 应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2000) 06_0573_05

# 耦合热弹性问题的一般解*

丁皓江, 国凤林, 侯鹏飞

(浙江大学 土木工程系, 杭州 310027)

(我刊编委丁皓江来稿)

摘要: 从线性化后的耦合热弹性基本方程出发, 导出了一种新型式的一般解· 在拟静态问题时, 比 Biot 的解更简单, 少一个势函数·

关 键 词: 耦合热弹性; 一般解; 拟静态问题
中图分类号: O343.6 文献标识码: A

## 引 言

当热传导方程中包含物体变形, 热弹性方程中又包含温度, 这种需要联立求解温度场和弹性场的问题称为耦合热弹性问题[1,2]· 通常考虑变形影响的热传导方程是非线性的, 如果耦合项中的温度用参考绝对温度 $T_0$ 替代, 就能使方程线性化, 在温度变化幅度和 $T_0$ 相比较小时, 这种替代不会带来太大的误差· 各向同性材料线性化后的耦合热弹性方程为:

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla e-\beta\nabla\theta+\boldsymbol{F}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$k\nabla^2\theta+h=c\frac{\partial\theta}{\partial t}+T_0\beta\frac{\partial e}{\partial t}, \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{u}=[u, v, w]$ 为位移矢量, $e$ 为体积应变, $\theta=T-T_0$ 为温差, $T$ 是绝对温度, $\boldsymbol{F}$ 是单位体积力矢量, $\rho$ 是密度, $t$ 是时间, $\lambda$ 和 $\mu$ 是 Lamé 参数, $\beta=(3\lambda+2\mu)\alpha$ 是热应力系数, $\alpha$ 是线热膨胀系数, $k$ 为导热系数, $c=\rho c_v$, $c_v$ 是等容比热, $h$ 为热源强度, 以及

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot$$

当不计热源和体积力时, 在书[2]中将位移矢量作 Helmholtz 分解, 即

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla\times\varphi\cdot \tag{3}$$

将式(3)代入(1)和(2)之后, 推导得到 $\varphi$ 满足波动方程, 而 $\phi$ 满足一个四阶偏微分方程, 两者方程的阶数之和为 10 阶显然大于(1)和(2)的方程阶数之和 8 阶, 推导还得到温差 $\theta$ 也可用 $\phi$ 和 $\varphi$ 来表示·

对于拟静态问题, 不计(1)中的惯性项, 同时不计体积力和热源时, Biot 推广 Papkovitch 解, 将位移写成如下形式:

$$\boldsymbol{u}=B\phi-\nabla(\phi_0+\boldsymbol{r}\cdot\phi), \tag{4}$$

* 收稿日期: 1999_02_08; 修订日期: 1999_12_13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872060)
作者简介: 丁皓江(1934~ ), 男, 江苏常州人, 教授.

$$B = 2(\lambda + 2\mu + \beta^2 T_0/c)/(\lambda + \mu + \beta^2 T_0/c) \cdot \tag{5}$$

式中 $\psi$ 满足调和方程, $\psi_0$ 满足一个四阶偏微分方程, 或 $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2$, 而 $\psi_1$ 和 $\psi_2$ 分别满足调和方程和标准热传导方程• 显然 $\psi$ 和 $\psi_0$ 两者方程的阶数之和也是 10 阶• 温差 $\theta$ 也可用 $\psi_0$ 和 $\psi$ 来表示[3]• 解(4) 的完备性首先由 Verruijt[4] 证明, 此后青春炳和王敏中[5] 给出了一个简单得多的证明•

本文从方程(1) 出发, 引入位移函数表示位移并简化方程, 推导得到位移 $\boldsymbol{u}$ 和温差 $\theta$ 可以用 3 个位移函数表示, 其中两个位移函数都满足同一波动方程, 另一个位移函数满足一个四阶的偏微分方程• 在拟静态时, 这个四阶偏微分方程可以分解为一个调和方程和一个标准热传导方程, 所有这些方程的阶数之和与方程(1) 和(2) 的阶数之和一样也是 8 阶•

## 1　运动方程的一般解

设

$$u = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x},\quad v = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y},\quad w = w(x, y, z, t) \cdot \tag{6}$$

将式(6) 代入不计体力和热源的(1) 和(2), 从(1) 的第一和第二个方程, 得到

$$\left(\mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi_0 = 0, \tag{7}$$

$$\mu \nabla^2 G - \rho \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + (\lambda + \mu)\left(\Lambda G + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \beta\theta = 0, \tag{8}$$

式中 $\Lambda = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$• 而式(1) 的第三个方程和式(2) 则呈如下形式:

$$\mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda G + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \beta \frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$k \nabla^2 \theta = c \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda G + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \tag{10}$$

将式(8) 对 $z$ 求偏导数后与式(9) 相减, 得

$$\left(\mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial z} - w\right) = 0 \cdot \tag{11}$$

由式(11) 得到

$$w = \frac{\partial G}{\partial z} - \varphi_4, \tag{12}$$

$$\left(\mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi_4 = 0 \cdot \tag{13}$$

将式(12) 代入(8), 得

$$\theta = \frac{1}{\beta}\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 G - \rho \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial \varphi_4}{\partial z}\right] \cdot \tag{14}$$

将式(12) 和(14) 所示的 $w$ 和 $\theta$ 代入式(10), 得到

$$k\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\nabla^2 G - [c(\lambda + 2\mu) + T_0\beta^2]\nabla^2 \frac{\partial G}{\partial t} + \rho c \frac{\partial^3 G}{\partial t^3} =$$

$$k(\lambda + \mu)\nabla^2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} - [c(\lambda + \mu) + T_0\beta^2]\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial z \partial t} \cdot \tag{15}$$

方程(15) 的解可写成如下形式: $G = G_0 + G_1$, 其中 $G_0$ 是齐次方程的通解, 而 $G_1$ 是非齐次方程的特解, 它是 $\varphi_4$ 的函数• 从(12) 和(14) 看到 $w$ 和 $\theta$ 只与 $G$ 和 $\varphi_4$ 有关, 由式(6) 前两式看到 $u$ 和 $v$ 与 $G$ 和 $\varphi_0$ 有关•

## 2 两种特殊情形

### 2.1 拟静态问题

令 $\rho = 0$, 则上一节中的有关公式得到简化:

$$\nabla^2\varphi_0 = 0, \quad \nabla^2\varphi_4 = 0, \tag{7'}$$

$$\theta = \frac{1}{\beta}\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 G - (\lambda + \mu)\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\right], \tag{14'}$$

$$k(\lambda + 2\mu)\nabla^2\nabla^2 G - [c(\lambda + 2\mu) + T_0\beta^2]\nabla^2\frac{\partial G}{\partial t} = - [c(\lambda + \mu) + T_0\beta^2]\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial z\partial t}. \tag{15'}$$

显然方程(15)′的解为

$$G = G_0 + \frac{z\varphi_4}{B}. \tag{16}$$

式中 $B$ 如式(5) 式所示, 而 $G_0$ 满足如下方程

$$\nabla^2\left(K_0\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)G_0 = 0, \tag{17}$$

$$K_0 = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{c(\lambda + 2\mu) + T_0\beta^2}. \tag{18}$$

方程(17) 的解又可写成如下形式:

$$G_0 = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{19}$$

式中 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 满足的方程分别为

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \tag{20}$$

$$\left(K_0\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2 = 0. \tag{21}$$

令 $\varphi_4 = B\varphi_3$, 于是位移和温差的一般解具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1 + \varphi_2 + z\varphi_3), \\
v &= \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1 + \varphi_2 + z\varphi_3), \\
w &= -B\varphi_3 + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_1 + \varphi_2 + z\varphi_3), \\
\theta &= \frac{1}{\beta}\left[\frac{(\lambda + 2\mu)}{K_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + [2(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)B]\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中 $\varphi_2$ 满足标准的热传导方程(21), $\varphi_0$、$\varphi_1$ 和 $\varphi_3$ 满足调和方程.

### 2.2 温差 $\theta$ 与 $e^{pt}$ 成正比的动力问题

设

$$\left.\begin{aligned}
&\theta = \Theta(x, y, z)e^{pt}, \quad u = U(x, y, z)e^{pt}, \quad v = V(x, y, z)e^{pt}, \\
&w = W(x, y, z)e^{pt}, \quad \varphi_i = \Phi_i(x, y, z)e^{pt}, \quad G = G(x, y, z)e^{pt}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

将(23) 代入第 1 节有关公式, 则有

$$(\mu\nabla^2 - \rho p^2)\Phi_i = 0, \qquad (i = 0, 4), \tag{7'', 13''}$$

$$\Theta = \frac{1}{\beta}\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2 G - \rho p^2 G - (\lambda + \mu)\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right], \tag{14''}$$

$$a\nabla^2\nabla^2 G - b\nabla^2 G + lG = m\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}, \tag{15$''$}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &a = k(\lambda + 2\mu),\ l = \rho cp^3,\ b = k\rho p^2 + [c(\lambda + 2\mu) + T_0\beta^2]p, \\ &m = k(\lambda + \mu)\rho p^2/\mu - [c(\lambda + \mu) + T_0\beta^2]p \cdot \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

式(15)$''$的解可写成如下形式:

$$G = \Phi_1 + \Phi_2 + \frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}, \tag{25}$$

式中

$$A = \left[a\left(\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^2 - b\frac{\rho p^2}{\mu} + l\right]\Big\backslash m, \tag{26}$$

以及 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 满足如下方程

$$(\nabla^2 - s_i^2)\Phi_i = 0, \qquad (i = 1, 2), \tag{27}$$

而 $s_i^2(i = 1, 2)$ 是下列方程的两个根

$$as^4 - bs^2 + l = 0 \cdot \tag{28}$$

令 $\Phi_4 = A\Phi_3$, 于是可以写出 $U$、$V$、$W$ 和 $\Theta$ 用 $\Phi_i(i = 0, 1, 2, 3)$ 表示的一般解, 形式与(22)一致, 只是 $B$ 换成 $A \cdot$

# 3 应 用

考虑表面自由的半空间, 表面温度按 $T = f(r)e^{pt}$ 变化, 按拟静态问题处理, 一般解式(22)在柱坐标中为:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{\partial \varphi_0}{r\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2 + z\varphi_3), \\ u_\varphi &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial}{r\partial \varphi}(\varphi_1 + \varphi_2 + z\varphi_3), \\ w &= -B\varphi_3 + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_1 + \varphi_2 + z\varphi_3), \\ \theta &= \frac{1}{\beta}\left\{\frac{(\lambda + 2\mu)}{K_0}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + [2(\lambda + 2\mu) - (\lambda + \mu)B]\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right\} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

显然这是一个轴对称问题, 可设一般解中的 $\varphi_0 = 0$、$\varphi_1 = \varphi_1^* e^{pt}$、$\varphi_2 = \varphi_2^* e^{pt}$、$\varphi_3 = \varphi_3^* e^{pt}$, $\varphi_1^*$、$\varphi_3^*$ 仍为调和函数, $\varphi_2^*$ 满足$(K_0\nabla^2 - p)\varphi_2^* = 0$, 其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot$$

通过 Hankel 变换可得 $\varphi_1^*$, $\varphi_2^*$, $\varphi_3^*$ 有如下形式的解:

$$\varphi_1^* = \int_0^\infty c_1 e^{-\rho z} J_0(\rho r)\rho d\rho, \quad \varphi_2^* = \int_0^\infty c_2 e^{-\sqrt{\rho^2 + p/K_0}\,z} J_0(\rho r)\rho d\rho,$$

$$\varphi_3^* = \int_0^\infty c_3 e^{-\rho z} J_0(\rho r)\rho d\rho,$$

式中 $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$, $c_3(\rho)$ 为待定函数 ·

将 $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ 代入一般解和下列本构关系:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) - \beta\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_z) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\varphi - \beta\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z - \beta\theta, \\ \tau_{\varphi z} &= \mu\gamma_{\varphi z},\ \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz},\ \tau_{r\varphi} = \mu\gamma_{r\varphi} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

利用边界条件 $\sigma_z|_{z=0} = \tau_{zr}|_{z=0} = 0$, $\theta|_{z=0} = f(r)e^{pt}$, 及 Hankel 变换的反演定理[6] 可得如下

确定待定函数的联立方程组:

$$\left.\begin{aligned}&2c_1+2c_2+Bc_3=0,\\&2\rho c_1+\left(\rho+\sqrt{\rho^2+p/K_0}\right)c_2+(B-1)c_3=0,\\&\frac{p(\lambda+2\mu)}{K_0}c_2-[2(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)B]\rho c_3=\beta\int_0^\infty f(r)J_0(\rho r)r\mathrm{d}r\cdot\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

解此方程组即可确定待定函数 $c_1(\rho)$, $c_2(\rho)$, $c_3(\rho)$·

## [参 考 文 献]


[1] Nowinski J N. Theory of Thermoelasticity With Applications[M]. New York: Sijhoff & Noordhoff International Publishers, 1978, 135~ 141.

[2] 严宗达, 王洪礼. 热应力[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993, 363~ 367.

[3] Biot M A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. J Appl Phys, 1956, **27**(3): 240~ 253.

[4] Verruijt A. The completeness of Biot's solution of the coupled thermoelastic problem[J]. Quart Appl Math, 1969, **26**(4): 485~ 490.

[5] 青春炳, 王敏中. 热弹性通解完备性的一个新证明[J]. 应用力学学报, 1989, **6**(4): 80~ 82.

[6] Sneddon I N. 富利叶变换[M]. 北京: 科学出版社, 1958, 55~ 68.


# General Solutions of Coupled Thermoelastic Problem


Ding Haojiang, Guo Fenglin, Hou Pengfei

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P R China)



**Abstract:** A new type of general solution of thermoelasticity is derived from the linearized basic equations for coupled thermoelastic problem. In the case of quasi_static problem, the present general solution is simpler since it involves one less potential function than Biot's solution.



**Key words:** coupled thermoelasticity; general solution