文章编号: 1000_0887(2000) 06_0578_07

非紧广义凸空间内的拟平衡问题*

丁协平

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

(我刊编委丁协平来稿)

摘要: 利用作者得到的一个新的不动点定理, 在非紧广义凸空间内证明了拟平衡问题的几个新的平衡存在性定理• 这些定理改进和推广了最近文献中许多已知结果•

关 键 词: 不动点; 拟平衡问题; 紧局部交性质; 广义凸空间
中图分类号: O176.3; O177.92 文献标识码: A

引 言

设 X 和 Y 是非空集, 2^X 是 X 的一切子集的族• 设 $T: X \to Y$ 是单值映象, $A: X \to 2^X$ 是集值映象和 $f: X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是一函数• 拟平衡问题 QEP(T, A, f) 是寻求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ f(\hat{x}, T\hat{x}) \leqslant f(y, T\hat{x}), \qquad \forall y \in A(\hat{x}) \text{•} \end{cases} \tag{1}$$

此问题首先由 Noor 和 Oettli[1] 引入和研究• Cubiotti[2] 和 Ding[3] 在有限维空间 $\mathbf{R}^n$ 和拓扑矢量空间内对 QEP(T, A, f) 证明平衡点的某些存在性定理•

最近 Lin 和 Park[4] 研究了下面拟平衡问题 QEP(A, f), 即寻求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ f(y, \hat{x}) \geqslant 0, \qquad \forall y \in A(\hat{x}), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $A: X \to 2^X$ 和 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$• 他们在没有线性结构的紧 G_凸空间内对 QEP(A, f) 证明了某些平衡存在性定理•

QEP(T, A, f)(1) 和 QEP(A, f)(2) 包含了很多最优化问题, Nash 型平衡问题, 拟变分不等式问题, 拟补问题和其他问题作为特殊情形, 参见[1～4] 和其中的参考文献•

在本文内, 应用作者[5] 在非紧 G_凸空间内得到的一个新的不动点定理, 在非紧 G_凸空间内对 QEP(T, A, f)(1) 和 QEP(A, f)(2) 证明几个新的平衡点的存在定理• 这些定理包含了这一领域中的很多关键的已知结果作为特殊情形•

1 预 备 知 识

令 X 和 Y 是两个非空集• 我们分别用 2^Y 和 $\mathscr{F}(X)$ 表 Y 的一切子集的族和 X 的一切非

* 收稿日期: 1999_04_02; 修订日期: 1999_12_12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059)
作者简介: 丁协平(1938～) , 男, 教授, 已发表论文 200 余篇, 获省部级奖 6 项.

空有限子集的族• 如果 X 是拓扑空间, 称 X 的子集 A 在 X 内是紧开(紧闭)的, 如果对 X 的任意非空紧子集 K, $A\cap K$ 在 K 内是开(闭)的• 下面概念由 Ding[6] 引入• 对任意给定的 X 的非空子集 A, 我们定义 A 的紧闭包 $\mathrm{ccl}(A)$ 和 A 的紧内部 $\mathrm{cint}(A)$ 如下:

$$\mathrm{ccl}(A)=\bigcap\{B\subset X: A\subset B \text{ 且 } B \text{ 在 } X \text{ 内是紧闭的}\},$$
$$\mathrm{cint}(A)=\bigcup\{B\subset X: B\subset A \text{ 且 } B \text{ 在 } X \text{ 内是紧开的}\}•$$

容易看出 $\mathrm{cint}(A)(\mathrm{ccl}(A))$ 在 X 内是紧开(紧闭)的, 且对 X 的每一满足 $A\cap K\neq\varnothing$ 的非空紧子集 K, 我们有 $\mathrm{ccl}(A)\cap K=\mathrm{cl}_K(A\cap K)$ 和 $\mathrm{cint}(A)\cap K=\mathrm{int}_K(A\cap K)$, 其中 $\mathrm{cl}_K(A\cap K)$ 和 $\mathrm{int}_K(A\cap K)$ 分别表 $A\cap K$ 在 K 内的闭包和内部• 显然 X 的一子集 A 在 X 内是紧开(紧闭)的当且仅当 $\mathrm{cint}(A)=A$ $(\mathrm{ccl}(A)=A)$• 如果 X 和 Y 是两个拓扑空间和 $G: X\to 2^Y$ 是一集值映象, 称 G 是转移紧开值(转移紧闭值)的如果对每一 $x\in X$ 和对 Y 的每一满足 $G(x)\cap K\neq\varnothing$ 的紧子集 K, $y\in G(x)\cap K$ $(y\notin G(x)\cap K)$ 蕴含存在一点 $x'\in X$ 使得 $y\in\mathrm{int}_K(G(x')\cap K)(y\notin\mathrm{cl}_K(G(x')\cap K))$• 显然每一个开值(闭值)映象 $G: X\to 2^Y$ 是转移开值(转移闭值)的(见 Tian[7] 的定义 6 和 7)且也是紧开值(紧闭值)的• 每一转移开值(转移闭值)映象 $G: X\to 2^Y$ 是转移紧开值(转移紧闭值)的并且其逆一般不真• 称映象 $G: X\to 2^Y$ 在 X 上有局部交性质如果对每一 $x\in X$ 具有 $G(x)\neq\varnothing$, 存在 x 在 X 内的开邻域 $N(x)$ 使得 $\bigcap_{z\in N(x)}G(z)\neq\varnothing$• (见 Wu 和 Shen[8])• [8, p.63] 的例子说明具有局部交性质的集值映象可以没有开逆值性质• 现在我们对集值映象引入下面新概念• 称 $G: X\to 2^Y$ 有紧局部交性质, 如果对 X 的每一非空紧子值 K 和对每一 $x\in K$ 具有 $G(x)\neq\varnothing$, 存在 x 在 X 内的开邻域 $N(x)$ 使得 $\bigcap_{z\in N(x)\cap K}G(x)\neq\varnothing$• 显然如果 G 有紧局部交性质, 则 G 在 K 上的限制 $G|_K: K\to 2^Y$ 有局部交性质, 每一具有局部交性质的集值映象有紧局部交性质且其逆一般不真•

下面广义凸(或 G_凸)空间概念由 Park 和 Kim[9, 10] 引入• 称 $(X, D; \Gamma)$ 是一 G_凸空间如果 X 是一拓扑空间, D 是 X 的非空子集和 $\Gamma: \mathscr{F}(D)\to 2^Y$ 使得

(1) 对 $A, B\in\mathscr{F}(D)$, $A\subset B$ 蕴含 $\Gamma(A)\subset\Gamma(B)$;

(2) 对每一 $A\in\mathscr{F}(D)$ 具有 $|A|=n+1$, 存在连续映象 $\phi_A: \Delta_n\to\Gamma(A)$ 使得 $B\in\mathscr{F}(A)$ 具有 $|B|=J+1$ 蕴含 $\phi_A(\Delta_J)\subset\Gamma(B)$, 其中 $|A|$ 表 A 的基数, Δ_n 是 n_维标准单形和 Δ_J 表对应于 $B\in\mathscr{F}(A)$ 的 Δ_n 的面•

当 $D=X$ 时, 我们记 $(X, X; \Gamma)$ 为 (X, Γ)• 令 $(X, D; \Gamma)$ 为 G_凸空间和 $K\subset X$• 称 K 是 G_凸的如果对每一 $N\in\mathscr{F}(D)$, $N\subset K$ 蕴含 $\Gamma(N)\subset K$• 一个函数 $f: K\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ 称为是 G_拟凹(G_拟凸)的如果对每一 $\lambda\in\mathbf{R}$, 集 $\{x\in K: f(x)>\lambda\}$ $(\{x\in K: f(x)<\lambda\})$ 是 G_凸的• G_凸空间概念是许多具有各种凸结构的拓扑空间的推广, 它包含了 Komiya[11] 和 Lassonde[12] 的凸空间, Horvath[13] 的伪凸空间, Horvath[14, 15] 的 H_空间等作为特殊情形• 详情参见 Park 和 Kim[9, 10]•

为了证明主要定理我们需要下面结果, 它是 Ding[16] 的引理 1.1•

引理 1.1　设 X 和 Y 是拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 $G: X\to 2^Y$ 是集值映象使得对每一 $x\in K$, $G(x)\neq\varnothing$• 则下列条件等价:

(Ⅰ) G 有紧局部交性质;

(Ⅱ) 对每一 $y\in Y$, 存在 X 的开子集 O_y (可以是空集) 使得 $O_y\cap K\subset G^{-1}(y)$ 且有 $K=\bigcup_{y\in Y}(O_y\cap K)$;

(Ⅲ) 存在集值映象 $F: X \to 2^Y$ 使得对每一$y \in Y$, $F^{-1}(y)$ 是开集或空集, $F^{-1}(y) \cap K \subset G^{-1}(y)$, $\forall y \in Y$, 且有 $K = \bigcup_{y \in Y}(F^{-1}(y) \cap K)$;

(Ⅳ) 对每一 $x \in K$, 存在 $y \in Y$ 使得$x \in \mathrm{cint}\, G^{-1}(y) \cap K$ 且有$K = \bigcup_{y \in Y}(\mathrm{cint}\, G^{-1}(y) \cap K) = \bigcup_{y \in Y}(G^{-1}(y) \cap K)$;

(Ⅴ) $G^{-1}: Y \to 2^X$ 是转移紧开值的•

注 1.1 引理 1.1 改进和推广了 Ding[17, 18] 的引理 1•

引理 1.2 设 X 和 Y 是拓扑空间, D 是X 的非空闭子集和 $\Phi, \Psi: X \to 2^Y$ 是两个集值映象具有非空值使得对每一 $x \in X$, $\Phi(x) \subset \Psi(x)$• 假设 $\Phi^{-1}, \Psi^{-1}: Y \to 2^X$ 在 Y 上是转移紧开值的• 则由下式定义的映象 $G: X \to 2^Y$:

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in D, \\ \Psi(x), & x \in X \setminus D \end{cases}$$

使得 $G^{-1}: Y \to 2^X$ 也在 Y 上是转移紧开值的•

证明 因 $\Phi(x) \subset \Psi(x)$ 对每一$x \in X$ 成立, 对任意给定的$y \in Y$, 有$\Phi^{-1}(y) \subset \Psi^{-1}(y)$•由此推得

$$\begin{aligned} G^{-1}(y) = &\{x \in X: y \in G(x)\} = \\ &\{x \in D: y \in \Phi(x)\} \cup \{x \in X \setminus D: y \in \Psi(x)\} = \\ &(D \cap \Phi^{-1}(y)) \cup [(X \setminus D) \cap \Psi^{-1}(y)] = \\ &[(D \cap \Phi^{-1}(y)) \cup (X \setminus D)] \cap [(D \cap \Phi^{-1}(y)) \cup \Phi^{-1}(y)] = \\ &[X \cap (\Phi^{-1}(y) \cup (X \setminus D))] \cap [(D \cup \Psi^{-1}(y)) \cap (\Phi^{-1}(y) \cup \Psi^{-1}(y))] = \\ &[\Phi^{-1}(y) \cup (X \setminus D)] \cap \Psi^{-1}(y) = \\ &\Phi^{-1}(y) \cup [(X \setminus D) \cap \Psi^{-1}(y)]• \end{aligned}$$

因此对 X 的每一非空紧子集K, 有

$$G^{-1}(y) \cap K = (\Phi^{-1}(y) \cap K) \cup [(X \setminus D) \cap \Psi^{-1}(y) \cap K]•$$

如果 $x \in G^{-1}(y) \cap K$, 则我们有或 $x \in \Phi^{-1}(y) \cap K$ 或$x \in (X \setminus D) \cap \Psi^{-1}(y) \cap K$• 如果 $x \in \Phi^{-1}(y) \cap K$, 注意到 Φ^{-1} 在 Y 上是转移紧开值的, 存在 $y' \in Y$ 使得

$$x \in \mathrm{int}_K(\Phi^{-1}(y') \cap K) \subset \mathrm{int}_K(G^{-1}(y') \cap K)•$$

如果 $x \in (X \setminus D) \cap \Psi^{-1}(y) \cap K$, 注意到$(X \setminus D)$ 是开集和 Ψ^{-1} 是转移紧开值的, 使用类似的论证, 我们能证明存在 $y' \in Y$ 使得$x \in \mathrm{int}_K(G^{-1}(y') \cap K)$• 这就证明了 G^{-1} 在 Y 上是转移紧开值的•

注 1.2 引理 1.2 改进了 Ding[3] 的引理 1.4 和 Cubiotti[2] 的命题 4.1•

下面结果是Ding[5] 的定理 2.3 的特殊情形•

定理 1.1 设 (X, Γ) 是G_凸空间和K 是X 的非空紧子集• 令 $G: X \to 2^X$ 是集值映象使得

(ⅰ) G 满足引理 1.1 中的条件(Ⅰ) ~ (Ⅴ) 之一;

(ⅱ) 对每一 $x \in X$, $G(x)$ 是非空G_凸的;

(ⅲ) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集L_N 包含N 使得

$$L_N \setminus K \subset \bigcup_{y \in L_N} \mathrm{cint}(G^{-1}(y))•$$

则存在一点$\hat{x} \in X$使得$\hat{x} \in G(\hat{x})$。

注 1.3　如果X是紧的，由令$X = K = L_N$，对每一$N \in \mathscr{F}(X)$，条件(iii)被自动满足。因此定理 1.1 推广了 Lin 和 Park[4] 的定理 2 到非紧设置。

2　QEP(T, A, f) 和 QEP(A, f) 的平衡存在性

我们首先证明 QEP(T, A, f) 的下面平衡存在性定理。

定理 2.1　设(X, Γ)是 G_凸空间，K是X的非空紧子集和Y是非空集。令$T: X \to Y$，$A: X \to 2^X$和$f: X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$使得

(i) A 有非空 G_凸值且满足引理 1.1 中的条件(Ⅰ)～(Ⅴ)之一；

(ii) 集$D = \{x \in X: x \in A(x)\}$在$X$内是闭的；

(iii) 由下式定义的映象$P, B: X \to 2^X$：

$$P(x) = \{y \in X: f(x, Tx) - f(y, Tx) > 0\},$$
$$B(x) = \{y \in A(x): f(x, Tx) - f(y, Tx) > 0\}$$

都有紧局部交性质；

(iv) 对每一$x \in X$，$y \mapsto f(y, Tx)$是 G_拟凸的；

(v) 对每一$N \in \mathscr{F}(X)$，存在X的非空紧 G_凸子集L_N包含N使得对每一$x \in L_N \setminus K$，如果$x \notin D$，则存在$y \in L_N$使得$x \in \operatorname{cint} A^{-1}(y)$；如果$x \in D$，则存在$y \in L_N$使得$x \in \operatorname{cint}(\{x \in A^{-1}(y): f(x, Tx) - f(y, Tx) > 0\})$。则存在$\hat{x} \in X$使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in A(\hat{x}), \\ f(\hat{x}, T\hat{x}) \leqslant f(y, T\hat{x}), \qquad \forall y \in A(\hat{x}), \end{cases}$$

即$\hat{x}$是 QEP(T, A, f) 的平衡点。

证明　定义映象$G: X \to 2^X$如下：

$$G(X) = \begin{cases} B(x), & x \in D, \\ A(x), & x \in X \setminus D. \end{cases}$$

从条件(iii)和引理 1.1 推得$B^{-1}, A^{-1}: X \to 2^X$都在$X$上是转移紧开值的。注意到$B(x) \subset A(x)$对每一$x \in X$成立，由引理 1.2，$G^{-1}: X \to 2^X$也在$X$上是转移紧开值的。由假设(i)和(iv)，对每一$x \in X$，$G(x)$是 G_凸的。现在假设对每一$x \in D$，$B(x) = A(x) \cap P(x) \neq$ ƒ，则对每一$x \in X$，由(i)，$G(x) \neq$ ƒ。容易看出条件(v)蕴含定理 1.1 的条件(iii)成立。因此定理 1.1 的所有条件均被满足。由定理 1.1，存在$\hat{x} \in X$得$\hat{x} \in G(\hat{x})$。由D和 G 的定义，我们必有$\{x \in X: x \in G(x)\} \subset D$。由此推得$\hat{x} \in A(\hat{x}) \cap P(\hat{x}) \cap D$。特别我们得到$f(\hat{x}, T\hat{x}) - f(\hat{x}, T\hat{x}) > 0$，这是不可能的。所以存在$\hat{x} \in D$使得$A(\hat{x}) \cap P(\hat{x}) =$ ƒ，即是$\hat{x} \in A(\hat{x})$和$f(\hat{x}, T\hat{x}) \leqslant f(y, T\hat{x})$对一切$y \in A(\hat{x})$成立。这就完成了证明。

注 2.1　定理 2.1 在更弱的假设下改进和推广了 Ding[3] 的定理 2.1 和 Cubiotti[2] 的定理 4.2 从拓扑矢量空间到没有线性结构的非紧 G_凸空间。

定理 2.2　设(X, Γ)是 G_凸空间，K是X的非空紧子集和Y是拓扑空间。设$T: X \to Y$，$A: X \to 2^X$和$f: X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$使得

(i) A 有非空 G_凸值使得$A^{-1}: X \to 2^X$在X上是紧开值的；

(ii) 集$D = \{x: x \in A(x)\}$在X内是闭的；

(iii) T 和 f 是连续的使得对每一 $x \in X$, $y \mapsto f(y, \mathrm{T}x)$ 是 G_拟凸的;

(iv) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$ 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D$, 则 $\mathrm{A}(x) \cap L_N \neq \emptyset$; 如果 $x \in D$, 则存在 $y \in \mathrm{A}(x) \cap L_N$ 满足 $f(y, \mathrm{T}x) < f(x, \mathrm{T}x)$•

则 QEP(T, A, f) 有一平衡点 $\hat{x} \in X$•

证明　定义 $\mathrm{P}: X \to 2^X$ 如下:

$$\mathrm{P}(x) = \{y \in X: f(x, \mathrm{T}x) - f(y, \mathrm{T}x) > 0\}, \qquad \forall x \in X•$$

因为 T 和 f 都是连续映象, 我们有对每一 $y \in X$ $\mathrm{P}^{-1}(y) = \{x \in X: f(x, \mathrm{T}x) - f(y, \mathrm{T}x) > 0\}$ 在 X 内是开的且因此 $\mathrm{P}^{-1}: X \to 2^X$ 有紧开值• 由假设 A^{-1} 有紧开值且因此 $\mathrm{B}^{-1} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{P})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cap \mathrm{P}^{-1}$ 也有紧开值• 由引理 1.1, 定理 2.1 的条件(iii) 被满足• 由条件(iv), 对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D$ 我们有 $\mathrm{A}(x) \cap L_N \neq \emptyset$ 且因此存在 $y \in L_N$ 使得 $x \in \mathrm{A}^{-1}(y) = \mathrm{cint}\, \mathrm{A}^{-1}(y)$ 因为 $\mathrm{A}^{-1}(y)$ 是紧开的; 如果 $x \in D$ 我们有 $y \in L_N$ 和 $x \in \mathrm{A}^{-1}(y) \cap \mathrm{P}^{-1}(y) = \mathrm{cint}(\mathrm{A}^{-1}(y) \cap \mathrm{P}^{-1}(y)) = \mathrm{cint}(\{x \in \mathrm{A}^{-1}(y): f(x, \mathrm{T}x) - f(y, \mathrm{T}x) > 0\})$, 因为 $\mathrm{A}^{-1}(y) \cap \mathrm{P}^{-1}(y)$ 是紧开的• 因此定理 2.1 的条件(v) 被满足• 容易看出定理 2.1 的一切条件被满足• 由定理 2.1 知定理 2.2 的结论成立•

定理 2.3　设 (X, Γ) 是 G_凸空间, K 是 X 的非空紧子集, 设 $\mathrm{A}: X \to 2^X$ 和 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 使得

(i) A 有非空 G_凸值使得 $\mathrm{A}^{-1}: X \to 2^X$ 有紧开值和由令 $(\mathrm{cl}\,\mathrm{A})(x) = \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(x)$ 定义的映象 $\mathrm{cl}\,\mathrm{A}: X \to 2^X$ 是上半连续的;

(ii) f 是连续函数使得对每一 $x \in X$, $y \mapsto f(y, x)$ 是 G_拟凸的;

(iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 如果 $x \notin D = \{x \in X: x \in \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(x)\}$, 则 $\mathrm{A}(x) \cap L_N \neq \emptyset$; 如果 $x \in D$, 则存在 $y \in \mathrm{A}(x) \cap L_N$ 满足 $f(y, x) < f(x, x)$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(\hat{x})$ 和 $f(\hat{x}, \hat{x}) \leqslant f(y, \hat{x})$ 对一切 $y \in \mathrm{A}(\hat{x})$ 成立•

如果再假设对一切 $x \in X$, $f(x, x) \geqslant 0$, 则我们有 $\hat{x} \in \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(\hat{x})$ 和 $f(y, \hat{x}) \geqslant 0$, $\forall y \in A(\hat{x})$, 即 $\hat{x}$ 是 QEP(A, f)(2) 的一平衡点•

证明　因为 $\mathrm{cl}\,\mathrm{A}: X \to 2^X$ 是上半连续的具有闭值, 集 $D = \{x \in X: x \in \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(x)\}$ 必是闭集• 由令 $Y = X$, T 是恒等映象和 D 代替 D, 容易看出定理 2.2 的一切条件被满足• 由定理 2.2, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(\hat{x})$ 和 $f(\hat{x}, \hat{x}) \leqslant f(y, \hat{x})$, $\forall y \in \mathrm{A}(\hat{x})$• 如果再设对一切 $x \in X$, $f(x, x) \geqslant 0$, 则我们有 $\hat{x} \in \mathrm{cl}\,\mathrm{A}(\hat{x})$ 和 $f(y, \hat{x}) \geqslant 0$, $\forall y \in \mathrm{A}(\hat{x})$, 即 $\hat{x}$ 是 QEP(A, f)(2) 的平衡点•

注 2.2　如果 (X, Γ) 是紧 G_凸空间, 由令 $X = K = L_N$ 对一切 $N \in \mathscr{F}(X)$, 则定理 2.3 的条件(iii) 被平凡满足• 因此定理 2.3 推广了 Lin 和 Park[4] 的定理 4 到非紧设置•

由定理 2.3 我们得到广义拟平衡问题的下面存在性结果•

定理 2.4　设 (X, Γ) 是 G_凸空间, K 是 X 的非空紧子集和 Y 是拓扑空间• 令 $\mathrm{T}: X \to 2^Y$ 有一连续选择 $g: X \to Y$ 和令 $\mathrm{A}: X \to 2^X$, $\phi: X \times Y \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 使得

(i) A 满足定理 2.3 的条件(i);

(ii) ϕ 是连续函数使得对每一 $(x, y) \in X \times Y$, $z \mapsto \phi(x, y, z)$ 是 G_拟凸的;

(iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 的非空紧 G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$,

如果 $x \notin D = \{x \in X : x \in \mathrm{cl}\, A(x)\}$，则 $A(x) \cap L_N \neq \emptyset$；如果 $x \in D$，则存在 $y \in A(x) \cap L_N$ 满足 $\phi(x, g(x), y) < \phi(x, g(x), x)$．

则存在 $\hat{x} \in X$ 和 $\hat{y} = g(\hat{x}) \in T(\hat{x})$ 使得

$$\begin{cases} \hat{x} \in \mathrm{cl}\, A(\hat{x}), \\ \phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}) \leqslant \phi(\hat{x}, \hat{y}, z), \quad \forall z \in A(\hat{x}). \end{cases}$$

如果进一步假设 $\phi(x, g(x), x) \geqslant 0,\ \forall x \in X$，则有

$$\begin{cases} \hat{x} \in \mathrm{cl}\, A(\hat{x}), \\ \phi(\hat{x}, \hat{y}, z) \geqslant 0, \quad \forall z \in A(\hat{x}). \end{cases}$$

证明　定义 $f: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 如下：

$$f(z, x) = \phi(x, g(x), z), \quad \forall (z, x) \in X \times X.$$

则定理2.4 的结论由定理 2.3 推得．

注2.3　定理 2.4 推广了 Lin 和 Park[4] 的系 5 到非紧设置且在几方面推广了 Chang 等[19] 的定理 3.1．

[参　考　文　献]

[1] Noor M A, Oettli W. On general nonlinear complementarity problems and quasi_equilibria[J]. Le Mathmatiche, 1994, **49**(2): 313～331.

[2] Cubiotti P. Existence of solutions for lower semicontinuous quasi_equilibrium problems[J]. Comput Math Appl, 1995, **30**(12): 11～22.

[3] Ding Xieping. Existence of solutions for quasi_equilibrium problems[J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(6): 603～608.

[4] Lin L J, Park S. On some generalized quasi_equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(2): 167～181.

[5] Ding Xieping. Generalized variational inequalities and equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. Comput Math Appl, 1999, **38**(10): 189～197.

[6] Ding Xieping. New H_KKM theorems and their applications to geometric property, coincidence theorems, minimax inequality and maximal elements[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, **26**(1): 1～19.

[7] Tian G. Generalization of FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, **170**(2): 457～471.

[8] Wu X, Shen S. A further generalization of Yannelis_Prabhakar's continuous selection theorem and its applications[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 61～74.

[9] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173～187.

[10] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551～571.

[11] Komiya H. Coincidence theorem and saddle point theorem[J]. Proc Amer Math Soc, 1986, **96**(4): 599～602.

[12] Lassonde M. On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics[J]. J Math Anal Appl, 1983, **97**(1): 151～201.

[13] Horvath C D. Points fixes et coincidences pour les applications multivoques sans convexite[J]. C R Acad Sci Paris, 1983, **296**: 403～406.

[14] Horvath C D. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[A]. In: B L

Lin, S Simons Eds. Nonlinear and Convex Analysis[C]. New York: Dekker, 1987, 99~ 106.

[15] Horvath C D. Contractibility and generalized convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341~ 357.

[16] Ding Xieping. Coincidence theorems in topological spaces and their applications[J]. Appl Math Lett, 1999, **12**(6): 99~ 105.

[17] Ding Xieping. A coincidence theorem involving contractible spaces[J]. Appl Math Lett, 1997, **10**(3): 53~ 56.

[18] Ding Xieping. Coincidence theorems involving composites of acyclic mappings in contractible spaces [J]. Appl Math Lett, 1998, **11**(2): 85~ 89.

[19] Chang S S, Lee B S, Wu X, et al. On the generalized quasi_variational inequality problems[J]. J Math Anal Appl, 1996, **203**(3): 686~ 711.

Quasi_Equilibrium Problems in Noncompact Generalized Convex Spaces

Ding Xieping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China)

Abstract: By applying a new fixed point theorem due to the author, some new equilibrium existence theorems of quasi_equilibrium problems are proved in noncompact generalized convex spaces. These theorems improve and generalize a number of important known results in recent literature.

Key words: fixed point; quasi_equilibrium problem; compactly local intersection property; generalized convex space