应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 06_0585_05

2+ 1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程的相似约化*

闫振亚, 张鸿庆

(大连理工大学 数学科学研究所, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 借助于 MATHEMATICA 软件, 将直接约化法推广并应用到 2+ 1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili(VCGKP) 方程, 获得了 VCGKP 方程的若干相似约化, 其中包括 Painleve Ⅰ 型、Painleve Ⅱ 型和 Painleve Ⅳ型的约化·

关 键 词: 变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程; 直接约化法; 相似约化
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

在描述浅水波的研究中, 获得了很多著名的完合可积模型, 如 KdV 方程, mKdV 方程、Boussinesq 方程、Whitham_Broer_Kaup 方程和 Khokhlov_Zabolotskaya 方程等等[1~8], 其中作为较好的完全可积模型为 2+ 1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili(VCGKP) 方程[6]

$$u_{xt} + 6(u_x^2 + uu_{xx}) + u_{xxxx} + g^4 u_{yy} + 6fu_x - (f' + 12f^2) = 0, \tag{1}$$

其中 $f = f(t)$ 是 t 的任意函数, $g = g(t) = e^{-\int 6f\,dt}$· 当 $f = 0$ 时, 方程(1) 成为通常的 KP 方程· 最近 Clarkson 和 Kruskal 提出了一种有效的相似约化的直接法[1]· 并将此方法应用于 Boussinesq 方程, 得到了很多相似约化的结论[1]· 文[2~4] 又把此方法应用到 2+ 1 维常系数 KZ 方程和 1+ 1_维微分方程组 ——Whitham_Broer_Kaup 方程情形· 很显然这些微分方程(组) 都是常系数的· 本文将直接约化法推广并应用到(2+ 1)_维变系数情形 ——广义 Kadomtsev_Petviashvili(VCGKP) 方程[6]· 结果获得了 VCGKP 方程的若干相似约化, 其中包括 Painleve Ⅰ 型、Painleve Ⅱ型和 Painleve Ⅳ型的约化·

1 广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程的相似约化

对于给定的 2+ 1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程(1) , 所有的相似约化都具有这种形式

---

* 收稿日期: 1999_03_02; 修订日期: 1999_12_13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572022) ; 国家攀登计划基金资助课题
作者简介: 闫振亚(1974~) , 男, 河南上蔡人, 博士.

$$u(x,y,t)=F(x,y,t,Q(Z)),\qquad Z=Z(x,y,t),\tag{2}$$

其中 F 和 Z 为待定的函数，$Q(Z)$ 满足一个常微分方程. 事实上，类似于文[1]，可以证明没有必要假设这种一般形式，我们只需要假设下面特殊形式

$$u(x,y,t)=\alpha(x,y,t)+\beta(x,y,t)Q(Z),\qquad Z=Z(x,y,t),\tag{3}$$

其中 α、β 和 Z 为待定 x、y、t 的函数，$Q(Z)$ 满足某一个关于 Z 的常微分方程.

借助于 MATHEMATICA，将方程(3)代入方程(1)并整理，得到

$$\begin{aligned}
&u_{xt}+6(u_x^2+uu_{xx})+u_{xxxx}+g^4u_{yy}+6fu_x-(f'+12f^2)=\\
&\quad\beta Z_x^4Q^{(4)}+(4\beta_xZ_x^3+6\beta Z_x^2Z_{xx})Q'''+(\beta Z_xZ_t+6\alpha\beta Z_x^2+6\beta_{xx}Z_x^2+\\
&\quad 12\beta_xZ_xZ_{xx}+\beta Z_xZ_{xxx}+3\beta Z_{xx}^2+g^4\beta Z_y^2)Q''+(\beta_xZ_t+\beta_tZ_x+\beta Z_{xt}+\\
&\quad 12\alpha_x\beta Z_x+12\alpha\beta_xZ_x+6\alpha\beta Z_{xx}+4\beta_{xxx}Z_x+6\beta_{xx}Z_{xx}+4\beta_xZ_{xxx}+\beta Z_{xxxx}+\\
&\quad 2g^4\beta_yZ_y+g^4\beta Z_{yy}+6f\beta Z_x)Q'+(\beta_{xt}+\beta_{xxxx}+12\alpha_x\beta_x+6\alpha\beta_{xx}+\\
&\quad 6\alpha_{xx}\beta+g^4\beta_{yy}+6f\beta_x)Q+(6\beta\beta_{xx}+6\beta_x^2)Q^2+(12\beta\beta_xZ_x+6\beta^2Z_{xx}+\\
&\quad 12\beta\beta_xZ_x)QQ'+6\beta^2Z_x^2QQ''+6\beta^2Z_x^2Q'^2+(\alpha_{xt}+\alpha_{xxxx}+6\alpha\alpha_{xx}+6\alpha_x^2+\\
&\quad g^4\alpha_{yy}+6f\alpha_x-f'-12f^2)=0,
\end{aligned}\tag{4}$$

其中“′”表示关于 Z 的求导. 为了使方程(4)成为 Q 仅仅关于 Z 的常微分方程，则 Q 及其导数的各项系数之比仅是 Z 的函数. 取 Q'''' 项的系数(即 βZ_x^4)作为比较系数，即当 $Z_x\neq 0$ 时，可得下面的方程组

$$\left.\begin{aligned}
&4\beta_xZ_x^3+6\beta Z_x^2Z_{xx}=\beta Z_x^4P_1(Z),\\
&\beta Z_xZ_t+6\alpha\beta Z_x^2+6\beta_{xx}Z_x^2+12\beta_xZ_xZ_{xx}+\beta Z_xZ_{xxx}+3\beta Z_{xx}^2+g^4\beta Z_y^2=\beta Z_x^4P_2(Z),\\
&\beta_xZ_t+\beta_tZ_x+\beta Z_{xt}+12\alpha_x\beta Z_x+12\alpha\beta_xZ_x+6\alpha\beta Z_{xx}+4\beta_{xxx}Z_x+6\beta_{xx}Z_{xx}+\\
&\qquad 4\beta_xZ_{xxx}+\beta Z_{xxxx}+2g^4\beta_yZ_y+g^4\beta Z_{yy}+6f\beta Z_x=\beta Z_x^4P_3(Z),\\
&\beta_{xt}+\beta_{xxxx}+12\alpha_x\beta_x+6\alpha\beta_{xx}+6\alpha_{xx}\beta+g^4\beta_{yy}+6f\beta_x=\beta Z_x^4P_4(Z),\\
&6\beta\beta_{xx}+6\beta_x^2=\beta Z_x^4P_5(Z),\\
&12\beta\beta_xZ_x+6\beta^2Z_{xx}+12\beta\beta_xZ_x=\beta Z_x^4P_6(Z),\\
&6\beta^2Z_x^2QQ''=\beta Z_x^4P_7(Z),\\
&6\beta^2Z_x^2=\beta Z_x^4P_8(Z),\\
&\alpha_{xt}+\alpha_{xxxx}+6\alpha\alpha_{xx}+6\alpha_x^2+g^4\alpha_{yy}+6f\alpha_x-f'-12f^2=\beta Z_x^4P_9(Z),
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 $P_i(Z)(i=1,2,3,\cdots,9)$ 为 Z 的待定函数. 方程(5)为关于 α、β、Z、$P_i(i=1,2,\cdots,9)$ 的微分方程. 为了确定这些未知量，类似于 Clarkson 和 Kruskal 的做法，我们采取如下的规律:

规律 1 如果 $\alpha(x,y,t)=\alpha_0(x,y,t)+\beta(x,y,t)Q(Z)$，则取 $Q=0$(因为可作变换 $T(Z)\to T(Z)-Q(Z)$).

规律 2 如果 $\beta(x,y,t)=\beta_0(x,y,t)Q(Z)$，则取 $Q=1$(因为可作变换 $T(Z)\to T(Z)/Q(Z)$).

规律 3 如果 $Z(x,y,t)$ 由方程 $Q(Z)=w(x,y,t)$ 确定，且 $Q(Z)$ 为任意可逆函数，则我

们取 $Q(Z) = Z$(因为可作变换 $Z \to 1/Q(Z)$)•

利用上述规律 1~ 3, 我们能够从方程(5) 中获得下面一系列的结论(注意: 对于每一个变量, 其中的某一条规律只能使用一次•)

$$P_1(Z) = P_2(Z) = P_5(Z) = P_6(Z) = 0,\ P_3(Z) = MZ + N, \tag{6}$$

$$P_4(Z) = 2M,\ P_7(Z) = P_8(Z) = 6,\ P_9(Z) = -\frac{(MZ+N)^2}{3}; \tag{7}$$

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{6\rho^2}[\rho(x\rho_t + \lambda_t) + g^4(x\rho_y + \lambda_y)^2] + \rho^2 Q(Z), \tag{8}$$

$$Z(x, y, t) = x\rho(y, t) + \lambda(y, t), \tag{9}$$

$$\rho_{yy} - Mg^{-4}\rho^5 = 0; \tag{10}$$

$$g^4\lambda_{yy} + \rho_t + 6f\rho - (M\lambda + N)\rho^4 = 0; \tag{11}$$

其中 M 和 N 为任意的常数, ρ、λ 为 y 和 t 的函数且满足方程(10) 和(11)• 将方程(5) ~ (7) 代入方程(4), 可得到(2+ 1) _维变系数广义的 Kadomtsev_Petviashvili 方程(1) 的相似约化

$$Q''' + 6QQ'' + 6Q'^2 + (MZ + N)Q' + 2MQ - \frac{1}{3}(MZ + N)^2 = 0• \tag{12}$$

分下面三种情况做进一步的讨论:

情况 1 当 $M = 0$、$N = 0$ 时, 可得到方程(10) 和(11) 的一般解

$$\rho(y, t) = k_1(t)y + k_2(t),$$

$$\lambda(y, t) = -\frac{1}{6}g^{-4}[(k_{1t} + 6f k_1)y^3 + 3(k_{2t} + 6f k_2)y^2 + k_3(t)y + k_4(t)],$$

其中 $k_i = k_i(t)\ (i = 1, 2, 3, 4)$ 为 t 的任意函数• 根据方程(8)、(9) 和(12) 可获得 2+ 1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程(1) 的一种相似约化

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{6(k_1y + k_2)^2}[(k_1y + k_2)(k_{1t}xy + k_{2t}x + \lambda_t) + g^4(k_1x + \lambda_y)^2] + (k_1y + k_2)^2 Q(Z),$$

$$Z = (k_1y + k_2)x - \frac{1}{6}g^{-4}[(k_{1t} + 6f k_1)y^3 + 3(k_{2t} + 6f k_2)y^2 + k_3(t)y + k_4(t)]$$

且 $Q(Z)$ 满足下面一个关于 Z 的常微分方程

$$Q''' + 6QQ'' + 6Q'^2 = 0• \tag{13}$$

对方程(13) 积分两次, 得到

$$\frac{d^2Q}{dZ^2} + 3Q^2 + aZ + b = 0• \tag{14}$$

当 $a = 0$ 时, $Q(Z)$ 是一个 Weierstrass 椭圆函数• 否则方程(14) 为 Painleve Ⅰ 型方程[6]•

情况 2 当 $M = 0$、$N \neq 0$ 时, 可得到方程(10) 和(11) 的一般解

$$\rho(y, t) = k_1(t)y + k_2(t),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{30}g^{-4}[Nk_1^{-2}(k_1y + k_2)^6 - 5(y + k_{2t}k_{1t}^{-1}) - 30f(y + k_2k_1^{-1})] + k_3(t)y + k_4(t), \qquad (k_1 \neq 0,\ k_{1t} \neq 0)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}g^{-4}[(Nk_2^4 - 6f k_2 - k_{2t})y^2 + k_3(t)y + k_4(t)], \qquad (k_1 = 0),$$

其中 $k_i(t)(i=2,3,4)$ 为 t 的任意函数• 因此可获得 2+1_维变系数广义 Kadomtsev-Petviashvili 方程(1)的两种相似约化

$$u(x,y,t)=-\frac{1}{6(k_1y+k_2)^2}[(k_1y+k_2)(k_{1t}xy+k_{2t}x+\lambda_{it})+g^4(k_1x+\lambda_{iy})^2]+(k_1y+k_2)^2Q(Z),$$

$$Z=(k_1y+k_2)x+\lambda_i(y,t)\qquad(i=1,2,)$$

且 $Q(Z)$ 满足下面一个关于 Z 的常微分方程

$$Q'''+6QQ''+6Q'^2+NQ'-\frac{1}{3}N^2=0• \tag{15}$$

这个方程(15)等价于 Painleve II型方程[6]•

情况 3　当 $M\neq0$ 时,我们能够设 $N=0$(因为在方程(12)中可作变换 $\lambda\to\lambda-N/M$)积分方程(11)可获得

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{3}Mg^{-4}\rho^6+k_5(t), \tag{16}$$

其中 $k_5(t)$ 为积分变量• 进一步讨论分下面两种情形:

情况 3.1　当 $k_5(t)=0$ 时,方程(16)有一解

$$\rho(y,t)=\sqrt[4]{\frac{3}{4M}}g(y+k_6(t))^{-1/2}, \tag{17}$$

将方程(17)代入方程(10),解之得

$$\lambda(y,t)=k_7(t)(y+k_6(t))^{3/2}+k_8(t)(y+k_6(t))^{-1/2}k_8(t)+K_9(t)(y+k_6(t))^{1/2},$$

其中
$$k_6(t)=2\int\sqrt[4]{\frac{3}{4M}}k_9(t)g^3\mathrm{d}t,$$

$k_8(t)$, $k_9(t)$ 为 t 的任意函数• 因此可获得 2+1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程(1)的一个相似约化

$$u(x,y,t)=-\frac{1}{6\rho^2}[\rho(x\rho_t+\lambda_t)+g^4(x\rho_y+\lambda_y)^2]+\rho^2Q(Z),$$

$$Z(x,y,t)=x\rho(y,t)+\lambda(y,t),$$

且 $Q(Z)$ 满足下面一个关于 Z 的常微分方程

$$Q'''+6QQ''+6Q'^2+MZQ'+2MQ-\frac{1}{3}M^2Q^2=0• \tag{18}$$

这个方程(18)等价于 Painleve IV型方程[6]•

情况 3.2　当 $k_5(t)\neq0$ 时,我们不妨设 $k_5(t)=\frac{1}{3}M^{-2}g^{-4}$• 若做一个变换

$$\rho^2(y,t)=\frac{1}{\theta^2(y,t)-M},$$

则方程(16)成为广义雅可比椭圆方程

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{3}M^{-2}g^{-4}(\theta^4-3M\theta^2+3M^2)•$$

解此方程可获得 $\rho(y,t)$ 的值,进而根据方程(8)、(9)和(11),得到 2+1_维变系数广义

Kadomtsev_Petviashvili 方程(1)的又一种相似约化, 且 $Q(Z)$ 满足方程(18)•

总之, 我们将直接约化法成功地推广并应用到高维(2+ 1_维)且变系数微分方程情形, 以 2 + 1_维变系数广义 Kadomtsev_Petviashvili 方程为例, 将其约化为 Painleve Ⅰ 型、Painleve Ⅱ型和 Painleve Ⅳ型• 这种方法也可以推广到 2+ 1_维微分方程组的情形, 如 2+ 1_维色散长波方程[7], 这种情形我们将在另文给出•

[参 考 文 献]

[1] Clarkson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. J Math Phys, 1989, **30**(10): 2201~ 2212.

[2] Zhang J F, Zhu Y J, Lin J. Similarity reductions for the Khokhlov_Zabolotskaya equation[J]. Commun Theor Phys, 1995, **22**(1): 69~ 74.

[3] Ruan H Y, Lou S Y. Similarity reductions and Painleve properties for the Kupershmidt equation[J]. Commun Theor Phys, 1993, **20**(1): 73~ 80.

[4] 阮航宇, 楼森岳. Whitham_Broer_Kaup 浅水波方程的对称性约化[J]. 物理学报, 1992, **41**(8): 1213 ~ 1219.

[5] 谷超豪, 李翊神, 田畴, 等. 孤立子理论与应用[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990.

[6] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[7] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B. Application of a homogeneous blance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 1996, **216**(1): 67~ 73.

[8] Lou S Y. Painlev test for the integrable dispersive long wave equations in two space dimensions[J]. Phys Lett A, 1993, **176**(1): 96~ 102.

Similarity Reductions for 2+ 1_Dimensional Variable Coefficient Generalized Kadomtsev_ Petviashvili Equation

Yan Zhenya, Zhang Hongqing

(Institute of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: With the aid of MATHEMATICA, the direct reduction method was extended and applied in 2+ 1_dimensional variable coefficient generalized Kadomtsev_Petviashvili equation(VCGKPE). As a result, several kinds of similarity reductions for VCGKPE are obtained which contain Painleve Ⅰ, Painleve Ⅱ and Painleve Ⅳ reductions.

Key words: variable coefficient generalized Kadomtsev_Petviashvili equation; direct reduction method; similarity reduction