

文章编号: 1000-0887(2000) 06-0551-10

Krylov 子空间投影法及其在油藏数值模拟中的应用*

刘晓明, 卢志明, 刘宇陆

(上海市应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 200072)

(本刊编委刘宇陆来稿)

摘要: Krylov 子空间投影法是一类非常有效的大型线性代数方程组解法, 随着左右空间 L_m 、 K_m 的不同选取可以得到许多人们熟知的方法. 按矩阵 H_m 的不同类型, 将 Krylov 子空间方法分成两大类, 简要分析了这两类方法的优缺点及其最新进展. 将目前最为可靠实用的广义最小余量法 (GMRES) 应用于油藏数值模拟计算问题, 利用矩阵分块技术, 采用块拟消去法 (PE) 对系数阵进行预处理. 计算结果表明本文的预处理 GMRES 方法优于目前使用较多的预处理正交极小化 (ORTHMIN) 方法, 最后还讨论了投影类方法的局限和今后的可能发展方向.

关键词: Krylov 子空间投影法; 块拟消去法; 油藏数值模拟

中图分类号: O241.6 文献标识码: A

引 言

工程上, 几乎所有问题的最后求解都归结为求解线性代数方程组

$$Ax = f, \quad (1)$$

油藏数值模拟计算也不例外, 当上述方程组的阶数不太大时, 采用直接解法非常有效, 但当方程阶数很大时宜采用迭代法求解, 如点迭代、松弛迭代、共轭梯度 (CG) 方法以及正交极小化 (ORTHMIN) 方法等. 当系数阵 A 是对称正定 (SPD) 时, 结合预处理的共轭梯度法是最有效的迭代解法之一; 而当 A 是非 SPD 阵时, 问题将复杂很多, 而大多数工程计算问题中 A 是非 SPD 阵. 近几十年来, 许多作者对此作了大量研究, 提出了许多比较有效的迭代解法, 其中大多数方法属于 Krylov 子空间投影方法. Y. Saad^[1] 推广了 CG 类方法, 首次明确提出了 Krylov 子空间投影法, 该法从 70 年代起受到注意和重视, 稍后 Saad 和 Schultz^[2] 建立了投影类方法 FOM 方法 (或 Arnoldi 方法)、IOM (m) 方法、DIOM (m) 方法和广义最小余量方法 (GMRES 方法) 等与 CG 类方法之间的一些重要的等价关系. Krylov 子空间投影法是一类方法, 随着左右空间的不同取法, 可以得到许多已知的方法, 同时也提供了一条构造更多新方法的途径. 本文根据矩阵

* 收稿日期: 1999_03_15; 修订日期: 1999_12_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19872043)

作者简介: 刘晓明 (1950-), 男, 上海人, 副研究员, 校长助理.

H_m 的不同类型, 将 Krylov 子空间投影法分为两大类, 从每步迭代是否具有最优性和方法的存储量及计算量等方面对该两类方法进行了简要分析对比。然后将目前最为有效和可靠的广义最小余量法^[3](GMRES 方法)应用于油藏数值模拟计算, 并与目前油藏数值模拟中使用较多的 ORTHMIN 方法进行了对比。在 1.1 节简单介绍 Krylov 子空间投影法的基本理论, 1.2 节和 1.3 节分别简要介绍 Arnoldi 类方法和 Lanczos 类方法, 第 2 节介绍 GMRES 方法在油藏数值模拟中的应用。第 3 节是结论, 并指出了 Krylov 子空间法中几个值得进一步深入研究的方向。

1 Krylov 子空间投影法

1.1 Krylov 子空间投影法基本理论

对于大型线性代数方程组(1), 令左、右空间 L_m 和 K_m 分别为

$$L_m = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}, \quad K_m = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\},$$

其中 $v_i, w_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是各自线性无关的向量。假设 x_0 为初始迭代值, 用投影类方法寻求这样的一种近似解:

$$\begin{cases} x_m = x_0 + z_m, \quad z_m = V_m y_m \in K_m, \\ r_m = f - Ax_m = r_0 - Az_0 \perp L_m, \end{cases} \quad (2a, b)$$

其中 $r_0 = f - Ax_0$ 。令:

$$H_m = W_m^T A V_m, \quad (3)$$

如果矩阵 H_m 满足

$$\det(H_m) \neq 0,$$

则投影类方法有如下形式的解:

$$x_m = x_0 + V_m \cdot H_m^{-1} \cdot W_m^T \cdot r_0. \quad (4)$$

但是上述公式还无实际用处, 因为 K_m, L_m 都还未确定, 令 K_m, L_m 分别为 Krylov 子空间:

$$K_m(B, r_0) = \text{span}\{r_0, Br_0, \dots, B^{m-1}r_0\},$$

$$L_m(C, r_0) = \text{span}\{r_0, Cr_0, \dots, C^{m-1}r_0\},$$

其中 B, C 分别为与 A 有关的矩阵, 此时我们称该法为 Krylov 子空间投影法, 那么, 如何选取和构造 K_m, L_m 的正交基 $v_i, w_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 使得 H_m 阵具有特殊结构而易于求逆, 从而整个方法便于实施? 很容易知道, 通过 Gram-Schmidt 正交化过程得到 $v_i, w_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 并使得 H_m 为上 Hessenberg 阵, 或通过 Lanczos 双正交化过程使得 H_m 为三对角阵。事实上, 据本作者所知, 大多数的 Krylov 子空间投影法都采用上述两种正交化过程, 或与它们紧密相关。

下面将简单讨论这两种不同的方法, 并介绍其最新的进展。

1.2 基于 Arnoldi 过程的 Krylov 子空间投影法

利用 Arnoldi 过程构造右空间 $K_m = K_m(A, r_0)$ 的正交基 $V_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$, 并令 $K_m = L_m$, 此时 $H_m = V_m^T A V_m$ 为一上 Hessenberg 阵, 我们得到完全正交投影法(FOM 或 Arnoldi 法)。

方法 1 FOM(或称 Arnoldi)方法

a) 任给初值 x_0 , 计算 $r_0 = f - Ax_0$, 计算 $\beta = \|r_0\|_2, v_1 = r_0/\beta$;

b) 对 $j = 1, 2, \dots, m$, 计算 H_m 阵元素

$$h_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i), \quad i = 1, \dots, j,$$

$$h_{j+1,j} \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} \mathbf{v}_i,$$

其中 $h_{j+1,j} = \|\mathbf{v}_{j+1}\|_2$;

c) 定义 H_m 阵 $m \times m$ 的上 Hessenberg 阵, 构造近似解·

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{H}_m^{-1} \cdot \mathbf{W}_m^T \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{V}_m \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{e}_1,$$

其中

$$\mathbf{e}_1 = \overbrace{(0, 0, \dots, 1)^T}^m;$$

d) 在预定的迭代步, 计算残差模 $\mathbf{r}_m = \|\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m\|_2$;

e) 如果满足 $\mathbf{r}_m \leq \varepsilon$, 则中止迭代·

其中参数 ε 是预先给定的收敛判据· 从上述过程我们可以得到

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{H}_m + h_{m+1,m} \mathbf{v}_{m+1} \mathbf{e}_m^T, \quad \mathbf{e}_m = \overbrace{(0, \dots, 0, 1)^T}^m, \quad (5)$$

$$\|\mathbf{r}_m\|_2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m\|_2 = h_{m+1,m} |\mathbf{e}_m^T \mathbf{y}_m|. \quad (6)$$

正是由于(6)式才使得我们无需每步迭代都去显式计算 \mathbf{x}_m 就可以迭代判断是否已经收敛, 并中止迭代过程, 从而节省计算量; 同时, 从上述过程容易证明 $\mathbf{r}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 互相正交, 所以 FOM 方法至多在 n 步内得到精确解· Jea 和 Young 曾提出一个称为 ORTHRES 的 Krylov 子空间投影法, 实际上, 它与 FOM 数学上是一致的·

显然, FOM 方法需要储存所有的 $\mathbf{v}_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 当 m 增大时, 存储量的增加是巨大的, 所以实际计算时一般采用重启的 FOM(m) 方法和不完全正交 IOM(m) 方法(即要求 \mathbf{v}_{j+1} 仅与最近的 $m-1$ 个 $\mathbf{v}_i (i = j-k+2, \dots, j)$ 正交· 由于 H_m 是上 Hessenberg 阵, 我们可以比较容易地通过直接分解法(LQ 分解或 QR 分解) 求解 H_m^{-1} , 然而当系数阵不是 SPD 阵时, H_m 阵可能出现奇异使得该迭代法中断, 且每步迭代不具有最优性· Saad 和 Schultz 的 GMRES 方法同样采用 Gram-Schmidt 正交化过程, 却克服了 FOM 或 IOM(m) 方法的这个困难· GMRES 方法没有通过直接求解 H_m^{-1} 来构造近似解 \mathbf{x}_m , 而是通过求解一个最小值问题

$$\min \|\mathbf{r}_m\|_2 = \min \|\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m\|_2 = \min_{\mathbf{z}_m \in \mathbf{K}_m} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2. \quad (7)$$

通过(5)式我们可以简化上述极小值问题, 因为(5)式可以重写为

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_{m+1} \mathbf{H}_m, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ 0, \dots, 0, h_{m+1,m} \end{bmatrix}.$$

由(8)式, (7)式成为

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{r}_m\|_2 &= \min_{\mathbf{z}_m \in \mathbf{K}_m} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \\ &= \min_{\mathbf{y}_m \in \mathbf{K}_m} \|\mathbf{V}_{m+1}(\beta \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_m \mathbf{y}_m)\|_2 = \min_{\mathbf{y}_m \in \mathbf{K}_m} \|\beta \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_m \mathbf{y}_m\|_2. \end{aligned} \quad (9)$$

同样,利用 H_m 阵的特殊结构,最小值问题(9)很容易通过平面旋转变换解得(其具体过程请参见文献[3])。在 GMRES 方法中,我们每步都能简单算出残差向量的模,而不必象其他大多数 Krylov 子空间类方法那样每迭代步都求解 y_m, r_m , 从而能显著减少每步计算量;同时,采用求极小值问题来求得 y_m 使得 GMRES(m) 方法不会中断,且具有最优性,这是 GMRES 方法的又一个明显优点。基于前面同样的考虑,我们可以得到选择重启的 GMRES(m) 和截断的 TrGMRES(m)。显然 FOM 方法和 GMRES 方法是密切相关的,它们的存储量和计算量也差不多。Brown 等^[4] 导出了这两类方法残差之间相互关系式,指出这两种方法要么同时有效,要么同时失效(如 FOM(m) 出现迭代中断,则 GMRES(m) 相应出现残差下降停滞)。然而 GMRES(m) 和 FOM(m) 存在很大的不同,在 GMRES(m) 方法中左空间 $L_m = AK_m$ (因为(7)式与 $(f - Ax) \perp AK_m$ 等价),而 FOM(m) 方法中 $L_m = K_m$, 正是由于这个差别使得 GMRES(m) 方法每步迭代具有最优性,残差单调下降,而 FOM(m) 不具有这个优点。

目前油藏数值模拟中常用的 ORTHMIN(m) 方法,或称为截断的 GCR 方法,它是由 Vinsome 提出的,也属于该类方法,但他采用修改的 Gram-Schmidt 正交化过程,所构成的基关于系数矩阵 A 加权正交,即 $(v_i, Av_j) = 0 (i \neq j)$ 。容易证明,如果采用精确的数值计算且迭代不中断,则 Arnoldi 方法、ORTHMIN(m) 方法和 GMRES(m) 方法等都至多在 n 步内得到精确解。在系数矩阵 A 对称正定时, FOM 方法、ORTHMIN 方法和 GMRES 方法都退化为共轭梯度(CG)方法;在矩阵 A 对称不定情形, FOM 方法退化为下一节的 Lanczos 方法,同时与 ORTHRES 方法数学上一致;而 GMRES 方法在 A 是正定阵时,退化为 GCR 方法和 ORTHDIR 方法。Saad 和 Schultz 对这一类方法进行过归纳总结,描绘出了该类方法的许多方法之间的关系框图,指出 GCR($m-1$), ORTHDIR($m-1$), GMRES(m) 在迭代步数上是一样的,而 TrGMRES(m) 与 ORTHMIN($m-1$) 一致。当然,各个方法具体实施过程却很不相同,因而所需要的存储量、每步计算量和收敛性也不相同。GCR($m-1$) 和 ORTHDIR($m-1$) 方法存储量和每步计算量差不多,都略少于 ORTHMIN($m-1$) 方法,但它们都可能出现迭代中断,而 GMRES(m) 方法存储量差不多是 GCR($m-1$) 的一半,计算量也明显较少,特别在矩阵很稀疏、 m 较大时,每步计算量减少可达 $1/3$,且迭代不会中断。众多的数值试验还显示 GMRES(m) 方法通常具有更快的收敛速度,而理论上关于这些方法收敛速度的对比还没有作者详细讨论过。正是由于 GMRES 方法的这些优点,使得该方法已成为大型线性代数方程组的经典迭代方法之一,被广大作者应用于各个工程计算领域^[5,6,7,8,9]。

1.3 基于 Lanczos 双正交化过程的 Krylov 子空间投影法

Lanczos 双正交化过程令

$$\begin{aligned} K_m(A, r_0) &= \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}, \\ L_m(A^T, r_0) &= \text{span}\{r_0, A^T r_0, \dots, (A^T)^{m-1}r_0\}, \end{aligned}$$

这样,使得 H_m 为三对角阵。Lanczos 方法是基于 Lanczos 双正交化过程的 Krylov 子空间投影法典型例子,最早由 C. Lanczos 提出,它是共轭梯度方法在系数矩阵非对称情形的推广,为了后面叙述的方便,我们写出与之数学上一致的、更接近于共轭梯度类形式的 BiCG 方法:

方法 2 BiCG 方法(Lanczos 方法)

a) 任给初值 x_0 , 计算 $r_0 = f - Ax_0$;

b) 任选 r_0 , 使 $(r_0, r_0) \neq 0$, 并令 $\rho_0 = 1, p_0 = p_0 = 0$;

c) 对 $i = 1, 2, \dots, m$, 计算:

$$\begin{aligned}\rho_i &= (r_{i-1}, r_{i-1}), \beta_i = \rho_i / \rho_{i-1}, \\ p_i &= r_{i-1} + \beta_i p_{i-1}, \tilde{p}_i = r_{i-1} + \beta_i p_{i-1}, \\ \alpha_i &= \rho_i / (p_i, A p_i), x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i, \\ r_i &= r_{i-1} - \alpha_i A p_i, \tilde{r}_i = r_{i-1} - \alpha_i A^T p_i;\end{aligned}$$

d) 如果 $\|r_i\|_2 \leq \varepsilon$ 满足, 则迭代中止。

从上述过程可看出 r_i 和 \tilde{r}_i 满足关系式:

$$r_i = \Phi_i(A) r_0, \tilde{r}_i = \Psi_i(A^T) r_0, \quad (10)$$

其中 Φ_i, Ψ_i 为不大于 i 次的多项式。BiCG 方法与 CG 方法一样至多在 n 步内得到精确解, 但与 CG 方法相比, BiCG 方法差不多需要双倍的存储量和计算量, 过程中还出现转置阵与向量的乘积的运算, 更坏的是其残差常常出现振荡, 甚至出现迭代中断, 即 c) 步中的 $\rho_{i-1} = 0$ 或 $(p_i, A p_i) = 0$ 。当然该类方法具有明显的优点, 如具有简单的三项式循环公式, 程序编制简单, 存储量和每步计算量较少, 且在迭代进行过程中不变等。所以这类方法一直受到重视, C. C. Paige 将 Lanczos 方法用于求解法方程; 稍后 Paige 和 Saunders^[10] 将 Lanczos 方法应用于求解对称不定阵, 得到了 SYMMLQ 和 MINRES 方法。以后对这类方法所进行的改进工作主要集中在两个方面: 其一是为了避免转置阵与向量的乘积, 如 Widlund 结合矩阵分解, 提出了一个新型 Lanczos 类方法, 但它需附加求解一个逆阵; Sonneveld^[11] 则提出了共轭梯度平方 (CGS) 方法, 该法的存储量和每步计算量较 Lanczos 方法仅有轻微的增加, 且当 Lanczos 收敛时, CGS 收敛更快, 但该法的残差振荡常比 Lanczos 方法更加剧烈; Freund^[12] 对 CGS 方法稍作变化, 提出了 TFQMR (Transpose-Free QMR) 方法, 其迭代收敛比 CGS 光滑得多。其二是为了减少振荡和避免迭代中断, 如 Parlett 等^[13] 提出了 Look Ahead Lanczos 方法, 该方法在通常的 Lanczos 方法接近中断时能自动进入内循环部, 形成的 H_m 阵为块三对角阵; 在此基础上, Freund 和 Nachtigal^[14] 提出了拟最小余量 (QMR) 方法, 如同 GMRES 方法, 该法没有直接求解 H_m 的逆阵, 而是求解上节 (9) 式的极小值问题, 与 GMRES 方法不同的是, 此时 (9) 式最后一个等式不成立, 故该法被称为拟最小余量法, QMR 方法每步迭代具有拟最优性; Zhou 和 Walker^[15] 通过残差光滑化过程从 BiCG 方法也导出了 QMR 方法; 在 (10) 式中令 $r_i = \varphi_i(A) \cdot \Phi_i(A) r_0$, 其中 $\varphi_i(A) = (1 - \omega_1 A) \cdot (1 - \omega_2 A) \dots (1 - \omega_i A)$, 选取 ω_i 使 r_i 取极小值, Van Der Vorst^[16] 导出了收敛更为平滑的 Bi-CGSTAB 方法; 进而, Chan 等人^[17] 提出了结合 QMR 的 Bi-CGSTAB 方法, 数值试验表明 QMR Bi-CGSTAB 收敛性比单独的 QMR 和 Bi-CGSTAB 稍好; Ressel 等^[18] (1998) 详细讨论了 Lanczos 类方法中残差的 QMR 光滑化技术, 并导出了一些具有拟最优特性的新方法。

总的来说, Lanczos 类 Krylov 子空间投影法还处在发展研究之中, 各种方法的有效性还需更多的数值实验证明, 如能很好解决收敛振荡问题, 该类方法在工程科学计算中将极具潜力。

2 GMRES (m) 方法在油藏数值模拟中的应用

从上节可以看出, GMRES (m) 方法具有存储量、计算量较少, 每步迭代具有最优性且迭代

不会中断等优点,已成为最为可靠的 Krylov 子空间投影法,它已被许多作者成功地应用于各种工程应用领域。本节我们将该方法应用于油藏数值模拟计算。本文的目的在于检验 GMRES (m) 方法在油藏数值模拟问题的有效性,故采用比较简单的平面二维两相黑油模型^[19],其渗流控制方程为

$$\nabla \cdot \left[K \cdot \frac{K_{ro}}{\mu_o} \cdot b_o \cdot \nabla P \right] + Q_o \cdot b_o = \frac{\partial (\varphi \cdot b_o \cdot s_o)}{\partial t}, \quad (11a)$$

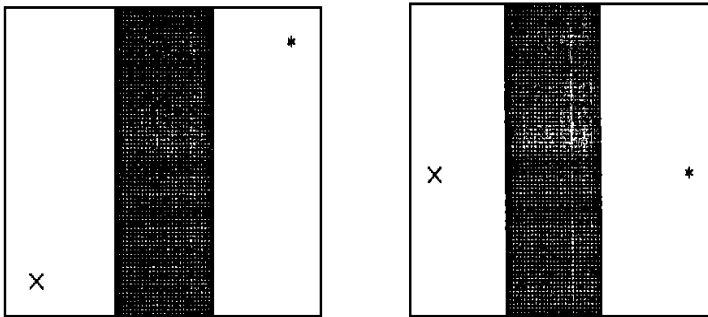
$$\Delta \left[K \cdot \frac{K_{rw}}{\mu_w} \cdot b_w \cdot \nabla P \right] + Q_w \cdot b_w = \frac{\partial (\varphi \cdot b_w \cdot s_w)}{\partial t}, \quad (11b)$$

其中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j},$$

K 、 P 和 φ 分别表示油藏绝对渗透率、油藏压力和油藏的孔隙度, K_{ro} 、 μ_o 、 b_o 、 Q_o 、 s_o 分别表示油相的相对渗透率、粘度系数、体积系数的倒数、产油井的产量和油相的饱和度等,而 K_{rw} 、 μ_w 、 b_w 、 Q_w 、 $s_w(1-s_o)$ 分别表示水相的相对渗透率、粘度系数、体积系数的倒数、注水井的产量和水相的饱和度等。模拟区域取为一方形井网单元区域,中间有一高渗层,井的位置分两种情形(如图 1a、1b)。给定油藏的初始压力和饱和度分布,要求模拟半年内的油藏动态。

我们采用全隐式离散上述方程组得到一组非线性方程组,然后应用牛顿迭代法得到一组线性代数方程组,其系数矩阵是一个 $N(N = N_x \times N_y, N_x, N_y$ 分别代表 x, y 方向的网格数) 阶的块五对角阵,其块元为 2×2 阶矩阵。为了加快迭代收敛速度,我们先对方程组的系数阵进行预处理以减小矩阵的条件数,预处理通常采用不完全分解法。本文针对油藏数值模拟问题中系数阵块对角元较大的特点,采用拟消去法^[20](PE 方法) 来得到预处理阵 M ,首先我们将系数阵重新分块,变成一个如下形式的嵌套块三对角阵



(a)

(b)

\times , $*$ 分别代表注水井和开采井,中间阴影部分为高渗透层

图 1 油藏单元模型

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{N_y-1} & a_{N_y-1} & c_{N_y-1} \\ & & & & b_{N_y} & a_{N_y} \end{pmatrix},$$

其中 $a_i = \begin{pmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix}_{N_x \times N_x},$

$$b_i = \begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & * & \\ & & & & * \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & * & \\ & & & & * \end{pmatrix},$$

* 表示 2×2 阶矩阵。采用 PE 方法我们得到如下形式的预处理阵

$$M = \begin{pmatrix} au_1 & & & & \\ bl_2 & au_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & bl_{N_y-1} & au_{N_y-1} & \\ & & & bl_{N_y} & au_{N_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & cu_1 & & & \\ & I & cu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & cu_{N_y-1} \\ & & & & I \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 I 为 2×2 阶的单位阵, 且有如下的计算公式

$$\left. \begin{aligned} au_1 &= a_1, \\ cu_i &= au_i^{-1} \cdot c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_y - 1, \\ au_i &= a_i \cdot (I + a_i^{-1} \cdot b_i \cdot a_{i-1}^{-1} \cdot c_{i-1})^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N_y, \\ bl_i &= b_i, \quad i = 2, 3, \dots, N_y. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

为了进一步简化预处理阵的计算公式, 我们曾进一步令

$$\left. \begin{aligned} au_1 &= a_1, \\ cu_i &= a_i^{-1} \cdot c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_y - 1, \\ au_i &= a_i, \quad i = 2, 3, \dots, N_y, \\ bl_i &= b_i, \quad i = 2, 3, \dots, N_y. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

计算试验结果表明, 用该预处理阵时总计算时间比前述的 PE 方法稍长, 所以我们在整个模拟计算中预处理都采用如(13)式的 PE 方法。

计算中 N_x, N_y 取两组数据, 分别为(30, 30) 和(50, 50), GMRES(m) 方法中的 m 取为 20。计算结果显示取不同疏密的网格, 对油藏压力、饱和度分布, 采取率没有什么差别; 然后我们用预处理 ORTHMIN(20) 也对这两个例子进行了计算, 结果与前面的结果吻合非常好, 但所耗的 CPU 时间却相差很大, 几种情形的结果相差都在 10 倍以上; 说明 GMRES(m) 方法确实非常有

效,且本文的预处理特别适合 GMRES (m) 方法,而预处理 ORTHMIN (20) 收敛慢也许是因为本文的预处理阵不适合 ORTHMIN 方法。表 1 是预处理 GMRES(20) 和预处理 ORTHMIN (20) 计算所耗的 CPU 时间对比。

表 1 模拟开采半年的 CPU 时间对比

CPU	预处理 GMRES(20)	预处理 ORTHMIN(20)
问题 A	10 505.4	905.6
问题 B	10 025.3	890.4

3 总结与讨论

我们简要地回顾了 Arnoldi 类和 Lanczos 类 Krylov 子空间投影法。在 Arnoldi 类方法中,它们的存储量和每步计算量随着迭代步数而增加。包括本文计算结果在内的大量数值例子和有限的理论分析表明 GMRES (m) 方法是该类方法中最可靠有效的。对于 Lanczos 类方法,主要的缺点是残差振荡剧烈,但它的存储量和每步计算量都比较少,且是固定的,公式和程序编制都比 Arnold 类方法简单,所以该类方法是目前研究的重点,已出现了很多改进方法,它们的有效性还需更多的数值实验来证明。在结束本文之前,我们对有关 Krylov 子空间方法的两个方面作些进一步的阐述:

由于 Gram-Schmidt 正交化过程产生的正交基的正交性容易受数值误差的影响而随着迭代进行而变差,从而导致 Krylov 子空间方法效果变差,因此在实际计算中常常采用修改的 Gram-Schmidt 正交化过程,并在矩阵_向量的乘积运算时采用双精度运算。Walker 曾经用 Householder 变换代替 Gram-Schmidt 过程来计算正交基,但这时整个方法的存储量和计算量有明显的增加。如何保证基的正交性又不导致存储量和计算量的剧烈增加是一个值得研究的课题。

在投影类方法中, Krylov 子空间法是最优的吗? 或者说 \mathbf{K}_m 、 \mathbf{L}_m 是否还有其他更好的选择? Saad^[21] 的 FGMRES(m) 方法就是一个拟 Krylov 子空间投影法,此方法中 $\mathbf{K}_m = \text{span}\{r_0, A \cdot M_1^{-1} r_0, \dots, (A \cdot M_i^{-1})^{i-1} r_0\}$, 其中 M_i 为每步的预处理阵 (Kasenny^[22] 的 FGMBACK(m) 方法也属于此类)。另外, Sauder 等^[23] 提出的 USYMLQ 方法和 YSYMQR 方法,虽然是 SYMMLQ 方法和 MINRES 方法的推广,但其中的 \mathbf{K}_m 、 \mathbf{L}_m 不是 Krylov 子空间,它们不属于 Krylov 子空间投影法,拟 Krylov 或非 Krylov 子空间投影法尚待进一步研究。

[参 考 文 献]

- [1] Saad Y. Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems[J]. *Mathematics of Computations*, 1981, **37**(155): 105~ 126.
- [2] Saad Y, Schultz M A. Conjugate gradient-like algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. *Mathematics of Computations*, 1985, **44**(170): 417~ 424.
- [3] Saad Y, Schultz M A. GMRES: A generalized minimum residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1986, **7**(3): 859~ 869.
- [4] Brown P N. A theoretical comparison of the ARNOLDI and GMRES algorithms[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1991, **12**(1): 58~ 78.
- [5] Desa C, Irani K M, Ribbens C J, et al. Preconditioned iterative methods for homotopy curve tracking[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1992, **13**(1): 30~ 45.
- [6] Ern A, Giovangigli V, Keyes D E, et al. Towards polyalgorithm linear system solvers for nonlinear elliptic problems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1994, **15**(3): 681~ 703.
- [7] 卢志明. 油藏数值模拟中的一种新方法[D]. 硕士论文. 上海: 复旦大学, 1993.
- [8] Tan L H, Bathe K J. Studies of finite element procedures, the conjugate gradient and GMRES methods in ADINA and ADINA_F[J]. *Computers & Structure*, 1991, **40**(2): 441~ 449.
- [9] Frommer A, Glassner U. Restarted GMRES for the shifted linear systems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1998, **19**(1): 15~ 26.
- [10] Paige C C, Saunders M A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1975, **12**(4): 617~ 629.
- [11] Sonneveld P. CGS, a fast Lanczos_type solver for nonsymmetric linear system[J]. *SIAM J Sci Statist Comput*, 1989, **10**(1): 36~ 52.
- [12] Freund R W. A Transpose-free quasi_minimal residual algorithm for non_Hermitian linear systems[J]. *Numer Maths*, 1992, **14**(2): 470~ 482.
- [13] Parlett B N, Taylor D R, Liu Z A. A look_ahead Lanczos algorithm for unsymmetric matrices[J]. *Math Comp*, 1985, (44): 105~ 124.
- [14] Freund R W, Nachtigal N M. QMR: a quasi_minimal residual methods for non_Hermitian linear systems[J]. *Numer Math*, 1991, (60): 315~ 339.
- [15] Zhou L, Walker H F. Residual smoothing techniques for iterative methods[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1994, **15**(2): 297~ 312.
- [16] Van Der Worst H A. Bi_CGSTAB: a fast and smoothly convergence variant of Bi_CG for the solution of nonsymmetric linear systems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1992, **13**(2): 631~ 644.
- [17] Chan T F, Gallopoulos E, Simoncini V, et al. A quasi_minimal residual variant of the Bi_SGSTAB algorithm for nonsymmetric systems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1994, **15**(2): 338~ 347.
- [18] Ressel K J, Gutknecht M H. QMR smoothing for Lanczos_type product methods based on three_term recurrences[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1998, **19**(1): 55~ 73.
- [19] 陈月明. 油藏数值模拟基础[M]. 山东: 石油大学出版社, 1989.
- [20] 胡家骥. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [21] Saad Y. A flexible inner_outer preconditioned GMRES algorithm[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1993, **14**(2): 461~ 469.
- [22] Kasenally E M. GMBACK: a generalised minimum backward error algorithm for nonsymmetric linear systems[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1995, **16**(3): 698~ 719.
- [23] Saunders M A, Simon H D, Yips E L. Two conjugate_gradient_type methods for unsymmetric linear

equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1988, 25(4): 927~ 940.

Krylov Subspace Projection Method and Its Application on Oil Reservoir Simulation

Liu Xiaoming, Lu Zhiming, Liu Yulu

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P R China)

Abstract: Krylov subspace projection methods are known to be highly efficient for solving large linear systems. Many different versions arise from different choices to the left and right subspaces. These methods were classified into two groups in terms of the different forms of matrix H_m , the main properties in applications and the new versions of these two types of methods were briefly reviewed, then one of the most efficient versions, GMRES method was applied to oil reservoir simulation. The block Pseudo Elimination method was used to generate the preconditioned matrix. Numerical results show much better performance of this preconditioned techniques and the GMRES method than that of preconditioned ORTHMIN method, which is now in use in oil reservoir simulation. Finally, some limitations of Krylov subspace methods and some potential improvements to this type of methods are furtherly presented.

Key words: Krylov subspace methods; block PE method; numerical oil reservoir simulation