应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 06_0597_13

无界停时终端非李氏系数带跳倒向随机微分方程的解及拟线性椭圆型偏微分积分方程解的概率表示*

司徒荣, 王越平

(中山大学 数学系, 广州 510275)

(钱伟长推荐)

摘要: 对终端为无界停时的带跳倒向随机微分方程, 在非李氏条件下证得了解的存在唯一性• 推导出这类方程解的若干收敛定理与解对参数的连续依赖性, 还得到了关于拟线性随圆型偏微分积分方程解的概率表示•

关 键 词: 带跳倒向随机微分方程; 无界停时; 适应解; 解的收敛性; 拟线性椭圆型方程; 偏微分积分算子
中图分类号: O211.63 文献标识码: A

众所周知, 倒向随机微分方程的解在金融市场中有着重要的应用[1]• 对终端为无界停时 τ 的连续倒向随机微分方程, 在李氏条件下, 当终端满足 $E\,|\xi|^2 e^{K(\tau\wedge T)}\leqslant c_0<\infty,\ \forall 0\leqslant T<\infty$ 或 $\xi=0$ 时, 参考文献[2]、[3] 已分别进行了讨论, 得到了在适当的空间中解的存在唯一性• 本文是在带跳的情形, 分别在 $E\,|\xi|^2<\infty$ 及 $E\,|\xi|^2 e^{K(\tau\wedge T)}\leqslant c_0<\infty,\ \forall 0\leqslant T<\infty$ 的假设下, 并且在非李氏条件下, 得到了解的存在唯一性, 所得结果蕴含了[2]、[3] 的情形• 然后, 结合用参考文献[4] 的方法, 讨论了这类方程解的几个收敛定理, 以及解对参数的连续依赖性• 最后, 还得到了关于拟线性椭圆型偏微分方程解的概率表示• (顺便指出, 文献[5] 与[6], 也讨论了终端为停时之连续倒向随机微分方程的求解问题• 我们这里除了方程带跳之外, 假设条件与讨论方法等都是与之不同的•)

1 解的存在唯一性

考虑如下的带跳倒向随机微分方程, 这里的 τ 是可取 $+\infty$ 的无界停时:

$$x_t = X + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)\,\mathrm{d}s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} q_s\,\mathrm{d}W_s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau}\int_Z p_s(z)\,\tilde{N}_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z), \qquad t\geqslant 0, \tag{1}$$

* 收稿日期: 1999_04_15; 修订日期: 2000_02_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79790130); 中山大学前沿项目基金资助项目
作者简介: 司徒荣(1935~), 男, 广州人, 教授, 博士生导师.

其中 W_t 是一 r_维标准布朗运动, $k(\cdot)$ 是一Poisson点过程, 取值于可测空间 $(Z, B(Z))$, $N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$ 是由 $k(\cdot)$ 定义的Poisson计数测度, 其补偿元为 $\Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$, $N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$ 是一鞅测度, 由

$$N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) = N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) - \Pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$$

定义的• $\Pi(\cdot)$ 是一 $B(Z)$ 上的 σ_有限测度, τ为可取 $+\infty$ 的无界停时, X 是 F_τ_可测 $\mathscr{R}^d$_值的随机变量, 而此处的 F_t 是由 W_s, $s \leqslant t$ 和

$$N_k((0, s], U), \qquad s \leqslant t, \ U \in B(Z)$$

所生成的完备的 σ_代数•

先引进一些记号:

设 $F^{2,K}_{k,(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d)$ 为 F_t_可料 $\mathscr{R}^d$_值的过程 $\boldsymbol{f}(t, z, \omega)$ 的集合, 且满足:

$$E\int_0^\tau\int_Z \mathrm{e}^{Kt} \mid \boldsymbol{f}(t, z, \omega) \mid^2 \Pi(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}t < \infty,$$

其中 K 是某一给定的常数•

设

$$L^{2,K}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d) = \left\{\boldsymbol{f}(t, \omega): E\int_0^\tau \mathrm{e}^{Kt} \mid \boldsymbol{f}(t, \omega) \mid^2 \mathrm{d}t < \infty\right\},$$

其中 $\boldsymbol{f}(t, \omega)$ 是 $\mathscr{R}^d$_值 F_t_适应的,

$$L^{2,K}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^{d\times r}) = \left\{\boldsymbol{f}(t, \omega): E\int_0^\tau \mathrm{e}^{Kt} \|\boldsymbol{f}(t, \omega)\|^2 \mathrm{d}t < \infty\right\},$$

其中 $\|\boldsymbol{f}\|$ 是矩阵 $\boldsymbol{f} \in \mathscr{R}^{d\times r}$ 的模,

$$L^2_{\Pi(\cdot)}(\mathscr{R}^d) = \left\{\boldsymbol{f}(z): \big|\|\boldsymbol{f}\|\big| = \left(\int_Z \mid \boldsymbol{f}(z) \mid^2 \Pi(\mathrm{d}z)\right)^{1/2} < \infty\right\}\cdot$$

记 $H^{2,K} = L^{2,K}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d) \times L^{2,K}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^{d\times r}) \times F^{2,K}_{k,(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d)$•

定义 1.1 　(x_t, q_t, p_t) 称为方程(1) 在 $H^{2,K}$ 中的解, 若

1) $(x_t, q_t, p_t) \in H^{2,K}$;

2) (x_t, q_t, p_t) 满足方程(1)•

我们定义解的唯一性:

定义 1.2 　若方程(1) 在 $H^{2,K}$ 中任意的两个解 (x_t, q_t, p_t) 与 (x^1_t, q^1_t, p^1_t), 满足

$$E\int_0^\tau \mid x_t - x^1_t \mid^2 \mathrm{e}^{Kt}\mathrm{d}t = 0, \quad E\int_0^\tau \| q_t - q^1_t \|^2 \mathrm{e}^{Kt}\mathrm{d}t = 0,$$

$$E\int_0^\tau \big|\| p_t - p^1_t \|\big|^2 \mathrm{e}^{Kt}\mathrm{d}t = 0,$$

则称方程(1) 在 $H^{2,K}$ 中至多只有唯一解•

下面讨论方程(1) 解的存在与唯一性:

1.1 　$\tau \equiv +\infty$ 的情形

在此情形下, 因为我们只在空间 $H^{2,K}$ 中讨论解的存在唯一性, 故为简单起见, 将此空间的符号省略•

假设方程(1) 具备以下条件:

(H1) $b(t, 0, 0, 0, \omega) \equiv 0$, $t \geqslant 0$;

(H2) $\mid b(t, x, q_1, p_1, \omega) - b(t, x, q_2, p_2, \omega) \mid \leqslant c_0 \| q_1 - q_2 \| + c'_0 \big|\| p_1 - p_2 \|\big|$,

其中 c'_0, $c_0 \geqslant 0$ 均为常数;

(H3) $\langle b(t, x_1, q, p, \omega) - b(t, x_2, q, p, \omega), x_1 - x_2 \rangle \leqslant \mu \mid x_1 - x_2 \mid^2$;

(H4) $\delta \triangleq K + 2\mu - 2c_0^2 - 2c'^2_0 > 0$.

注 1 条件(H2)与(H3)比李氏条件弱. 事实上, 若我们取

$$b(t, x, q, p, \omega) = -\frac{x}{|x|^{\alpha}} I_{x\neq 0}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

则 b 不满足李氏条件, 但 b 满足

$$\langle b(t, x_1) - b(t, x_2), x_1 - x_2\rangle \leqslant 0,$$

故 b 满足条件(H2) 与(H3), 其中常数 $\mu \leqslant 0$.

注 2 当方程(1)不带跳, 条件(H4)可简化为:

$$\delta \triangleq K + 2\mu - 2c_0^2 > 0.$$

考虑如下形式的倒向随机微分方程:

$$x_t = \int_t^{\infty}(b(s, x_s, q_s, p_s, \omega) + \varphi_s(\omega))\,\mathrm{d}s - \int_t^{\infty} q_s\,\mathrm{d}W_s - \int_t^{\infty}\int_Z p_s(z)\,N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \qquad t \geqslant 0, \tag{2}$$

其中 $\varphi_t \in L^{2,K}_{F_t}([0, \infty); \mathscr{R}^d)$ 是给定的.

我们有下面的估计:

引理 1.1 假设(H1)至(H4)成立, 若 (x_t^1, q_t^1, p_t^1) 与 (x_t^2, q_t^2, p_t^2) 为方程(2)分别对应于 φ_t^1、φ_t^2 的解, 则我们有下面的不等式: 对任意的 $t \geqslant 0$,

$$|x_t^1 - x_t^2|^2 + \frac{1}{2}E^{F_t}\int_t^{\infty}\left[\delta|x_s^1 - x_s^2|^2 + \|q_s^1 - q_s^2\|^2 + \left|\|p_s^1 - p_s^2\|\right|^2\right]\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \leqslant \frac{2}{\delta}E^{F_t}\int_t^{\infty}|\varphi_s^1 - \varphi_s^2|^2\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中 $\delta > 0$, 如(H4) 定义, $E^{F_t}(X) = E(X \mid F_t)$.

因此, 由(3)推知, 若方程(2)有解存在, 则必唯一; 进一步, 当 $\varphi_t \equiv 0$, 则(2)只有零解(0, 0, 0). 由此, 又可得,

$$\sup_{0\leqslant t} E|x_t|^2 \leqslant k_0 < \infty, \tag{4}$$

其中 $k_0 \geqslant 0$ 是一常数, 只与 K, $\delta > 0$ 及 φ 有关.

证明 对 $|x_s^1 - x_s^2|\,\mathrm{e}^{Ks}$ 在 $s \in [t, \infty)$ 应用 Itô 公式, 可得:

$$\begin{aligned}
&|x_t^1 - x_t^2|^2 + E^{F_t}\int_t^{\infty}[K|x_s^1 - x_s^2|^2 + \|q_s^1 - q_s^2\|^2 + \left|\|p_s^1 - p_s^2\|\right|^2]\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \leqslant \\
&E^{F_t}\int_t^{\infty}2\langle b(s, x_s^1, q_s^1, p_s^1) - b(s, x_s^2, q_s^2, p_s^2) + \varphi_s^1 - \varphi_s^2, x_s^1 - x_s^2\rangle\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \leqslant \\
&E^{F_t}\int_t^{\infty}2\Big\{-\mu|x_s^1 - x_s^2|^2 + |x_s^1 - x_s^2|\,[c_0\|q_s^1 - q_s^2\| + \\
&c'_0\left|\|p_s^1 - p_s^2\|\right| + |\varphi_s^1 - \varphi_s^2|\,]\Big\}\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \leqslant \\
&E^{F_t}\int_t^{\infty}\left[\left(2(-\mu + c_0^2 + c'^2_0) + \frac{\delta}{2}\right)|x_s^1 - x_s^2|^2 + \right. \\
&\frac{1}{2}(\|q_s^1 - q_s^2\|^2 + \left|\|p_s^1 - p_s^2\|\right|^2) + \\
&\left.\frac{2}{\delta}|\varphi_s^2 - \varphi_s^2|^2\right]\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

将上面的不等式右边第一、第二部分移项, 可得:

$$|x_t^1-x_t^2|^2+\frac{1}{2}E^{F_t}\int_t^\infty[\delta|x_s^1-x_s^2|^2+\|q_s^1-q_s^2\|^2+|\|p_s^1-p_s^2\||^2]e^{Ks}ds\leqslant$$
$$\frac{2}{\delta}E^{F_t}\int_t^\infty|\varphi_s^1-\varphi_s^2|^2e^{Ks}ds.$$ □

以下先证方程(2)的解在李氏条件下的存在性与唯一性:

定理 1.1 设前面的条件(H1)至(H4)均成立, 且满足:

$$|b(t,x_1,q,p,\omega)-b(t,x_2,q,p,\omega)|\leqslant c_1|x_1-x_2|,$$

其中 $c_1\geqslant 0$ 是常数; $\varphi_t\in L^{2,K}_{(F_t)}([0,\infty);\mathscr{R}^d)$ 且 $K\geqslant 0$, 则方程(2)存在唯一解 (x_t,q_t,p_t), 且

$$\sup_{0\leqslant t}E|x_t|^2<\infty.$$

证明 唯一性由估计式(3)便可得出, 下证存在性:

令 $\varphi_s^n\equiv I_{[0,n]}(s)\varphi_s,\ n=1,2,3,\cdots$, 易知

$$E\int_0^\infty|\varphi_s^n-\varphi_s|^2e^{Ks}ds\to 0,\qquad n\to\infty.$$

对 $n=1,2,3,\cdots$, 由参考文献[4]知存在唯一解 (x_t^n,q_t^n,p_t^n), 满足下面的倒向随机微分方程:

$$x_t^n=\int_{t\wedge n}^n(b(s,x_s^n,q_s^n,p_s^n,\omega)+\varphi_s^n)ds-\int_{t\wedge n}^n q_s^n dW_s-$$
$$\int_{t\wedge n}^n\int_Z p_s^n(z)N_k(ds,dz),\qquad t\geqslant 0.\tag{5}$$

由(H1)及 φ_s^n 的定义, 可将(5)改写为:

$$x_t^nI_{t\leqslant n}=\int_t^\infty(b(s,x_s^nI_{s\leqslant n},q_s^nI_{s\leqslant n},p_s^nI_{s\leqslant n},\omega)+\varphi_s^nI_{s\leqslant n})ds-$$
$$\int_t^\infty q_s^nI_{s\leqslant n}dW_s-\int_t^\infty\int_Z p_s^n(z)I_{s\leqslant n}N_k(ds,dz).\tag{6}$$

由于

$$E\int_n^{n+m}|\varphi_s|^2e^{Ks}ds\to 0,\qquad n\to\infty,$$

故由估计式(3)知 $(x_t^nI_{t\leqslant n},q_t^nI_{t\leqslant n},p_t^nI_{t\leqslant n})$ 是 $H^{2,K}$ 中的 Cauchy_序列. 故存在 $(x_t,q_t,p_t)\in H^{2,K}$, 使:

$$\|(x_t,q_t,p_t)-(x_t^nI_{t\leqslant n},q_t^nI_{t\leqslant n},p_t^nI_{t\leqslant n})\|_{H^{2,K}}\to 0,\qquad \text{当 } n\to\infty \text{ 时},$$

由此, 在(6)式中令 $n\to\infty$, 即得: (x_t,q_t,p_t) 是方程(2)的解. □

现在讨论(2)的解在非李氏条件下的存在与唯一性.

定理 1.2 设条件(H1)至(H4)对 b 成立, 且满足下列条件:

(H5) $b=b_1+b_2$,

其中 b_1 关于 x、q、p 满足李氏条件, 即存在常数 $k_0\geqslant 0$, 使

$$|b_1(t,x_1,q_1,p_1,\omega)-b_1(t,x_2,q_2,p_2,\omega)|\leqslant$$
$$k_0(|x_1-x_2|+\|q_1-q_2\|+|\|p_1-p_2\||)$$

且 $b_1(t,0,0,0,\omega)=0$; 及 $b_2(t,x,q,p,\omega)$ 是 $(x,q,p)\in\mathscr{R}^d\times\mathscr{R}^{d\leftarrow r}\times L^2_{\Pi(\cdot)}(\mathscr{R}^d)$ 的连续函数; 且

$$|b_2(t,x,q,p,\omega)|\leqslant c(t),$$
$$\langle x_1-x_2,b_2(t,x_1,q,p,\omega)-b_2(t,x_2,q,p,\omega)\rangle\leqslant k_0|x_1-x_2|^2$$

且 $c(t)\geqslant 0$, 满足 $\int_0^\infty c(t)e^{Kt}dt<\infty$.

又设 $\varphi_t \in L^{2,K}_{(F_t)}([0, \infty); \mathscr{R}^d)$, $K \geqslant 0$, 则方程(2) 存在唯一解(x_t, q_t, p_t).

定理 1.2 显然蕴含了定理 1.1. 为此只需在定理 1.2 中令 $b_2 \equiv 0$.

证明　定理 1.2 同样可用定理 1.1 的证法, 引用参考文献[4]的结果及采用类似[4]的讨论来完成证明. 事实上, 由定理 1.1 的证法, 已知: 存在 $(x_t, q_t, p_t) \in H^{2,K}$, 使

$$\| (x_t, q_t, p_t) - (x_t^n I_{t\leqslant\tau} q_t^n I_{t\leqslant\tau}, p_t^n I_{t\leqslant\tau}) \|_{H^{2,K}} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

由此可取$\{n\}$的子列, 仍记为$\{n\}$, 使: $\mathrm{d}t \times \mathrm{d}p$ a.e. $(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$,

$$x_t^n I_{t\leqslant\tau}(\omega) \to x_t(\omega), \qquad \text{在 } \mathscr{R}^d \text{ 中;}$$
$$q_t^n I_{t\leqslant\tau}(\omega) \to q_t(\omega), \qquad \text{在 } \mathscr{R}^{d\leftarrow r} \text{ 中;}$$
$$p_t^n I_{t\leqslant\tau}(\omega) \to p_t(\omega), \qquad \text{在 } L^2_{\Pi(\cdot)}(\mathscr{R}^d) \text{ 中;}$$

注意到,

$$E\int_0^\infty | x_s^n I_{s\leqslant\tau} - x_s | \mathrm{d}s \leqslant \left(E\int_0^\infty | x_s^n I_{s\leqslant\tau} - x_s |^2 \mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(E\int_0^\infty \mathrm{e}^{-Ks}\mathrm{d}s \right)^{1/2} \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时,

故由李氏条件, 易得: 当 $n \to \infty$ 时

$$E\int_0^\infty | b_1(s, x_s^n I_{s\leqslant\tau}, q_s^n I_{s\leqslant\tau}, p_s^n I_{s\leqslant\tau}, \omega) - b_1(s, x_s, q_s, p_s, \omega) | \mathrm{d}s \to 0.$$

另外, 由于

$$| b_2 | \leqslant c(t), \quad \int_0^\infty c(t)\mathrm{e}^{Kt}\mathrm{d}t < +\infty,$$

因此, 由 b_2 对(x, q, p) 为连续并由控制收敛定理, 可得: 当 $n \to \infty$ 时

$$E\int_0^\infty | b_2(s, x_s^n I_{s\leqslant\tau}, q_s^n I_{s\leqslant\tau}, p_s^n I_{s\leqslant\tau}, \omega) - b_2(s, x_s, q_s, p_s, \omega) | \mathrm{d}s \to 0,$$

因此, 在(6) 式中, 令 $n \to \infty$, 在 $L^1(\Omega, F, P)$ 中取极限, 便得证: (x_t, q_t, p_t) 满足方程(2).

1.2　τ 为无界停时的情形

引入记号:

$$S = \left\{ f(t, \omega): \sup_{0\leqslant t} E | f(t \wedge \tau, \omega) |^2 < \infty \right\},$$

其中$f(t, \omega)$ 为 F_t_适应的;

$$H^{(0)} = S \times L^{2,0}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^{d\leftarrow r}) \times F^{2,0}_{k,(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d).$$

定理 1.3　设(H2) 至(H5) 成立, 且在(H4) 中 $K \geqslant 0$, τ 为 F_t_停时, $\xi \in F_\tau$, 且

$$E | \xi |^2 < +\infty.$$

又设对任意的 $(x_t, q_t, p_t) \in H^{(0)}$, 有

$$b(t, x_t, q_t, p_t) \in L^{2,K}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d),$$

则存在唯一的 $(x_t, q_t, p_t) \in H^{(0)}$, 使:

$$x_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)\mathrm{d}s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} q_s \mathrm{d}W_s - \int_{t\wedge\tau}^{\tau}\int_Z p_s(z) N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \qquad t \geqslant 0 \tag{7}$$

成立.

注 3　在假设(H5) 中, b_2 是可以不满足李氏条件的. 见引理 1.1 上面的注 1.

证明　由鞅表示定理(参考文献[7]), 知存在唯一的过程 (η_t, ζ_t),

$$(\eta_t, \zeta_t) \in L^2_{(F_t)}(0, T; \mathscr{R}^{d\leftarrow r}) \times F^2_{k,(F_t)}(0, T; \mathscr{R}^d),$$

对任意的 $0 \leqslant T < \infty$, 使

$$E[\xi | F_t] = E\xi + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t\int_Z \zeta_s(z) N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \qquad t \in [0, T]. \tag{8}$$

特别有,

$$\xi = E\xi + \int_0^\tau \eta_t \mathrm{d}W_t + \int_0^\tau\int_Z \zeta_t(z)N_k(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z).$$

由于 ξ 为平方可积, 可知表示式中

$$(\eta_t, \zeta_t) \in L^2_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^{d\times r}) \times F^2_{k,(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d).$$

由定理1.2, 存在 $(\hat{x}_t, \hat{q}_t, \hat{p}_t) \in H^{2,K}$ 满足倒向随机微分方程:

$$\hat{x}_t = \int_t^\infty b\Big(s, \hat{x}_s + E\xi + \int_0^s \eta_r I_{(r\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_r + \int_0^s\int_Z \zeta_r(z)I_{(r\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z), \hat{q}_s + \eta_s, \hat{p}_s + \zeta_s, \omega\Big) I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}s - \int_\tau^\infty \hat{q}_s I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_s - \int_t^\infty\int_Z \hat{p}_s(z)I_{(s\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

令

$$\begin{cases} x_t = \hat{x}_t + E\xi + \int_0^t \eta_s I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_s + \int_0^t\int_Z \zeta_s(z)I_{(s\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \\ q_t = \hat{q}_t + \eta_t, \\ p_t = \hat{p}_t + \zeta_t, \end{cases} \tag{9}$$

则得:

$$\begin{aligned} x_t = {} & E\xi + \int_0^t \eta_s I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_s + \int_0^t\int_Z \zeta_s(z)I_{(s\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) + \\ & \int_t^\tau b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)\mathrm{d}s - \int_t^\tau (q_s - \eta_s)\mathrm{d}W_s - \\ & \int_t^\tau\int_Z (p_s(z) - \zeta_s(z))N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) = \\ & \xi + \int_t^\tau b(s, x_s, q_s, p_s, \omega)\mathrm{d}s - \int_t^\tau q_s\mathrm{d}W_s - \\ & \int_t^\tau\int_Z p_s(z)N_k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned}$$

由 (x_t, q_t, p_t) 与 $(\hat{x}_t, \hat{q}_t, \hat{p}_t)$ 的线性关系, 可知由后者的唯一性可推出前者的解唯一性. □

值得注意的是, 在定理1.2中, 我们只设了 $E|\xi|^2 < \infty$, 而所得到(7)的解是属于空间 $H^{(0)}$, 并且(7)带跳, 更有甚者, 系数可以非李氏连续, 这些都是与彭[2]、[3]不同的.

让我们指出, 若设 $E|\xi|^2 e^{K(\tau\wedge T)} \leqslant c_0 < \infty$, $\forall 0 \leqslant T < \infty$, 其中 c_0 为常数, 则(7)也可在空间 $H^{2,K}$ 中存在唯一解. 因此[2]的相应的结果蕴含在下列定理之中.

定理 1.4 设(H2)至(H5)成立, 且在(H4)中 $K \geqslant 0$, τ 为 F_t_停时, $\xi \in F_\tau$, 且存在常数 $c_0 \geqslant 0$, 使对任意 $0 \leqslant T < +\infty$, 满足

$$\text{(H6)} \quad \begin{cases} E|\xi|^2 e^{K(\tau\wedge T)} \leqslant c_0 < +\infty, \\ E\int_0^\tau |b(t, 0, 0, 0, \omega)|^2 e^{Kt}\mathrm{d}t < +\infty, \end{cases}$$

则(7)存在唯一解 $(x_t, q_t, p_t) \in H^{2,K}$.

注4 同样地, 由假设(H5)知, 系数 b 可以不满足李氏条件.

证明 在定理1.3的证明中, 记

$$y_t = E[\xi | F_t],$$

则由Itô公式, 对任意 $0 \leqslant T < +\infty$, 据(8)有

$$E\Big[|y_{t\wedge\tau}|^2 e^{K(t\wedge\tau)} + K\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{Ks}|y_s|^2\mathrm{d}s + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}(\|\eta_s\|^2 + |\|\zeta_s\||^2)e^{Ks}\mathrm{d}s\Big] =$$

$$E e^{K(T\wedge\tau)}|y_{T\wedge\tau}|^2\cdot \tag{10}$$

由 Jenson 不等式,

$$E e^{K(T\wedge\tau)}|y_{T\wedge\tau}|^2 \leqslant E e^{K(T\wedge\tau)}E(|\xi|^2|F_{T\wedge\tau}) = E e^{K(T\wedge\tau)}|\xi|^2 \leqslant c_0 < +\infty,$$

故在(10)中, 令 $T\to+\infty$, 便得 $(y_t,\eta_t,\zeta_t)\in H^{2,K}$• 由此及设(H6)且注意到 $b=b_1+b_2$, 便可得 $b(t,y_t,\eta_t,\zeta_t)\in L^{2,K}_{(F_t)}(\mathscr{R}^d)$• 因此, 定理 1.3 的证法可以施行• 最后, 再由(9), 便得 $(x_t,q_t,p_t)\in H^{2,K}$• □

2 根极定理与解对参数的连续依赖性

下面讨论解的极限定理

2.1 $\tau\equiv+\infty$ 的情形

定理 2.1 若 $b(\alpha,t,x,q,p,\omega)$ 满足(H1)至(H4), 对任意的 $\alpha_0\in\mathscr{R}$ 真(常数可依赖于 α_0), 且:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\sup_{(x,q,p,\omega)}\int_0^\infty|b(\alpha,t,x,q,p,\omega)-b(\alpha_0,t,x,q,p,\omega)|^2e^{Kt}dt=0\cdot$$

记方程(2)相应于 $b(\alpha,\cdot)$ 及 φ_t^α 的解为

$$(x_t^\alpha,q_t^\alpha,p_t^\alpha)\in H^{2,K}$$

且

$$E\int_0^\infty|\varphi_s^\alpha-\varphi_s^{\alpha_0}|^2e^{Ks}ds\to0,\qquad \alpha\to\alpha_0,$$

则有:

$$(x_\cdot^\alpha,q_\cdot^\alpha,p_\cdot^\alpha)\text{ 是 }\alpha\mapsto(x_\cdot^\alpha,q_\cdot^\alpha,p_\cdot^\alpha)\in H^{2,K}\text{ 的连续映射},$$

其中 $\alpha\in\mathscr{R}$, 并且 $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\sup\limits_{0\leqslant t}E|x_t^\alpha-x_t^{\alpha_0}|^2=0$•

证明 类似于引理 1.1, 对 $|x_s^\alpha-x_s^{\alpha_0}|^2e^{Ks}$ 在 $s\in[t,\infty)$ 应用 Itô 公式, 可得:

$$\begin{aligned}&E|x_t^\alpha-x_t^{\alpha_0}|^2+E\int_t^\infty\Big[\frac{\delta_0}{2}|x_s^\alpha-x_s^{\alpha_0}|^2+\frac12(\|q_s^\alpha-q_s^{\alpha_0}\|^2+\\&\quad|\|p_s^\alpha-p_s^{\alpha_0}\||^2)\Big]e^{Ks}ds\leqslant\\&\quad\frac{2}{\delta_0}E\int_t^\infty|\varphi_s^\alpha-\varphi_s^{\alpha_0}|^2e^{Ks}ds+2E\int_t^\infty|x_s^\alpha-x_s^{\alpha_0}|e^{Ks}\cdot\\&\quad|b(\alpha,s,x_s^\alpha,q_s^\alpha,p_s^\alpha,\omega)-b(\alpha_0,s,x_s^\alpha,q_s^\alpha,p_s^\alpha,\omega)|ds,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t}E|x_t^\alpha-x_t^{\alpha_0}|^2+E\int_t^\infty\Big[\frac{\delta_0}{4}|x_s^\alpha-x_s^{\alpha_0}|^2+\frac12(\|q_s^\alpha-q_s^{\alpha_0}\|^2+\\&\quad|\|p_s^\alpha-p_s^{\alpha_0}\||^2)\Big]e^{Ks}ds\leqslant\\&\quad\frac{2}{\delta_0}E\int_0^\infty|\varphi_s^\alpha-\varphi_s^{\alpha_0}|^2e^{Ks}ds+\frac{4}{\delta_0}\sup_{(x,q,p,\omega)}\int_0^\infty|b(\alpha,s,x,q,p,\omega)-\\&\quad b(\alpha_0,s,x,q,p,\omega)|^2e^{Ks}ds\to0,\qquad\text{当 }\alpha\to\alpha_0\text{ 时},\end{aligned}$$

其中常数 δ_0 依赖于 α_0, 是给定的, 亦即:

$$\delta_0=K+2\mu-2c_0^2-2c'^2_0$$

且

$\langle b(\alpha_0, t, x_1, q, p, \omega) - b(\alpha_0, t, x_2, q, p, \omega), x_1 - x_2\rangle \leqslant -\mu|x_1 - x_2|^2$, 等. □

定理 2.2 若 $b(\alpha, t, x, q, p, \omega)$ 满足(H1)至(H4), 对 α 为一致(即常数 μ, c_0, c'_0 对 α 为一致), 且

$$|b(\alpha, t, x, q, p, \omega)| \leqslant k_0(|x| + \|q\| + |\|p\||) + c(t),$$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} b(\alpha, t, x, q, p, \omega) = b(\alpha_0, t, x, q, p, \omega) \qquad P-\text{a.s, a.e.}-t,$$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} E\int_0^\infty |\varphi_s^\alpha - \varphi_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds = 0,$$

k_0、K 均为常数, 且 $k_0 \geqslant 0$, $c(t) \geqslant 0$, $\int_0^{+\infty} c(t)^2 e^{Kt} dt < +\infty$;

则

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}(\|(x_t^\alpha, q_t^\alpha, p_t^\alpha) - (x_t^{\alpha_0}, q_t^{\alpha_0}, p_t^{\alpha_0})\|_{H^{2K}} + \sup_{0\leqslant t} E|x_t^\alpha - x_t^{\alpha_0}|^2) = 0.$$

证明 证明与定理 2.1 的类似,

$$E|x_t^\alpha - x_t^{\alpha_0}|^2 + E\int_t^\infty [K|x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2 + \|q_s^\alpha - q_s^{\alpha_0}\|^2 + |\|p_s^\alpha - p_s^{\alpha_0}\||^2] e^{Ks} ds \leqslant$$

$$E\int_t^\infty 2\langle b(\alpha, s, x_s^\alpha, q_s^\alpha, p_s^\alpha) - b(\alpha_0, s, x_s^{\alpha_0}, q_s^{\alpha_0}, p_s^{\alpha_0}) + \varphi_s^\alpha - \varphi_s^{\alpha_0}, x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}\rangle e^{Ks} ds \leqslant$$

$$\frac{2}{\delta_0} E\int_t^\infty |\varphi_s^\alpha - \varphi_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds + \frac{\delta_0}{2} E\int_t^\infty |x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds +$$

$$2E\int_t^\infty |x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}| e^{Ks} \cdot |b(\alpha, s, x_s^{\alpha_0}, q_s^{\alpha_0}, p_s^{\alpha_0}, \omega) - b(\alpha_0, s, x_s^{\alpha_0}, q_s^{\alpha_0}, p_s^{\alpha_0}, \omega)| ds +$$

$$2E\int_t^\infty \langle b(\alpha, s, x_s^\alpha, q_s^\alpha, p_s^\alpha, \omega) - b(\alpha, s, x_s^{\alpha_0}, q_s^\alpha, p_s^\alpha, \omega), x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}\rangle e^{Ks} ds +$$

$$2E\int_t^\infty \langle b(\alpha, s, x_s^{\alpha_0}, q_s^\alpha, p_s^\alpha, \omega) - b(\alpha, s, x_s^{\alpha_0}, q_s^{\alpha_0}, p_s^{\alpha_0}, \omega), x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}\rangle e^{Ks} ds \leqslant$$

$$\frac{2}{\delta_0} E\int_t^\infty |\varphi_s^\alpha - \varphi_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds + \frac{\delta_0}{2} E\int_t^\infty |x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds +$$

$$E\int_t^\infty (-2\mu|x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2) e^{Ks} ds +$$

$$E\int_t^\infty \left[2(c_0^2 + c_0'^2)|x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2 + \frac{1}{2}(\|q_s^\alpha - q_s^{\alpha_0}\|^2 + |\|p_s^\alpha - p_s^{\alpha_0}\||^2)\right] e^{Ks} ds +$$

$$\frac{4}{\delta_0} E\int_t^\infty |b(\alpha, s, U_s^{\alpha_0}) - b(\alpha_0, s, U_s^{\alpha_0})|^2 e^{Ks} ds + \frac{\delta_0}{4} E\int_t^\infty |x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds.$$

整理后可得:

$$E|x_t^\alpha - x_t^{\alpha_0}|^2 + E\int_0^\infty \left[\frac{\delta_0}{4}|x_s^\alpha - x_s^{\alpha_0}|^2 + \frac{1}{2}(\|q_s^\alpha - q_s^{\alpha_0}\|^2 + |\|p_s^\alpha - p_s^{\alpha_0}\||^2)\right] e^{Ks} ds \leqslant$$

$$\frac{2}{\delta_0} E\int_0^\infty |\varphi_s^\alpha - \varphi_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds + \frac{4}{\delta_0} E\int_0^\infty |b(\alpha, s, U_s^{\alpha_0}) - b(\alpha_0, s, U_s^{\alpha_0})|^2 e^{Ks} ds.$$

记

$$\frac{4}{\delta_0} E\int_0^\infty |b(\alpha, s, U_s^{\alpha_0}) - b(\alpha_0, s, U_s^{\alpha_0})|^2 e^{Ks} ds = I_1,$$

其中, 记 $U^{\alpha}_{s0} = (x^{\alpha}_{s0}, q^{\alpha}_{s0}, p^{\alpha}_{s0})$.

由控制收敛定理, 可知, 当 $\alpha \to \alpha_0$, $I_1 \to 0$. □

2.2 τ 为无界停时情形(设 $K \geqslant 0$)

定理 2.3 假设(H2)至(H4)对 $b(\alpha_0, t, x, q, p, \omega)$ 真, 任意 $\alpha_0 \in \mathscr{R}$, 且对任意的 $(x_t, q_t, p_t) \in H^{(0)}$

$$b(\alpha, t, x_t, q_t, p_t, \omega) \in L^{2,K}_{(F_t)}(0, \tau; \mathscr{R}^d)$$

且存在 $c(t) \geqslant 0$, $\int_0^\infty c(t)e^{Kt}dt < \infty$, 及存在常数 $k_0 \geqslant 0$, $c_2(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant c_2(t)e^{Kt} \leqslant k_0$, $\forall t$ 使

$$|b(\alpha, t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(\alpha, t, x_2, q_2, p_2, \omega)|^2 \leqslant$$
$$c(t)|x_1 - x_2|^2 + c_2(t)(\|q_1 - q_2\|^2 + |\|p_1 - p_2\||^2),$$

其中 $c(t)$, $c_2(t)$ 及 k_0 均可依赖于 α.

若 $\xi^{\alpha} \in L^2(\Omega, F_\tau, P)$, 且 $\xi^{\alpha} \to \xi^{\alpha_0}$, 在 $L^2(\Omega, F_\tau, P)$ 中, 当 $\alpha \to \alpha_0$ 时; 又有

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \sup_{(x, q, p, \omega)} \int_0^\infty |b(\alpha, t, x, q, p, \omega) - b(\alpha_0, t, x, q, p, \omega)|^2 e^{Kt} dt = 0.$$

记方程(7)相应于 $b(\alpha, \cdot)$ 及 ξ^{α}(终端)的解为:

$$(x^{\alpha}_t, q^{\alpha}_t, p^{\alpha}_t) \in H^{(0)},$$

则 $(x^{\alpha}_{\cdot}, q^{\alpha}_{\cdot}, p^{\alpha}_{\cdot})$ 是 $\alpha \mapsto (x^{\alpha}_{\cdot}, q^{\alpha}_{\cdot}, p^{\alpha}_{\cdot}) \in H^{(0)}$ 的连续映射, 其中 $\alpha \in \mathscr{R}$.

证明 用定理 1.3 的证法, 可得:

$$\begin{cases} x^{\alpha}_t = \hat{x}^{\alpha}_t + E\xi^{\alpha} + \int_0^t \eta^{\alpha}_s I_{(s \leqslant \tau)} dW_s + \int_0^t \int_Z \xi^{\alpha}(z) I_{(s \leqslant \tau)} N_k(ds, dz), \\ q^{\alpha}_t = \hat{q}^{\alpha}_t + \eta^{\alpha}_t, \\ p^{\alpha}_t = \hat{p}^{\alpha}_t + \zeta^{\alpha}_t, \end{cases}$$

其中 $(\hat{x}^{\alpha}_t, \hat{q}^{\alpha}_t, \hat{p}^{\alpha}_t) \in H^{2,K}$, 解下面的倒向随机微分方程(无穷区间 $[0, \infty)$):

$$\hat{x}^{\alpha}_t = \int_t^\infty b\Big(\alpha, s, \hat{x}^{\alpha}_s + E\xi^{\alpha} + \int_0^s \eta^{\alpha}_r I_{(r \leqslant \tau)} dW_r + \int_0^s \int_Z \zeta^{\alpha}_r(z) I_{(r \leqslant \tau)} N_k(dr, dz),$$
$$\hat{q}^{\alpha}_s + \eta^{\alpha}_s, \hat{p}^{\alpha}_s + \zeta^{\alpha}_s, \omega\Big) I_{(s \leqslant \tau)} ds - \int_t^\infty \hat{q}^{\alpha}_s I_{(s \leqslant \tau)} dW_s$$
$$- \int_t^\infty \int_Z \hat{p}^{\alpha}_s(z) I_{(s \leqslant \tau)} N_k(ds, dz), \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

对 $|\hat{x}^{\alpha}_s - \hat{x}^{\alpha_0}_s|^2 e^{Ks}$ 在 $s \in [t, \infty)$ 应用 Itô 公式, 可得:

$$E\Big[|\hat{x}^{\alpha}_t - \hat{x}^{\alpha_0}_t|^2 e^{Kt} + \int_t^\infty (K|\hat{x}^{\alpha}_s - \hat{x}^{\alpha_0}_s|^2 + \|\hat{q}^{\alpha}_s - \hat{q}^{\alpha_0}_s\|^2 +$$
$$|\|\hat{p}^{\alpha}_s - \hat{p}^{\alpha_0}_s\||^2) e^{Ks} ds\Big] \leqslant$$
$$2E\int_t^\infty (\langle \hat{x}^{\alpha}_s - \hat{x}^{\alpha_0}_s, b^{\alpha}(s, U^{\alpha}_s, \xi^{\alpha}_s) - b^{\alpha_0}(s, U^{\alpha}_{s0}, \xi^{\alpha}_{s0})\rangle) e^{Ks} ds \leqslant$$
$$2E\int_t^\infty (\langle \hat{x}^{\alpha}_s - \hat{x}^{\alpha_0}_s, b^{\alpha}(s, U^{\alpha}_s, \xi^{\alpha}_s) - b^{\alpha_0}(s, U^{\alpha}_s, \xi^{\alpha}_s)\rangle +$$
$$\langle \hat{x}^{\alpha}_s - \hat{x}^{\alpha_0}_s, b^{\alpha_0}(s, U^{\alpha}_s, \xi^{\alpha}_s) - b^{\alpha_0}(s, U^{\alpha}_{s0}, \xi^{\alpha}_s)\rangle +$$
$$\langle \hat{x}^{\alpha}_s - \hat{x}^{\alpha_0}_s, b^{\alpha_0}(s, U^{\alpha}_{s0}, \xi^{\alpha}_s) - b^{\alpha_0}(s, U^{\alpha}_{s0}, \xi^{\alpha}_{s0})\rangle) e^{Ks} ds,$$

其中记

$$b^{\alpha_1}(s, U_s^{\alpha_2}, \xi_s^{\alpha_3}) = b\Big(\alpha_1, s, \hat{x}_s^{\alpha_2} + E\xi^{\alpha_3} + \int_0^s \eta_r^{\alpha_3} dW_r + \int_0^s\int_Z \zeta_r^{\alpha_3}(z)N_k(dr, dz), \hat{q}_s^{\alpha_2} + \eta_s^{\alpha_3}, \hat{p}_s^{\alpha_2} + \zeta_s^{\alpha_3}\Big),$$

从而, 可得:

$$E\Big[|\hat{x}_t^\alpha - \hat{x}_t^{\alpha_0}|^2 e^{Kt} + \frac{\delta_0}{8}\int_t^\infty |\hat{x}_s^\alpha - \hat{x}_s^{\alpha_0}|^2 e^{Ks} ds + \int_t^\infty \frac{1}{2}(\|\hat{q}_s^\alpha - \hat{q}_s^{\alpha_0}\|^2 + |\|\hat{p}_s^\alpha - \hat{p}_s^{\alpha_0}\||^2) e^{Ks} ds\Big] \leqslant$$
$$\frac{4}{\delta_0}\sup_{(x,q,p,\omega)}\int_0^\infty |b^\alpha(s,x,q,p,\omega) - b^{\alpha_0}(s,x,q,p,\omega)|^2 e^{Ks} ds + \frac{8}{\delta_0}E\int_0^\infty |b^{\alpha_0}(s, U_s^{\alpha_0}, \xi^\alpha) - b^{\alpha_0}(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0})|^2 e^{Ks} ds =$$
$$I_1 + I_2,$$

$$I_2 \leqslant \frac{8}{\delta_0}E\int_0^\infty\Big[\Big|E|\xi^\alpha - \xi^{\alpha_0}| + \int_0^s(\eta_r^\alpha - \eta_r^{\alpha_0})dW_r + \int_0^s\int_Z(\zeta_r^\alpha - \zeta_r^{\alpha_0})N_k(dr, dz)\Big|^2 c(s) + (\|\eta_s^\alpha - \eta_s^{\alpha_0}\|^2 + |\|\zeta_s^\alpha - \zeta_s^{\alpha_0}\||^2)c_2(s)\Big]e^{Ks}ds$$
$$\to 0,\qquad 当\ \alpha \to \alpha_0\ 时\cdot$$

故令 $\alpha \to \alpha_0$, 可得证:

$$(\hat{x}_t^\alpha, \hat{q}_t^\alpha, \hat{p}_t^\alpha) \to (\hat{x}_t^{\alpha_0}, \hat{q}_t^{\alpha_0}, \hat{p}_t^{\alpha_0}),$$

在 $H^{2,K}$ 中•

故由线性变换, 得 $\alpha \to \alpha_0$ 时,

$$(x_t^\alpha, q_t^\alpha, p_t^\alpha) \to (x_t^{\alpha_0}, q_t^{\alpha_0}, p_t^{\alpha_0})$$

在 $H^{(0)}$ 上• □

定理 2.4 假设(H2)至(H4)对 $b(\alpha, t, x, q, p, \omega)$ 关于 α 一致真, 对任意的 $(x_t, q_t, p_t) \in H^{(0)}$, 有:

$$b(\alpha, t, x_t, q_t, p_t, \omega) \in L^{2,K}_{(F_t)}([0, \tau]; \mathscr{R}^d)$$

且存在 $c(t) \geqslant 0$, $\int_0^\infty c(t)e^{Kt}dt < \infty$, 及 $k_0 \geqslant 0$, $c_2(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant c_2(t)e^{Kt} \leqslant k_0$, $\forall t$ 使

$$|b(\alpha, t, x_1, q_1, p_1, \omega) - b(\alpha, t, x_2, q_2, p_2, \omega)|^2 \leqslant c(t)|x_1 - x_2|^2 + c_2(t)(\|q_1 - q_2\|^2 + |\|p_1 - p_2\||^2) \tag{11}$$

对 α 为一致, 及

$$|b(\alpha, t, x, q, p, \omega)|^2 \leqslant c(t)(1 + |x|^2) + c_2(t)(\|q\|^2 + |\|p\||^2)\cdot$$

若 $\xi^\alpha \to \xi^{\alpha_0}$ 在 $L^2(\Omega, F_\tau, P)$ 中, 当 $\alpha \to \alpha_0$ 时; 且

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} b(\alpha, t, x, q, p, \omega) = b(\alpha_0, t, x, q, p, \omega) \qquad P-\text{a.s.}, \text{a.e. } t, \tag{12}$$

则定理 2.3 的结论仍成立•

证明 与定理 2.3 的证明类似, 令

$$\begin{cases} x_t^\alpha = \hat{x}_t^\alpha + E\xi^\alpha + \int_0^t \eta_s^\alpha I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_s + \int_0^t\int_Z \zeta_s^\alpha(z)I_{(s\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z), \\ q_t^\alpha = \hat{q}_t^\alpha + \eta_t^\alpha, \\ p_t^\alpha = \hat{p}_t^\alpha + \zeta_t^\alpha, \end{cases}$$

其中 $(\hat{x}_t^\alpha, \hat{q}_t^\alpha, \hat{p}_t^\alpha) \in H^{2K}$, 解下面的倒向随机微分方程(无穷区间 $[0, \infty)$):

$$\hat{x}_t^\alpha = \int_t^\infty b\Big(\alpha, s, \hat{x}_s^\alpha + E\xi^\alpha + \int_0^s \eta_r^\alpha I_{(r\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_r + \int_0^s\int_Z \zeta_r^\alpha(z)I_{(r\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}r,\mathrm{d}z),$$
$$\hat{q}_s^\alpha + \eta_s^\alpha, \hat{p}_s^\alpha + \zeta_s^\alpha, \omega\Big) I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}s - \int_t^\infty \hat{q}_s^\alpha I_{(s\leqslant\tau)}\mathrm{d}W_s -$$
$$\int_t^\infty\int_Z \hat{p}_s^\alpha(z)I_{(s\leqslant\tau)}N_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z), \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

对 $|\hat{x}_t^\alpha - \hat{x}_t^{\alpha_0}|^2 \mathrm{e}^{Kt}$ 在 $t \in [0, \infty)$ 应用 Itô 公式, 可得:

$$E\Big[|\hat{x}_t^\alpha - \hat{x}_t^{\alpha_0}|^2\mathrm{e}^{Kt} + \int_t^\infty(K|\hat{x}_s^\alpha - \hat{x}_s^{\alpha_0}|^2 + \|\hat{q}_s^\alpha - \hat{q}_s^{\alpha_0}\|^2 + \big|\|\hat{p}_s^\alpha - \hat{p}_s^{\alpha_0}\|\big|^2)\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s\Big] \leqslant$$
$$2E\int_t^\infty\langle\hat{x}_s^\alpha - \hat{x}_s^{\alpha_0}, b^\alpha(s, U_s^\alpha, \xi_s^\alpha) - b^{\alpha_0}(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0})\rangle\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$2E\int_t^\infty(\langle\hat{x}_s^\alpha - \hat{x}_s^{\alpha_0}, b^\alpha(s, U_s^\alpha, \xi_s^\alpha) - b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^\alpha)\rangle +$$
$$\langle\hat{x}_s^\alpha - \hat{x}_s^{\alpha_0}, b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^\alpha) - b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0})\rangle +$$
$$\langle\hat{x}_s^\alpha - \hat{x}_s^{\alpha_0}, b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0}) - b^{\alpha_0}(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0})\rangle)\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s,$$

其中 $b^{\alpha_1}(s, U_s^{\alpha_2}, \xi_s^{\alpha_3})$ 的记法同定理 2.3 中一样. 由(11), 知

$$E\int_0^\tau|b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^\alpha) - b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0})|^2\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \to 0, \qquad \text{当 } \alpha \to \alpha_0,$$

由(11)及(12), 又可得

$$E\int_0^\tau|b^\alpha(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0}) - b^{\alpha_0}(s, U_s^{\alpha_0}, \xi_s^{\alpha_0})|^2\mathrm{e}^{Ks}\mathrm{d}s \to 0, \qquad \text{当 } \alpha \to \alpha_0.$$ □

3 偏微分积分方程解的概率表示

讨论下述的拟线性椭圆型偏微分积分方程

$$\begin{aligned} l_{b,\sigma,c}u(x) &\triangleq \left(\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right)u(x) + \\ &\int_Z\left(u(x + c(x,z)) - u(x) - \sum_{i=1}^d c_i(x,z)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)\pi(\mathrm{d}z) = \\ &f(x, u(x), u_x(x)\cdot\sigma(x), u(x + c(x,\cdot)) - u(x)), \qquad x \in D, \\ u(x)|_{D^c} &= \varphi(x), \qquad u \in W_p^{1,2}(\mathscr{R}^d), \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $D \subset \mathscr{R}^d$, D 是一个有界的区域, $D^c = \mathscr{R}^d \setminus D$.

关于(13)解的存在及唯一性, 可参考[8]中有关定理讨论.

我们这里主要讨论其解的概率表示.

先讨论下述的正向随机微分方程: $(y_s^{t,x} \in \mathscr{R}^m)$

$$y_s^{t,x} = x + \int_t^s b(y_r^{t,x})\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(y_r^{t,x})\mathrm{d}W_r +$$

$$\int_t^s\int_Z c(y_{r-}^{t,x}, z)N_k(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z), \qquad t \leqslant s. \tag{14}$$

已知, 当系数小于线性增长, 且满足李氏条件, 则(14) 存在唯一的 $F_{t,s}^{W,N_k}$_适应解, 其中 $F_{t,s}^{W,N_k}$ 表示由 W_r、$N_k((t, r], U)$, $t \leqslant r \leqslant s$ 所产生的完备σ_代数. (见参考文献[9])

现对任给的 $t \geqslant 0$, $x \in D$, 令

$$\tau = \tau_x = \inf\left\{ s > t: y_s^{t,x} \notin D\right\},$$

讨论下述的倒向随机微分方程(为简化, 记 $y_s = y_s^{t,s}$)

$$x_s = \varphi(y_\tau) - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} f(y_r, x_r, q_r, p_r)\mathrm{d}r - \int_{s\wedge\tau}^{\tau} q_r\mathrm{d}w_r - \int_{s\wedge\tau}^{\tau}\int_Z p_r(z)N_k(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z), \qquad t \leqslant s. \tag{15}$$

假设, $f(y, \cdot, \cdot, \cdot)$ 满足定理1.4中关于 b 所述的条件, 且对 y 为一致地满足; 又设 $E\left|\varphi(y_\tau)\right|^2 e^{K\tau} < \infty$, 则由定理 1.4, (15) 存在唯一解

$$(x_t, q_t, p_t) \in L_{(F_t)}^{2,K}(\mathscr{R}^d) \times L_{(F_t)}^{2,K}(\mathscr{R}^{d\otimes r}) \times F_{k,(F_t)}^{2,K}(\mathscr{R}^d).$$

现设 σ 为一致地非退化, 即 $\exists\beta > 0$,

$$\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \beta|\xi|^2, \qquad \forall x \in \bar{D}\,(= D \text{ 的闭包}).$$

因此, (13) 是一个真正的拟线性二阶椭圆型偏微分积分方程.

我们有下列的定理:

定理 3.1 在上述条件下, 设 $p > 2d + 4$. 则(13) 的解可用倒向随机微分方程(15) 的解 $x_s|_{s=t}$ 概率表示,

$$u(t, x) = x_s|_{s=t} = E_{t,x}x_t.$$

定理 3.1 的证明可参照文献[4] 定理 7 的证明去完成, 这里的关键是: 在 $p > 2d + 4$ 条件下, 关于Sobolev 导数的 Itô 公式(对带跳的随机微分方程) 成立(见[4]). 故可用 Itô 公式完成证明.

最后, 作者谨对审搞者提出的有益建议并指出的一些笔误表示衷心的谢意.

[参 考 文 献]

[1] El Karoui N, Peng S, Quenez M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Math Finance, 1997, **7**(1): 1~71.

[2] Peng S. Probabilistic interpretation for system of quasi_linear parabolic partial differential equations [J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1991, **37**: 61~74.

[3] Peng S. Backward stochastic differential equations[A]. In: Lecture Notes on Stochastic Calculus and Applications to Mathematical Finance[C]. Beijing: CIMPA School, 1994.

[4] Situ Rong. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications[J]. Stochastic Process Appl, 1997, **66**(2): 209~236.

[5] Darling R, Pardoux E. Backward SDE with random time and applications to semi_linear elliptic PDE [J]. Anna Prob, 1997, **25**(3): 1135~1159.

[6] 陈增敬. 带有停时的倒向随机微分方程解的存在性[J]. 科学通报, 1997, **42**(22): 2379~2382.

[7] Tang S, Li X. Necessary conditions for optimal control of stochastic system with random jumps[J]. SIAM J Control Optim, 1994, **32**(5): 1447~1475.

[8] Ladyzenskaja O, Uralceva N N. Linear and Quasilinear Elliptic Equations[M]. N Y: Academic

Press, 1968.

[9] Situ Rong. On strong solutions, uniqueness, stability and comparison theorem for a stochastic system with Poisson jumps[A]. In: Lecture Notes in Control and Inform Sci[C]. Berlin_New York: Springer, 1985, **75**: 352~381.

On Solutions of Backward Stochastic Differential Equations With Jumps, With Unbounded Stopping Times as Terminal and With Non_Lipschitz Coefficients, and Probabilistic Interpretation of Quasi_Linear Elliptic Type Integro_Differential Equations

Situ Rong, Wang Yueping
(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, P R China)

Abstract: The existence and uniqueness of solutions to backward stochastic differential equations with jumps and with unbounded stopping time as terminal under the non_Lipschitz condition are obtained. The convergence of solutions and the continuous dependence of solutions on parameters are also derived. Then the probabilistic interpretation of solutions to some kinds of quasi_linear elliptic type integrodifferential equations is obtained.

Key words: backward stochastic differential equations(BSDEs) with jumps; unbounded stopping time; adapted solutions; convergence of solutions; quasi_linear elliptic equations; integro_defferential operators.