(F_s-\dot{q}_s f)+\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s\right]+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}+\frac{\partial L}{\partial t}f+\right.$$
$$\left.\dot{p}(t,q,\dot{q})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f+p(t,q,\dot{q})\right]\right\}=0, \tag{16}$$

其中 $p(t,q,\dot{q})$ 称为规范函数• 这就是 Jourdain 原理不变性条件的变换[2]•

下面给出二阶非 ¶Ä-¶ 型非完整系统守恒律存在的条件及形式• 将式(11)代入式(13)得

$$\sum_{s=1}^{n}\psi_{\beta s}(F_s-\dot{q}_s f)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g)• \tag{17}$$

式(17)就是二阶非完整约束(12)对无限小生成元 F_s,f 的限制• 由式(16)可知，如果无限小生成元满足关系

$$\sum_{s=1}^{n}\left[Q''_s(F_s-\dot{q}_s f)+\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s\right]+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}+$$
$$\frac{\partial L}{\partial t}f+\dot{p}(t,q,\dot{q})=0• \tag{18}$$

则系统存在如下守恒量

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f+p(t,q,\dot{q})=\mathrm{const}, \tag{19}$$

于是得到

命题 对于二阶非 ¶Ä-¶ 型非完整系统(12)、(13)、(14)，如果无限小变换的生成元 F_s,f 满足条件(17)，(18)，则系统存在形如式(19)的守恒律•

如果系统受到的约束是 ¶Ä-¶ 型的，则 $\psi_{\beta s}=\dfrac{\partial\phi_\beta}{\partial\ddot{q}_s}$，由式(17)得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\ddot{q}_s}(F_s-\dot{q}_s f)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g)• \tag{20}$$

由命题得

推论 1 对于二阶 ¶Ä-¶ 型非完整系统，如果无限小变换的生成元 F_s,f 满足条件(20)，(18)，则系统存在形如式(19)的守恒律•

推论 1 正是文献[4]给出的结果•

如果系统没有非完整约束，则命题给出

推论 2 对完整系统，如果无限小变换的生成元 F_s,f 满足条件(18)，则系统存在形如式(19)的守恒律•

4 算　例

二阶非完整系统的 Lagrange 函数为

$$L=(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)/2-q_2• \tag{21}$$

非完整约束为

$$\phi=\ddot{q}_2-t\ddot{q}_1=0• \tag{22}$$

设约束(22)是非 ¶Ä-¶ 型的，速度空间的虚位移方程为

$$\delta_1\dot{q}_1-\delta_1\dot{q}_2=0• \tag{23}$$

非有势力不存在• 试用 Jourdain 原理求系统的守恒律•

式(17)给出

$$F_1 - \dot{q}_1 f - F_2 + \dot{q}_2 f = 0 \qquad (24)$$

式(18)给出

$$-F_2 + \dot{q}_1 \dot{F}_1 + \dot{q}_2 \dot{F}_2 - q_2 \dot{f} - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\dot{f}/2 + \dot{p} = 0 \qquad (25)$$

取无限小变换的生成元为

$$f = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \qquad (26)$$

则式(24)满足, 由式(25)求得规范函数

$$p = t \qquad (27)$$

命题给出的守恒律式(19)为

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = \text{const} \qquad (28)$$

[参 考 文 献]

[1] Noether A E. Invariant variantions_probleme[J]. Nachr Aka Wiss Göttingen Math Phys, 1918, KI, II: 235~257.

[2] Vujanovic B. A study of conservation laws of dynamical systems by means of differential variational principle of Jourdain and Gauss[J]. Acta Mechanica, 1986, **65**(6): 63~80.

[3] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[4] 梅凤翔. 利用 Jourdain 原理研究二阶非完整系统的守恒律[J]. 北京理工大学学报, 1998, **18**(1): 17~21.

[5] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991, 76

The Conservation Law of Second_Order Nonholonomic System of Non_Chetaev's Type

Fang Jianhui

(Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying, Shandong 257062, P R China)

Abstract: The conservation law of second_order nonholonomic system of non_chetaev's type by means of the Jourdain's principle was studied. The invariant condition of Jourdain's principle under infinitesimal transformation is given by introducing Jourdain's generators. Then the conservation law of the system is obtained under certain conditions. Finally a calculating example is given.

Key words: Jourdain's principle; nonholonomic system; conservation law