应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0759_07

关于 N. A. Menger PN_空间中概率收缩偶与非线性方程组的解的注记*

方锦暄, 宋桂安

(南京师范大学 数学系, 南京 210097)

(协平推荐)

摘要: 引进了 (Φ, Δ)_型概率收缩偶的概念, 它简化并减弱了张石生给出的概率收缩偶的定义• 在N. A. Menger PN_空间中研究了具有这类概率收缩偶的非线性算子方程组的解的存在性与唯一性问题• 改进并推广了 M. Altman, A. C. Lee, W. J. Padgett, 张石生等人的相应结果•

关 键 词: N. A. Menger PN_空间; (Φ, Δ)_型概率收缩偶; 选择算子; 非线性方程组

中图分类号: O177.99 文献标识码: A

1 引言与定义

在[1]中, 张石生和彭永成在非阿基米德Menger PN_空间(简记为 N. A. Menger PN_空间) 中引进了概率收缩偶的概念• 利用这一概念, 在 t_范数 $\Delta=\min$ 的非阿基米德Menger PN_空间中研究了非线性算子方程组的解的存在性与唯一性• 在本文中, 我们将指出[1] 中概率收缩偶的定义可以简化并减弱, 我们引进(Φ, Δ)_型概率收缩偶的概念来代替它• 在此基础上, 我们在具有H_型 t_范数的N. A. Menger PN_空间中, 建立了非线性算子方程组的解的存在性与唯一性定理• 作为其应用, 我们得到了一个新的不动点定理• 本文的工作改进并推广了[1 ~ 8] 的相应结果•

以下记 $\mathbf{R}=(-\infty, +\infty)$, $\mathbf{R}^+=[0, +\infty)$, N 表示自然数集• $H:\mathbf{R}\to[0,1]$ 表示一分布函数, 其定义为:

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t>0),\\ 0 & (t\leqslant 0)\text{•}\end{cases}$$

有关Menger PN_空间的定义及其它术语见[9]•

定义 1[1,8] 称映射 $\Gamma: Y\to X$ 为奇映射, 如果 $\Gamma(-y)=-\Gamma(y)$, $y\in Y$• 记从 Y 到X 的所有奇映射的全体为 $S(Y, X)$•

定义 2[1,8] 设 $P: D\subset C\to 2^Y$ 是一个集值映射, 一个单值映射 $p: D\subset X\to Y$称为P 的选择算子, 如果 $\forall x\in D$ 有$p(x)\in P(x)$•

定义 3[9] t_范数 Δ 称为是 H_型的, 如果函数族$\left\{\Delta^m(t)\right\}$ 在 $t=1$ 处等度连续, 其中

* 收稿日期: 1999_02_09; 修订日期: 2000_04_10
基金项目: 江苏省教委自然科学基金资助项目(1999SXX0000SJ2)
作者简介: 方锦暄(1943~) , 教授.

$\Delta^2(t) = \Delta(t,t),\ \Delta^m(t) = \Delta(t, \Delta^{m-1}(t)),\ t \in [0,1],\ m = 3, 4, \cdots$

注1 H_型 t_范数是一类比较广泛的t_范数, 它包含了 $\Delta = \min$ 为其特例. 此外, H_型t_范数未必都是连续的.

定义4[7] 称函数 $\varphi: R^+ \to R^+$ 满足条件(Φ), 如果 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t)$ 为严格增的, 且对一切 $t > 0$, $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t) = \infty$, 这里 $\varphi^n(t)$ 表示 $\varphi(t)$ 的第 n 次迭代.

引理1[7] 设 $\varphi(t)$ 满足条件(Φ), 则对一切 $t > 0$, 有

$$\varphi(t) > t,\ \varphi^n(t) > \varphi^{n-1}(t),\ n = 2, 3, \cdots$$

定义5[1,8] 设 $(X, \mathscr{F}', \Delta)$ 和 $(Y, \mathscr{F}, \Delta)$ 是两个N.A.Menger PN_空间, $P, Q: D \subset X \to 2^Y$ 是两个集值映射, 且 $p, q: D \subset X \to Y$ 分别是P, Q的选择算子, $\Gamma_i: X \to S(Y, X)$, $(i = 1, 2)$. 我们称(Γ_1, Γ_2) 为 P, Q 的概率收缩偶, 如果存在函数 $\varphi: R^+ \to R^+$ 满足条件(Φ), 且使得对任意 $t > 0$, $x \in D$ 及$y \in Y$, 下面两式成立:

$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)-y}(t) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi(t)), F'_{q(x)}(\varphi(t)),$$
$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)}(\varphi(t)), F'_{q(x)+y}(\varphi(t)), F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)-y}(\varphi(t))\Big\}, \tag{1}$$

$$F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)-p(x)-y}(t) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)}(\varphi(t)), F'_{p(x)}(\varphi(t)),$$
$$F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)-p(x)}(\varphi(t)), F'_{p(x)+y}(\varphi(t)), F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)-y}(\varphi(t))\Big\}. \tag{2}$$

注2 如果 Y是N.A.Menger PN_空间, 且其 t_范数$\Delta = \min$, 则可以证明条件(1)、(2) 分别等价于下面的条件$(1)'$、$(2)'$:

$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)-y}(t) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{q(x)}(\varphi(t))\Big\}, \tag{$1'$}$$

$$F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)-p(x)-y}(t) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{p(x)}(\varphi(t))\Big\}. \tag{$2'$}$$

事实上, 容易看出条件(1)、(2) 分别等价于下面的条件$(1)''$、$(2)''$:

$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)-y}(t) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi(t)), F'_{q(x)}(\varphi(t))\Big\}, \tag{$1''$}$$

$$F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)-p(x)-y}(t) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{q(x+\Gamma_2(x)y)}(\varphi(t)), F'_{p(x)}(\varphi(t))\Big\}. \tag{$2''$}$$

此外, 注意到 $\varphi^n(t)$ 关于 n 的递增性, 由$(1)''$ 可得

$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi(t)) = F'_{(p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)-y)+q(x)+y}(\varphi(t)) \geqslant$$
$$\min\Big\{F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi^2(t)), F'_y(\varphi(t)), F'_{q(x)}(\varphi(t))\Big\} \geqslant$$
$$\cdots \geqslant \min\Big\{F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi^m(t)), F'_y(\varphi(t)), F'_{q(x)}(\varphi(t))\Big\}.$$

令 $m \to \infty$, 由上式得

$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi(t)) \geqslant \min\Big\{F'_y(\varphi(t)), F'_{q(x)}(\varphi(t))\Big\}.$$

于是, 由$(1)''$即可得$(1)'$. 反之, $(1)'$ 隐涵(1) 是显然的, 故(1) 与$(1)'$ 等价.

类似地可证(2) 与$(2)'$ 等价.

由此可知, [1]中定理1、定理2(即[8]中定理13.2.1、定理13.2.2) 的条件及证明可以大大简化.

定义6 设 $(X, \mathscr{F}, \Delta)$ 和 $(Y, \mathscr{F}', \Delta)$ 是两个Menger PN_空间, $P, Q: D \subset X \to 2^Y$ 是集值映射, 且 $p, q: D \subset X \to Y$ 分别是P, Q 的选择算子, $\Gamma_i: X \to S(Y, X)$, $(i = 1, 2)$, $y_0 \in Y$. 我们称(Γ_1, Γ_2) 为 P, Q 关于y_0 的(Φ, Δ)_型概率收缩偶, 如果存在函数 $\varphi: R^+ \to R^+$ 满足条件(Φ), 且使得对任意的 $t > 0$, $x \in D$ 和$y \in Y$, 下面两式成立:

$$F'_{p(x+\Gamma_1(x)(y))-q(x)-y} \geqslant \Delta(F'_{q(x)-y_0}(\varphi(t)), F'_y(\varphi(t))), \tag{3}$$

$$F'_{q(x+\Gamma_2(x)(y))-p(x)-y} \geqslant \Delta(F'_{p(x)-y_0}(\varphi(t)), F'_y(\varphi(t)))\cdot \tag{4}$$

注 3 由定义 5, 定义 6 和注 2 可知:

如果 $(X, \mathscr{T}, \Delta)$ 和 $(Y, \mathscr{T}', \Delta)$ 是两个 N. A. Menger PN_空间, 且 $\Delta=\min$, 则 (Γ_1, Γ_2) 是 P, Q 的概率收缩偶等价于 (Γ_1, Γ_2) 是 P, Q 关于 θ 的 $(\Phi, \min)$_型概率收缩偶·

定义 7[1,8] 设 $P, Q: D\subset X\to 2^Y$ 是两个集值映射, 对给定的 $y_0\in Y$ 如果存在 $x^*\in D$ 使得 $y_0\in P(x^*)$ 且 $y_0\in Q(x^*)$, 则称 x^* 为集值映射方程组

$$y_0\in P(x),\ y_0\in Q(x) \tag{5}$$

的一个解·

2 非线性算子方程组解的存在性与唯一性定理

定理 1 设 $(X, \mathscr{T}, \Delta)$ 是 $\mathscr{T}$_完备的 N. A. Menger PN_空间, $(Y, \mathscr{T}', \Delta)$ 是 Menger PN_空间, 其中 Δ 是 H_型 t_范数, 又设 $P, Q: D\subset X\to 2^Y$ 是集值映射, 且 $p, q: D\subset X\to Y$ 分别是 P, Q 的闭选择算子· 如果 $\Gamma_i: X\to S(Y, X)\ (i=1,2)$ 满足下列条件:

i) 对任意的 $x\in D$ 和 $y\in Y$ 都有 $x+\Gamma_i(x)y\in D$;

ii) (Γ_1, Γ_2) 是 P, Q 关于 y_0 的 (Φ, Δ)_型概率收缩偶;

iii) 存在非负严格增函数 $g(t)$, 满足 $g(0)=0$ 且对任意的 $x\in D$ 和 $y\in Y$ 有

$$F_{\Gamma_i(x)y}(t) \geqslant F'_y(g(t))\cdot \tag{6}$$

则下面的非线性方程组

$$y_0\in P(x),\quad y_0\in Q(x) \tag{7}$$

在 D 中有解, 且对任意给定的 $x_0\in D$ 迭代序列

$$x_{2n+1}=x_{2n}-\Gamma_1(x_{2n})(q(x_{2n})-y_0), \tag{8a}$$

$$x_{2n+2}=x_{2n+1}-\Gamma_2(x_{2n+1})(p(x_{2n+1})-y_0), \tag{8b}$$

$\mathscr{T}$_收敛于方程组(7) 的一个解

证明 不失一般性, 我们仅考虑 $y_0=\theta$· 事实上, 如果 $y_0\neq\theta$, 则令 $P_1(x)=\left\{u-y_0: u\in P(x)\right\}$, $Q_1(x)=\left\{u-y_0: u\in Q(x)\right\}$, $p_1(x)=p(x)-y_0$, $q_1(x)=q(x)-y_0$· 我们有 $D(P_1)=D(Q_1)=D$, 且 P_1, Q_1 满足定理 1 中的所有条件(此时, (Γ_1, Γ_2) 是 P_1, Q_1 关于 θ 的 (Φ, Δ)_型概率收缩偶), 因而可转向讨论下列方程组:

$$\theta\in P_1(x),\quad \theta\in Q_1(x)\cdot$$

据条件(i), $x_n\in D\ (n\in N)$· 由(3) 和(8a) 得

$$\begin{aligned} F'_{p(x_{2n+1})}(t) &= F'_{p(x_{2n}+\Gamma_1(x_{2n})(-q(x_{2n})))-q(x_{2n})-(-(q(x_{2n})))}(t) \geqslant \\ &\Delta(F'_{q(x_{2n})}(\varphi(t)), F'_{-q(x_{2n})}(\varphi(t))) = \\ &\Delta^2(F'_{q(x_{2n})}(\varphi(t)))\cdot \end{aligned}$$

另一方面, 根据(4), (8b) 得

$$\begin{aligned} F'_{q(x_{2n})}(t) &= F'_{p(x_{2n-1}+\Gamma_2(x_{2n-1})(-p(x_{2n-1})))-p(x_{2n-1})-(-p(x_{2n-1}))}(t) \geqslant \\ &\Delta(F'_{p(x_{2n-1})}(\varphi(t)), F'_{-p(x_{2n-1})}(\varphi(t))) = \\ &\Delta^2(F'_{p(x_{2n-1})}(\varphi(t)))\cdot \end{aligned}$$

于是, 用归纳法可得

$$F'_{p(x_{2n+1})}(t) \geqslant \Delta^{4^n}(F'_{p(x_1)}(\varphi^{2n}(t)))\cdot \tag{9}$$

用同样的方法可得

$$F'_{q(x_{2n})}(t) \geqslant \Delta^{4^n}(F'_{q(x_0)}(\varphi^{2n}(t)))\cdot \tag{10}$$

由(9),(10)及条件(iii),当 n 是奇数时,有

$$F_{x_{n+1}-x_n}(t) = F_{\Gamma_2(x_n)p(x_n)}(t) \geqslant$$
$$F'_{p(x_n)}(g(t)) \geqslant \Delta^{4^{(n-1)/2}}(F'_{p(x_1)}(\varphi^{n-1}(g(t))));$$

当 n 是偶数时,有

$$F_{x_{n+1}-x_n}(t) = F_{\Gamma_1(x_n)q(x_n)}(t) \geqslant$$
$$F'_{q(x_n)}(g(t)) \geqslant \Delta^{4^{n/2}}(F'_{q(x_0)}(\varphi^n(g(t))))\cdot$$

因而,对任意给定的自然数 n, p,不失一般性,仅考虑 n 是奇数,p 是偶数,其余情况的证明类同· 注意到$(X,\mathscr{F},\Delta)$ 是非阿基米德和 $\varphi^n(t)$ 关于 n 的严增性,我们有

$$F_{x_{n+p}-x_n}(t) \geqslant \Delta(F_{x_{n+p}-x_{n+p-1}}(t), \Delta(\cdots\Delta(F_{x_{n+2}-x_{n+1}}(t), F_{x_{n+1}-x_n}(t))\cdots)) \geqslant$$
$$\Delta(\Delta^{4^{(n+p-1)/2}}(F'_{q(x_0)}(\varphi^{n+p-1}(g(t)))),$$
$$\Delta(\cdots\Delta(\Delta^{4^{(n+1)/2}}(F_{q(x_0)}(\varphi^{n+1}(g(t)))),$$
$$\Delta^{4^{(n-1)/2}}(F'_{p(x_1)}(\varphi^{(n-1)}g(t))))\cdots)) \geqslant$$
$$\Delta(\Delta^b(F'_{q(x_0)}(\varphi^{(n+1)}(g(t)))), \Delta^c(F'_{p(x_1)}(\varphi^{(n-1)}(g(t))))),$$

其中 $b = 4^{(n+p-1)/2} + 4^{(n+p-3)/2} + \cdots + 4^{(n+1)/2}$, $c = 4^{(n+p-3)/2} + 4^{(n+p-5)/2} + \cdots + 4^{(n-1)/2}\cdot$

因为 Δ 是H_型t_范数,所以对任给的 $\lambda \in (0,1)$,存在 $\delta \in (0,1)$,使得当 $s > \delta$时,对所有的 $k \in N$ 都有 $\Delta^k(s) > 1-\lambda\cdot$ 又因为对任何 $t > 0$,

$$F'_{p(x_1)}(\varphi^{(n+1)}(g(t))) \to 1, F'_{q(x_0)}(\varphi^{(n-1)}(g(t))) \to 1 (n \to \infty),$$

故对上述正数 δ,存在自然数 N,当 $n > N$ 时有

$$a = \min\left\{F'_{p(x_1)}(\varphi^{(n+1)}(g(t))), F'_{q(x_0)}(\varphi^{(n-1)}(g(t)))\right\} > \delta\cdot$$

于是,当 $n > N$ 时有

$$F_{x_{n+p}-x_n}(t) \geqslant \Delta(\Delta^b(a), \Delta^c(a)) = \Delta^{b+c}(a) > 1-\lambda\cdot$$

这表明$\left\{x_n\right\}$是X 中$\mathscr{T}$_Cauchy 列· 由 X 的 $\mathscr{T}$_完备性可设$x_n \xrightarrow{\mathscr{T}} x_* \in X\cdot$

此外,在(9) 和(10) 中令 $n \to \infty$,得

$$\lim_{n\to\infty} F'_{p(x_{2n+1})}(t) = \lim_{n\to\infty} F'_{q(x_{2n})}(t) = H(t)\cdot$$

这意味着$p(x_{2n+1}) \xrightarrow{\mathscr{T}} \theta$, $q(x_{2n}) \xrightarrow{\mathscr{T}} \theta\cdot$ 再由 p, q 的闭性,我们有 $p(x_*) = \theta$, $q(x_*) = \theta\cdot$ 注意到 p, q 分别是P, Q 的选择算子,所以以下两式成立:

$$\theta \in P(x_*), \theta \in Q(x_*)\cdot$$

这便证明了 x_* 是方程组(7)(当 $y_0 = \theta$ 时)的一个解,且迭代序列(8a)和(8b)$\mathscr{T}$_收敛于$x_*\cdot$

下面我们来研究具有(Φ, Δ)_型概率收缩偶的非线性单值算子方程组解的存在性与唯一性问题· 作为定义 6 的特例,我们有:

定义 8 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$和$(Y,\mathscr{F}',\Delta)$是两个Menger PN_空间,$P, Q: D \subset X \to Y$是单值映射,$\Gamma_i: X \to S(Y,X)$, $(i=1,2)$, $y_0 \in Y\cdot$ 我们称(Γ_1, Γ_2) 为 P, Q 关于y_0的(Φ, Δ)_型概率收缩偶,如果存在函数 $\varphi: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 满足条件(Φ) 且使得对任何 $t > 0$, $x \in D$ 和$y \in Y$ 成立:

$$F'_{P(x+\Gamma_1(x)(y))-Q(x)-y} \geqslant \Delta(F'_{Q(x)-y_0}(\varphi(t)), F'_y(\varphi(t))), \tag{11}$$

$$F'_{Q(x+\Gamma_1(x)(y))-P(x)-y} \geqslant \Delta(F'_{P(x)-y_0}(\varphi(t)), F'_y(\varphi(t)))\cdot \tag{12}$$

定理 2 设 $(X, \mathscr{T}, \Delta)$ 是 $\mathscr{T}$_完备的 N.A.Menger PN_空间, $(Y, \mathscr{T}', \Delta)$ 是 Menger PN_空间, 其中 Δ 是 H_型的 t_范数, 又设 $P, Q: D\subset X\to Y$ 是两个闭单值算子, 如果 $\Gamma_i: X\to S(Y, X)(i=1,2)$ 满足下列条件:

i) 对任意的 $x\in D, y\in Y$, 都有 $x+\Gamma_i(x)y\in D$;

ii) (Γ_1, Γ_2) 是 P, Q 关于 y_0 的 (Φ, Δ)_型概率收缩偶;

iii) 存在非负严格增函数 $g(t)$, 满足 $g(0)=0$ 且对任意的 $x\in D, y\in Y$ 有

$$F_{\Gamma_i(x)y}(t) \geqslant F'_y(g(t))\cdot \tag{13}$$

则下面的非线性方程组

$$y_0 = P(x), \quad y_0 = Q(x), \tag{14}$$

在 D 中有解, 且对任意给定的 $x_0\in D$, 迭代序列

$$x_{2n+1} = x_{2n} - \Gamma_1(x_{2n})(Q(x_{2n}) - y_0),$$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} - \Gamma_2(x_{2n+1})(P(x_{2n+1}) - y_0),$$

$\mathscr{T}$_收敛于方程组(14) 的一个解·

特别地, 设方程组(14) 的解集为 U, 如果存在某一 $x\in U$ 使得 $\Gamma_1(x)$ 或者 $\Gamma_2(x)$ 是一个满射, 则方程组(14) 在 D 中有唯一解·

证明 作为定理 1 的特例, 容易证明定理 2 前一部分的结论是正确的·

现在来证明定理 2 后一部分的结论· 假若 x_*, x_{**} 是方程组(14) 的两个解, 且不妨设 $y_0=\theta$ 及 $\Gamma_1(x_*)$ 是满射, 则存在 $y\in Y$ 使得

$$x_* - x_{**} = \Gamma_1(x_*)y\cdot$$

于是, 由(11) 得

$$\begin{aligned} F'_y(t) &= F'_{-y}(t) = F'_{P(x_{**})-Q(x_*)-y}(t) = \\ &F'_{P(x_*+\Gamma_1(x_*)y)-Q(x_*)-y}(t) \geqslant \Delta(F'_{Q(x_*)}(\varphi(t)), F'_y(\varphi(t))) = \\ &F'_y(\varphi(t)) \geqslant \cdots \geqslant F_y(\varphi^n(t))\cdot \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 得 $F'_y(t) = H(t)$· 这意味着 $y=\theta$, 从而有 $x_* = x_{**}$· 唯一性得证·

注 4 [1] 中定理 2(即[8] 中定理 13.2.2) 唯一性的证明不正确的· 我们应将定理的原条件"存在某个 $x\in X$ 使得 $\Gamma_1(x)$ 或 $\Gamma_2(x)$ 为 Y 到 X 的满映象" 修改为"存在 $x\in U$ 使得 ……", 其中 U 是所考察的方程组的解集·

[6,10] 中解的唯一性定理也应作类似的修改·

3 Menger PN_空间中映象对公共不动点定理

定理 3 设 $(X, \mathscr{T}, \Delta)$ 是 $\mathscr{T}$_完备的 N.A.Menger PN_空间, 其中 Δ 是 H_型 t_范数, 如果映象 $S, T: X\to X$ 满足下列条件: 对任何 $t>0$,

$$F_{Sx-Ty}(t) \geqslant \Delta(F_{x-y}(\varphi(t)), \max\{F_{x-Sx}(\varphi(t)), F_{y-Ty}(\varphi(t))\}), \tag{15}$$

其中 $\varphi: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足条件(Φ)· 则 S, T 在 X 中存在唯一公共不动点, 而且对任一 $x_0\in X$ 迭代序列:

$$x_{2n+1} = S(x_{2n}), x_{2n+2} = T(x_{2n+1}),$$

$\mathscr{T}$_收敛于该不动点•

证明 令 $P(x) = x - S(x)$, $Q(x) = x - T(x)\ (\forall x \in X)$, 并取 $\Gamma_i(x) \equiv I, (i = 1, 2)$, 这里 I 为恒同映射• 下证 P, Q, Γ_i 满足定理 2 的条件•

事实上, i), iii) 成立是显然的• 对任意的 $x, y \in X$ 及 $t \geqslant 0$, 由(15) 可得

$$\begin{aligned} F_{P(x+\Gamma_1(x)y)-Q(x)-y}(t) = F_{P(x+y)-Q(x)-y}(t) = F_{Tx-S(x+y)}(t) \geqslant \\ \Delta(F_{-y}(\varphi(t)), \max\{F_{x-Tx}(\varphi(t)), F_{x+y-S(x+y)}(\varphi(t))\}) \geqslant \\ \Delta(F_{x-Tx}(\varphi(t)), F_y(\varphi(t))) = \\ \Delta(F_{Q(x)}(\varphi(t)), F_y(\varphi(t)))• \end{aligned}$$

同理可得

$$F_{Q(x+\Gamma_2(x)y)-P(x)-y}(t) \geqslant \Delta(F_{P(x)}(\varphi(t)), F_y(\varphi(t))),$$

即满足定理2 的条件 ii)• 又因 $\Gamma_1(x) = \Gamma_2(x) \equiv I$ 为满映像, 故由定理 2 知迭代序列

$$x_{2n+1} = x_{2n} - \Gamma_1(x_{2n})(Q(x_{2n})) = S(x_{2n}),$$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} - \Gamma_2(x_{2n+1})(P(x_{2n+1})) = T(x_{2n+1}),$$

$\mathscr{T}$_收敛于方程组

$$P(x) = \theta, \quad Q(x) = \theta$$

的唯一解 x_*, 即有 $x_* \in X$ 是 S, T 的唯一不动点•

[参 考 文 献]

[1] 张石生, 彭永成. 概率收缩偶与非阿基米德 Menger PN_空间中非线性方程组的解[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(11): 965~ 971.

[2] Altman M. Contractors and Contractor Directions, Theory and Applications [M]. New York: Marcel Dekker, 1977.

[3] Lee A C, Padgett W J. Random contractors with random nonlinear majorant functions[J]. Nonlinear Anal TMA, 1979, **3**: 707~ 715.

[4] Lee A C, Padgett W J. Solutions of random operator equations by random step_contractors [J]. Nonlinear Anal TMA, 1980, **4**: 145~ 151.

[5] Lee A C, Padgett W J. Random contractors and the solutions of random nonlinear equations[J]. Nonlinear Anal TMA, 1977, **1**: 173~ 185.

[6] 张石生. 概率收缩和概率赋范空间中非线性方程的解[J]. 科学通报, 1990, **35**(19): 1451~ 1454.

[7] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[8] Chang Shisheng, etc. PM_space and Nonlinear Operator Theory [M]. Chengdu: Sichuan University Press, 1994.

[9] Hadžić O. Fixed theorems for multi_valued mapping in PM_space[J]. Math Vesnik, 1979, **3**(16): 125~ 133.

[10] 方锦暄. (Φ, Δ) _型 概率收缩与 Menger PN_空间中非线性算子方程的解[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 491~ 496.

A Note on Probabilistic Contractor Couple and Solutions for a System of Nonlinear Equations in N. A. Menger PN_Spaces

Fang Jinxuan, Song Guian

(Department of Mathematics , Nanjing Normal University , Nanjing 210097, P R China)

Abstract: The concept of (, △) _type probabilistic contractor couple was introduced which simplifies and weakens the definition of probabilistic contractor couple given by Zhang Shisheng. The existence and uniqueness of the solutions for a system of nonlinear operator equations with this kind of propabilistic contractor couple in N. A. Menger PN_spaces were studied. The works improve and extend the corrosponding results by M. Altman, A. C. Lee, W. J. Padgett et al.

Key words: N A Menger PN_space; (Φ, △) _probabilistic contractor couple; selective operator; nonlinear operator equations