

文章编号: 1000-0887(2000) 06-0625-08

# 样条状态变量法分析弹性矩形板的动力响应

陈荣毅<sup>1</sup>, 沈小璞<sup>2</sup>, 沈鹏程<sup>3</sup>

(1 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2 安徽建筑工业学院 建筑工程系, 合肥 230022;  
3 合肥工业大学 土木工程系, 合肥 230009)

(何福保推荐)

**摘要:** 应用样条元与状态空间法分析矩形板的动力响应问题 对空间域采用样条元法, 对时间域采用现代控制论中的状态空间法 建立了状态变量递推格式, 可直接计算结构的动力响应量 文末给出了若干数值算例, 计算结果表明, 该方法的计算精度与效率是令人满意的

**关键词:** 样条元; 状态空间法; 动力响应; 递推格式; 样条状态变量法  
**中图分类号:** TU311.3 **文献标识码:** A

## 引 言

结构受到瞬态荷载, 如爆炸荷载、地震等作用下, 结构抗爆与抗震的安全性能是工程师们特别关注的问题 传统的动力响应时程分析方法, 在国内外已有不少研究工作, 如振型叠加法<sup>[1]</sup>、纽马克法(Newmark)<sup>[2]</sup>与威尔逊法(Wilson)<sup>[3]</sup>等 上述方法所使用的积分步长要足够小, 通常要小于参振振型的自振周期, 以便能反映这些振型的参振作用, 当自由度较高时, 计算工作量变得很大 文献[4, 5]提出样条配点法, 该法应用三次 B 样条函数构造时域函数, 通过振型叠加法逐个计算各个振型的参振作用, 并要考虑解的稳定性问题 文献[6]提出了一种基于格丁(Gurtin)变分原理来求解结构动力响应的半解析数值方法, 该法对空间域采用有限元法, 对时间域采用三角级数, 在求解过程中, 不必考虑解的稳定性问题, 但需要求解线性方程组, 随着自由度的增加而工作量急剧增大 文献[7]提出精细逐步积分法, 这是一种无条件稳定的计算格式, 由于采用了所谓精细步长, 因此计算精度甚高

本文提出一种新的解法称为样条状态变量法 基于弹性力学中的瞬时变分原理与样条函数理论建立弹性板的动力方程, 引入样条函数及其对时间的导数作为状态变量, 导出状态方程 对时间域, 采用现代控制论中的状态空间法; 对空间域, 采用样条有限元法 此外, 文中还提出一种状态变量递推算格式, 可直接求解动力响应量 在计算过程中, 不需要解线性方程组, 不采用降阶解耦技术, 只作矩阵运算, 步长的选取不受结构自振特性的制约 再者, 由于样条函数具有解析与数值的双重特性, 连续性强, 逼近精度高, 待求未知数少等优点, 因

收稿日期: 1999\_01\_18; 修订日期: 1999\_12\_24  
基金项目: 安徽省教委自然科学基金资助项目(97JL171)  
作者简介: 陈荣毅(1973~), 男, 福建尤溪人, 博士生.

此, 本文方法比传统的方法优越 文末给出若干数值算例, 计算结果表明精度与效率是令人满意的 本文方法对多输入多输出、时变系统和非线性系统等有广阔发展与应用前景

### 1 弹性板的样条动力方程

本文以弹性矩形板为例, 应用乘积型三次 B 样条函数来构造动力响应场函数:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} d_{ij}(t) \phi_i(x) \psi_j(y) = \mathbf{d}^T(t) \boldsymbol{\Phi}(x, y) \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{d}(t)$  是与时间有关的矩阵向量,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= [d_{-1}(t) \quad d_0(t) \quad d_1(t) \quad \dots \quad d_{N+1}(t)]^T, \\ d_i(t) &= [d_{-1i}(t) \quad d_{0i}(t) \quad d_{1i}(t) \quad \dots \quad d_{N+1,i}(t)]^T, \\ &\quad (i = -1, 0, 1, \dots, M, M+1), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

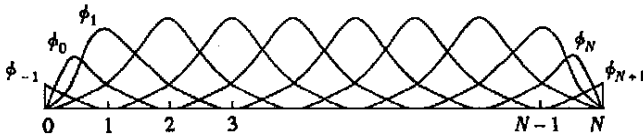
为 Kronecker 乘积, 即  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (a_{ij} \mathbf{B})$

为了简单起见, 在下述公式中, 时间符号予以省略

式(1)中的多点样条函数如图 1 所示, 见式(3), 具体形式详见文献[8] 三次基样条函数

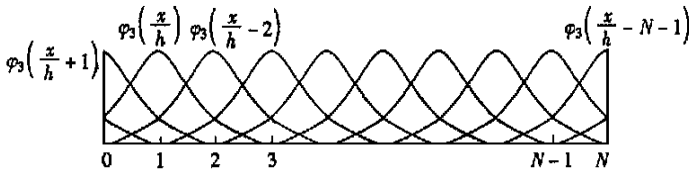
$\phi_i(x/h - i) (i = -1, 0, 1, \dots, N, N+1)$  如图 2 所示, 详见文献[8]

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = [\phi_{-1}(x) \quad \phi_0(x) \quad \phi_1(x) \quad \dots \quad \phi_N(x) \quad \phi_{N+1}(x)] \quad (x = x, y) \quad (3)$$



$\phi_i(x), (i = -1, 0, 1, \dots, N+1)$

图 1 修正的多点基样条函数



$\phi_3(x/h - i), (i = -1, 0, 1, \dots, N, N+1)$

图 2 三次标准基样条函数

弹性矩形板的瞬时势能泛函为<sup>[9]</sup>:

$$p = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{D}_b \mathbf{d} - (q - c_w - w) w d - c_1 + c_2 \left[ \frac{M_{ms}}{s} + Q_n \right] (w - w) ds + c_1 M_n \left[ \frac{w}{n} - \right] ds + c_2 + c_3 M_n \frac{w}{n} ds, \quad (4)$$

式中

$$= \left[ -\frac{2w}{x^2} \quad -\frac{2w}{y^2} \quad -2 \frac{2w}{x \ y} \right]^T, \quad (5)$$

$$D_b = D_b \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (6)$$

其中,  $D_b$  板的弯曲弹性矩阵,  $E$  杨氏模量,  $\nu$  泊松比;  $C$  阻尼系数,  $\rho$  单位面积或单位体积的质量,  $t$  板厚度,  $w, \dot{w}, \ddot{w}$  结构的位移、速度和加速度,  $q(x, y)$  动荷载;

$$\left. \begin{aligned} C_1 & \text{ 固定边, } w = 0, \quad w/n = 0; \\ C_2 & \text{ 简支边, } w = 0, \quad M_n = 0; \\ C_3 & \text{ 自由边, } M_n = 0, \quad M_{ns}/s + Q_n = q \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

现将式(1)代入式(4), 弹性板的离散瞬时势能泛函变为:

$$p = \frac{1}{2} d^T K d + d^T C \dot{d} + d^T M \ddot{d} - d^T F, \quad (8)$$

式中

$$K = D_b [A_y^{00} \quad A_x^{22} + (A_y^{02T} \quad A_x^{02} + A_y^{02} \quad A_x^{02T}) + A_y^{22} \quad A_x^{00} + 2(1-\nu)A_x^{11} \quad A_y^{11}], \quad (9)$$

$$C = cA_x^{00} \quad A_y^{00}; \quad M = A_x^{00} \quad A_y^{00}, \quad (10)$$

$$F = \int q^T(x) \quad \int^T(y) dx, \quad (11)$$

$$\text{其中 } A_x^{ij} = \int_0^L i^T(x) \quad j(x) dx, \quad (x = x, y; \quad i, j = 0, 1, 2), \quad (12)$$

式(12) 详见文献[8]

由瞬时变分原理得:

$$-\frac{p}{d} = 0, \quad M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F, \quad (13)$$

方程(13) 为弹性矩形板的样条动力方程

动力弯矩表达式为:

$$M(x, y, t) = [M_x(x, y, t) \quad M_y(x, y, t) \quad M_{xy}(x, y, t)]^T = D_b \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{2w(x, y, t)}{x^2} \\ -\frac{2w(x, y, t)}{y^2} \\ -2\frac{2w(x, y, t)}{x y} \end{Bmatrix} = -D_b \left\{ \begin{aligned} & \begin{matrix} N_x-1 & M_x+1 \\ i=-1 & j=-1 \end{matrix} [d_{ij}(t) \quad i(x) \quad j(y) + d_{ij}(t) \quad i(x) \quad j(y)] \\ & \begin{matrix} N_x-1 & M_x+1 \\ i=-1 & j=-1 \end{matrix} [d_{ij}(t) \quad i(x) \quad j(y) + d_{ij}(t) \quad i(x) \quad j(y)] \\ & (1-\nu) \begin{matrix} N_x-1 & M_x+1 \\ i=-1 & j=-1 \end{matrix} [d_{ij}(t) \quad i(x) \quad j(y)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

## 2 样条状态变量法

根据上节导出的弹性薄板样条动力方程,引入样条参数  $d$  及其对时间的导数  $\dot{d}$  组成状态向量  $q$ , 则动力方程(13) 可改写成如下的状态方程

$$q = Dq + P, \quad q = \begin{Bmatrix} d \\ \dot{d} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

式中,

$$D = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{array} \right], \quad P = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{Bmatrix} \quad (16)$$

方程(15) 的解答是<sup>[10]</sup>

$$q(t) = e^{D(t)} q(0) + \int_0^t e^{D(t-\tau)} P(\tau) d\tau \quad (17)$$

上式中, 有  $2n$  个动力响应量, 其中包括  $n$  个样条参数  $d$  的响应量及其  $n$  个导数  $\dot{d}$  的响应量。其中, 矩阵指数函数可采用凯莱-哈密顿算法(Kaley-Hamilton) 或麦克劳林(Maclaurin) 直接展开法, 而积分项可采用数值积分法来计算, 如高斯积分法

结构总的动力响应由两部分组成: 第一部分是由初始状态引起的样条参数响应量

$$q_0(d, \dot{d}) = e^{Dt} q_0(d_0, \dot{d}_0), \quad (18)$$

第二部分是由动荷载引起的样条参数响应量

$$q_p(d, \dot{d}) = \int_0^t PL_0(t-\tau) d\tau + \int_0^t D^{n-1} PL_{n-1}(t-\tau) d\tau \quad (19)$$

上式中的  $L_0, L_1, \dots, L_i, \dots, L_{n-1}$  为矩阵指数函数展开成有限项的  $D$  的系数, 具体求法详见文献[10]。当求出了样条参数  $d$  及其对时间的导数  $\dot{d}$  后, 将其代入式(13) 求得  $w$ , 然后由式(1)、式(13) 与式(14), 求出弹性板的挠度、速度、加速度和弯矩动力响应量

## 3 状态变量递推格式

上节介绍的样条状态变量法, 在计算结构动力响应问题时, 需求解  $D$  矩阵的特征值, 有了特征值后, 才能将矩阵指数函数展开有限项, 并求得  $L(t)$ , 从而可确定矩阵指数函数对自由度较大的问题, 计算起来还是比较费时的。本节提出一种状态变量递推格式来计算结构动力响应量。对图3所示动荷载函数曲线, 划分许多时间间隔段, 在  $t$  时间间隔里, 动荷载可近似看作为线性变化, 则有

$$P = P_k + P_s t, \quad 0 \leq t \leq \Delta t, \quad (20)$$

其中  $P_s = \frac{P_{k+1} - P_k}{\Delta t}$

动力响应的积分项为

$$\int_0^{\Delta t} e^{D(t-\tau)} (P_k + P_s \tau) d\tau = S_1 P_k + S_2 P_{k+1}, \quad (21)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= ( \quad 2 \quad t - S_2 ), \\ S_2 &= D^{-1} ( \quad 2 - I ), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$2 = \frac{(D \quad t)^k}{k+1)!} \quad (23)$$

这样,样条参数动力响应量由下式计算

$$q_{k+1}(t_{k+1}) = \quad 1 q_k(t_k) + S_1 P_k + S_2 P_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

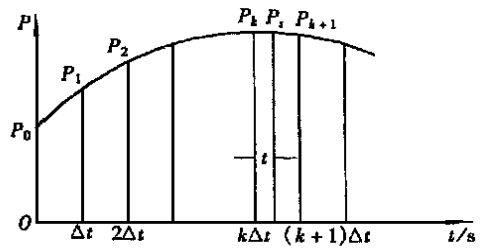


图3 动荷载函数

若取相等的时间步长,则  $S_1$  和  $S_2$  在计算过程中保持不变 对于动荷载在时间间隔  $t$  内为一常量时,则状态变量递推算式为:

$$q_{k+1}(t_{k+1}) = \quad 1 q_k(t_k) + \quad t \quad 2 P(t_k), \quad (25)$$

或者  $q_{k+1}(t_{k+1}) = \quad 1 q_k(t_k) + \quad 1 D^{-1} P(t_k) - D^{-1} P(t_k),$

$$1 = \frac{(D \quad t)^k}{k!}, \quad 2 = \frac{(D \quad t)^k}{(k+1)!} \quad (26)$$

根据式(24)或者式(25)与(26)可进行动力样条参数响应的计算 再根据式(1)、(13)、(14)计算位移、速度、加速度与内力矩的动力响应量

### 4 数值算例与结语

为了验证本文方法的正确可靠与有效性,选取文献[11]中的若干数值算例,通过我们编制的计算程序SSVM的验算,计算结果与解析解十分吻合 算例中板的几何物理参数为:

$$\begin{aligned} L &= 4.0 \text{ m}, \quad t = 0.1 \text{ m}, \quad E = 2.1 \times 10^5 \text{ kN/m}^2, \\ &= 0.3, \quad = 1.0 \text{ kN/m}^2, \quad c = 0.0 \end{aligned}$$

集中荷载为  $P = 1.0 \text{ kN}$ , 均布荷载为  $q = 1.0 \text{ kN/m}^2$

#### 算例1 弹性方板中心点承受集中突加荷载情况

表1 板中心处位移与弯矩的最大响应

板的类型	四边简支		四边固支	
	$w/m$	$M_x(M_y)/kN \quad m/m$	$w/m$	$M_x(M_y)/kN \quad m/m$
响应量				
最大响应	0.01852	0.46145	0.00815	0.36361
静力响应[11]	0.00965		0.00466	

#### 算例2 弹性方板承受均布荷载情况

表2 板中心处位移与弯矩的最大响应

板的类型	四边简支		四边固支	
	$w/m$	$M_x(M_y)/kN \quad m/m$	$w/m$	$M_x(M_y)/kN \quad m/m$
响应量				
最大响应	0.10842	1.7178	0.03443	0.9683
静力响应[11]	0.05405	0.7936	0.01684	0.3696

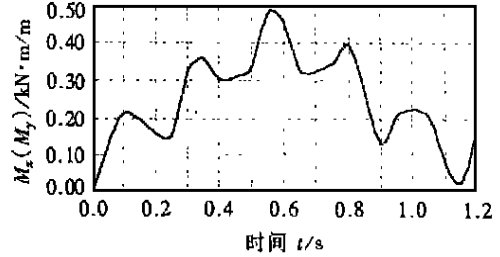
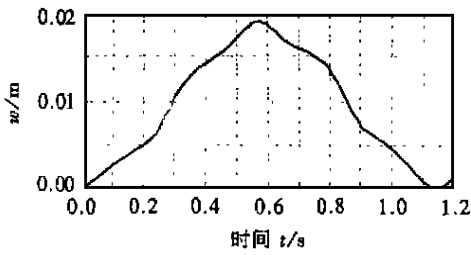


图4 简支方板中心点处的位移和弯矩响应

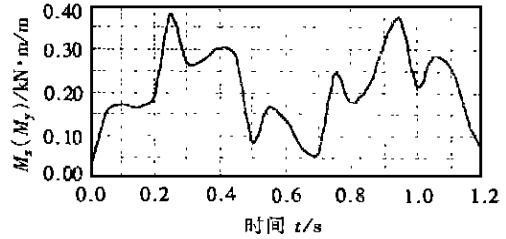
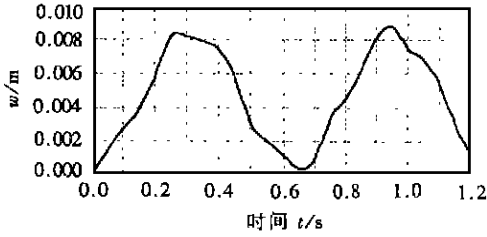


图5 固支方板中心点处的位移和弯矩响应

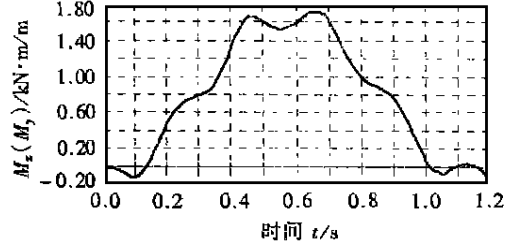
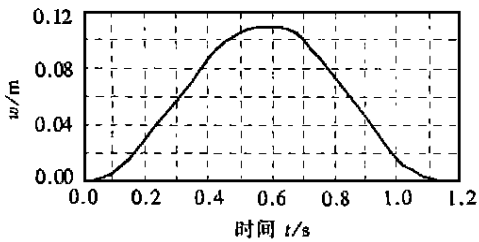


图6 简支方板中心点处的位移和弯矩响应

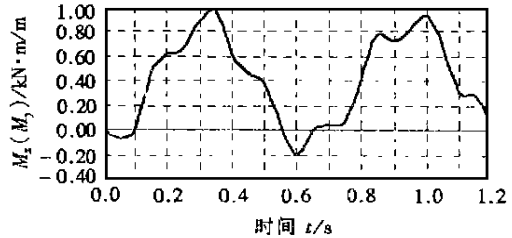
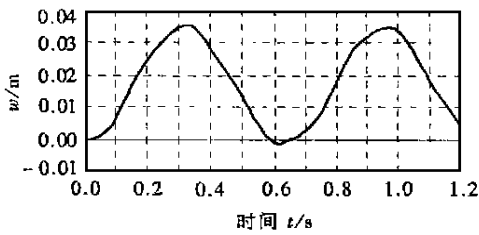


图7 固支方板中心点处的位移和弯矩响应

本文提出的方法有以下一些特点:

- 1 基于瞬时变分原理,应用乘积型三次 B 样条函数,建立样条动力方程,直接得到结构整体刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和整体荷载向量,使计算十分简单

- 2 引入样条参数及其对时间的导数作为状态变量, 建立的状态方程是一阶常系数微分方程组 状态方程的积分为矩阵指数函数的计算, 动力响应量的计算即为状态变量的计算
- 3 状态变量递推算法, 不要求解线性方程组, 也不作降阶解耦处理, 只作矩阵运算, 编程容易, 计算方便
- 4 该方法在计算过程中, 步长的选取完全不受结构自振特性的制约 若与精细算法和并行算法相结合, 使计算精度与效率得到极大的提高
- 5 该方法能计算多输入与多输出、时变系统与非线性系统等问题

### [参 考 文 献]

- [1] Clough R W. Dynamics of Structures [M]. New York: McGraw\_Hill Book Co, 1975.
- [2] Newmak N M. A method of computation for structural dynamics[J]. ASCE J Engineering Mechanics Division, 1959, **85**(3): 67~ 94.
- [3] Bathe K J, Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analsis [M]. New Jersey: Prentice\_Hall, Inc, 1976.
- [4] 林文菁, 徐次达. 样条配点法分析结构动力响应的无条件稳定计算格式[J]. 力学学报, 1988, **20**(4): 353~ 361.
- [5] Shen Pengcheng, Huang Dade. Dynamics analysis of stiffened plates and shells using spline Gauss collocation method[J]. Int J Computers & Structures, 1990, **36**(4): 625~ 629.
- [6] 彭建设, 张敬宇. 由 Gurtin 变分原理求解一维动力响应的半解析法[J]. 力学学报, 1998, **26**(6): 708.
- [7] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, **12**(1): 1~ 6.
- [8] 沈鹏程. 多变量样条有限元法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [9] 秦荣. 计算结构动力学[M]. 南宁: 广西师范大学出版社, 1997.
- [10] 常春馨. 现代控制理论基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1988.
- [11] Timoshenko S P, Krieger S W. Theory of Plates and Shells [M]. 2nd ed. New York McGraw\_Hill, 1959.
- [12] 石钟慈. 样条有限元[J]. 计算数学, 1979, **1**(1): 50~ 72.
- [13] Mizusawa T, Kajita T, Naruok M. Vibration of skew plates using spline functions[J]. J Sound and Vibration, 1979, **62**(2): 301~ 308.
- [14] 沈小璞, 肖卓. 高层建筑结构动力时程响应分析的状态空间迭代法[J]. 建筑结构学报, 1998, **19**(5): 8~ 16.
- [15] Shen Pengcheng, He Peixiang. Vibration analysis for plates using multivariable spline element method[J]. Int J Solid & Structures, 1992, **29**(24): 3289~ 3295.
- [16] 侯宇, 何福保. 变厚度环形板自由振动问题的状态空间法[J]. 计算结构力学及其应用, 1988, **5**(1): 29~ 38.
- [17] 王秀喜. 工程中的计算力学及其应用[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1992.

## Dynamic Response of Elastic Rectangular Plates by Spline State Variable Method

Chen Rongyi<sup>1</sup>, Shen Xiaopu<sup>2</sup>, Shen Pengcheng<sup>3</sup>

(1 Structural Engineering Department, Tongji University, Shanghai 200092, P R China;

2 Structural Engineering Department, Anhui Industry College of Architecture, Hefei 230022, P R China;

3 Civil Engineering Department, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P R China)

**Abstract:** Application of spline element and state space method for analysis of dynamic response of elastic rectangular plates is presented. The spline element method is used for space domain and the state space method in control theory of system is used for time domain. A state variable recursive scheme is developed, then the dynamic response of structure can be calculated directly. Several numerical examples are given. The results which are presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the present method are quite satisfactory.

**Key words:** spline element; state space method; dynamic response; recursive scheme; spline state variable method