

文章编号: 1000-0887(2000) 06\_0633\_07

# 梁的弹塑性大挠度数值分析<sup>\*</sup>

千 洪

(安徽建筑工业学院 建筑工程系, 合肥 230022)

(唐立民推荐)

摘要: 采用分层法研究 Timoshenko 型直梁的弹塑性大挠度数值问题, 由 TL 列式法建立梁的非线性平衡方程, 采用 mNR 法求解。详细介绍了单元的切线刚度矩阵形成过程及求解步骤。解的情况令人满意。

关键词: 弹塑性; 大挠度; 分层法; TL 列式法; mNR 法

中图分类号: O344.3; TU323.3 文献标识码: A

## 引 言

随着材料科学的发展和技术工艺方面的不断要求, 杆件的大挠度非线性问题一直是工程应用领域的重要研究课题。在 60 年代初期, 研究范围仅局限于 Euler 的 *Elastica* 理论, 即为线弹性材料柔性杆件的几何非线性问题, Frish\_Fay 的专著<sup>[1]</sup> 对此作了概括性的综述。80 年代以来的这类研究主要是数值分析, 如 Wang 等人<sup>[2~4]</sup> 利用摄动法和数值积分法求解 *Elastica* 方程, 还有一些利用有限元法成功计算<sup>[5~7]</sup>, 分析了某些具体问题。

与此同时, Owen 等人<sup>[8]</sup> 利用某些简化措施进行了 Timoshenko 梁的弹塑性有限元分析。在 80 年代后期到 90 年代, 杆件的弹塑性大挠度问题及其数值分析继续引起人们的注意<sup>[9, 10]</sup>。由于同时考虑几何与物理两方面的非线性, 特别是塑性变形的不可逆性, 使得基于 *Plastica* 方程理论的大挠度分析不仅在本质规律上与 *Elastica* 理论不同, 而且大大增加了数学描述和实际计算的困难。文[9] 就理想弹塑性材料对相应的 *Elastica* 方程以及加载和卸载阶段的 *Plastica* 方程进行了理论研究和解析分析。在数值计算方面, 文[10] 就梁、板、壳的双重非线性问题进行了张量形式的有限元列式分析, 并就实用计算方面提出了若干简化措施。

本文采用分层法研究 Timoshenko 梁的弹塑性大挠度问题。采用 TL 列式法, 由虚功原理导出梁的非线性平衡方程, 采用 mNR 法求解, 详细推导了梁的弹塑性大挠度情形下的切线刚度矩阵, 并对 mNR 的计算步骤及程序实现过程作了详细介绍。本文力学模型建立的基本假定有:

- 1) Timoshenko 梁截面变形的平截面假定;
- 2) 材料为理想弹塑性;

\* 收稿日期: 1999\_04\_23; 修订日期: 2000\_02\_10  
基金项目: 安徽省教委科研基金资助课题(95JL0130)  
作者简介: 千洪(1954~), 男, 安徽巢湖人, 教授, 工学硕士。

3) 只考虑正应力对屈服的影响。

## 1 梁的分层法弹塑性分析

对 Timoshenko 型梁单元的弹塑性分析, 当采用 TL 列式法时, 第二类 Piola\_Kirchhoff 应力分量为  $\alpha_x$ 、 $\tau_{xz}$ , 相应的 Green\_Lagrange 应变分量为  $\epsilon_x$ 、 $\gamma_{xz}$ 。设想把梁单元沿厚度方向分为若干层, 由截面的平衡条件, 可将截面的轴力、剪力及弯矩表示为

$$N_x = \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \alpha_x b dz, \quad Q_x = \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{xz} b dz, \quad M_x = \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \alpha_x z b dz, \quad (1)$$

这里  $n$  为截面分层数,  $z_i$  为各子层表面至截面中性层高度,  $b$  为截面宽度。另外, 由假设 1 每一子层纤维的应变与梁中面应变和曲率的关系为

$$\epsilon_{xi} = \epsilon_0 + z \chi \quad (2)$$

理想弹塑性材料的应力\_应变本构关系为

$$\sigma_i = \begin{cases} E \epsilon & \text{当 } |\epsilon| < |\epsilon_s|, \\ E(\epsilon - \epsilon_{pi}) & \text{当 } |\epsilon| > |\epsilon_s|, \end{cases} \quad (3)$$

式中  $E$  为弹性模量,  $\epsilon_{pi}$  为不可恢复的塑性应变,  $\epsilon_s$  为屈服应变(参考图 1), 由假设 3 和假设 1, 各子层的剪应力可表示为

$$\tau_{xzi} = G \gamma_{xzi} = G \gamma_{xz} \quad (4)$$

对(3)式取变分, 即得增量形式的应力\_应变关系

$$\delta \sigma_i = \begin{cases} E \delta \epsilon & \text{当 } |\sigma_i| < |\sigma_s|, \\ 0 & \text{当 } |\sigma_i| = |\sigma_s|, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\sigma_s$  为屈服应力。将(2)、(3)式代入(1)式, 便可将弹塑性状态梁的截面内力写成

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} E(\epsilon_0 + z \chi - \epsilon_{pi}) b dz, \\ M_x &= \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} E(\epsilon_0 + z \chi - \epsilon_{pi}) z b dz, \\ Q_x &= \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} G \gamma_{xz} b dz. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

若以每一子层的中面宽度近似表示该层宽度, 便可完成上式积分, 写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n b_i \begin{bmatrix} E(z_{i+1} - z_i) & \frac{1}{2} E(z_{i+1}^2 - z_i^2) & 0 \\ \frac{1}{2} E(z_{i+1}^2 - z_i^2) & \frac{1}{3} E(z_{i+1}^3 - z_i^3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} G(z_{i+1} - z_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \chi \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \epsilon_{pi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

式中  $\epsilon_{pi}$  为各子层中面不可恢复的塑性应变, 可依下式求出

$$\epsilon_{pi} = \epsilon_{xi} - \epsilon_s, \quad (8)$$

$1/\alpha$  为截面修正系数<sup>[8]</sup>。由于各子层中面应变  $\epsilon_{xi}$  均依赖其应变历史, 因此对于每一加载步所有子层的应变均需存贮。现在, 可将分层法的屈服条件表示为: 以每一子层中面的应力状态代表该层的应力状态, 当该薄层材料的中面应力达到屈服极限时, 该子层就进入了屈服状态。这样在 mNR 法迭代过程中, 便可根据上一步迭代所得到的应变增量, 由(2)式及(8)式计算出每

一子层的应变  $\varepsilon_{xi}$  及  $\varepsilon_{pi}$ , 再由 (7) 式计算当前荷载水平下梁的内力, 用于求 mNR 法中的结点不平衡力和初应力矩阵. (7) 式可记成

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_p) \tag{9}$$

的形式, 其增量方程可参照(5)式写成

$$d\sigma = D_t d\varepsilon, \tag{10}$$

其中  $d\sigma = [dN_x \ dM_x \ dQ_x]^T$ ,  $d\varepsilon = [d\varepsilon_0 \ d\alpha \ d\gamma_{xz}]^T$ . (11)

$D_t$  为切线模量, 反映广义应力\_应变增量形式的弹塑性本构关系, 具体要视当前荷载水平下各子层的应力情况, 根据(5)式予以调整.

## 2 梁的几何非线性有限元列式

图2 为三结点 Timoshenko 型直梁单元, 其位移模式可写成

$$u = [u \ w \ \theta_x]^T = N\delta, \tag{12}$$

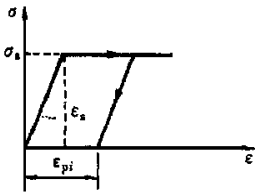


图1 理想弹塑性材料的应力\_应变关系

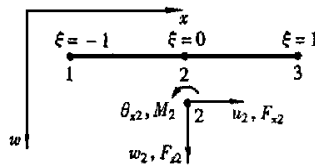


图2 单元的结点位移与结点力

式中  $\delta$  为单元结点位移列阵,  $N$  为形函数矩阵, 本文将形函数取为二次抛物线形式

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \quad N_2 = (1-\xi)(1+\xi), \quad N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi), \tag{13}$$

这里  $\xi$  为单元的局部坐标, 采用等参分析时, 梁的几何坐标变换为

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i. \tag{14}$$

Timoshenko 梁的大挠度几何方程为

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \alpha \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d\theta}{dx} \\ \frac{dw}{dx} - \theta_x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_0 + \varepsilon_L, \tag{15}$$

式中  $\varepsilon_0$  为梁的小挠度广义应变列阵,  $\varepsilon_L$  为  $\varepsilon$  的几何非线性部分. 将(12)式代入上式, 便可将单元的应变列阵写成插值形式

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_L = \left[ B_0 + \frac{1}{2} B_L \right] = B\delta, \tag{16}$$

式中  $B_0$  为小挠度应变矩阵, 现分析非线性应变  $\varepsilon_L$ , 可将其写成

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} C_{\delta_b} \cdot C_{\delta_b} = \frac{1}{2} B_L^b \delta_b, \tag{17}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \\ \delta_{\mathbf{b}} &= [w_1 \quad \theta_{x1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad w_3 \quad \theta_{x3}]^T, \\ \mathbf{B}_L^b &= \mathbf{C} \delta_{\mathbf{b}} \mathbf{C}^T \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

经过这样处理, (16) 式中非线性应变矩阵  $\mathbf{B}_L$  即可写成

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_L^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

在  $\mathbf{B}_0$ 、 $\mathbf{B}_L$  矩阵元素中, 涉及形函数偏导数的处理, 请参阅文 [7]。

### 3 虚功平衡方程及其增量形式

梁单元的虚功方程为

$$\int_L (\delta \varepsilon)^T \sigma dx - \int_L (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{q} dx = 0, \quad (20)$$

代入(16)、(12)式, 并注意到

$$\delta \varepsilon = \delta \left[ \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \delta \right] = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \delta, \quad (21)$$

便可将(20)式写成

$$\int_L (\delta \delta)^T (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \sigma dx - \int_L (\delta \delta)^T \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx = 0. \quad (22)$$

由此可得到

$$\int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \sigma dx - \mathbf{R} = 0, \quad (23)$$

式中  $\mathbf{R} = \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx$  为单元的等效结点荷载, (23) 式即为梁单元的非线性平衡方程。若令

$$\phi = \int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \sigma dx - \mathbf{R}, \quad (24)$$

则其增量形式可由(10)及(19)式进行推导

$$\begin{aligned} d\phi &= \int_L d(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \sigma dx + \int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T d\sigma dx = \\ &= \int_L d\mathbf{B}_L^T \sigma dx + \int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \mathbf{D}_t d\varepsilon dx = \\ &= \int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \mathbf{D}_t (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) dx d\delta + \int_L d\mathbf{B}_L^T \sigma dx = \\ &= (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma) d\delta = \\ &= \mathbf{K}_T d\delta, \end{aligned} \quad (25)$$

式中  $\mathbf{D}_t$  为切线模量,  $\mathbf{K}_T$  即为单元的弹塑性大挠度情形下的切线刚度矩阵, 且

$$\mathbf{K}_0 = \int_L \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_t \mathbf{B}_0 dx, \quad \mathbf{K}_L = \int_L (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_t \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_t \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_t \mathbf{B}_L) dx \quad (26)$$

分别称为单元的几何线性刚度矩阵和大位移矩阵, (25) 式后一项即为初始应力矩阵  $\mathbf{K}_\sigma$ , 由于

$$d\mathbf{B}_L^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d(\mathbf{B}_L^b)^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}^T d(\mathbf{C} \delta_{\mathbf{b}})^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}^T d(\mathbf{C} \delta_{\mathbf{b}}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}^T \mathbf{C} d\delta_{\mathbf{b}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

所以

$$\int_L d\mathbf{B}_L^T \sigma dx = \int_L \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}^T \mathbf{C} d \delta_b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} dx = \int_L \begin{Bmatrix} 0 \\ N_x \mathbf{C}^T \mathbf{C} d \delta_b \end{Bmatrix} dx = \int_L \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}^T N_x \mathbf{C} \end{bmatrix} dx d \delta_b \quad (28)$$

$$\text{故 } \mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \int_L \mathbf{C}^T N_x \mathbf{C} dx \end{bmatrix} \cdot \quad (29)$$

上式中梁的轴力  $N_x$  应根据当前荷载水平下各子层的应变情况由(7) 式确定。由(25)、(19) 式可知  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T(\delta, \sigma)$ , 即与当前的位移、应力有关。至于(26)、(29) 式的积分, 利用等参变换技术, 容易写成 Gauss 数值积分的标准形式并编入程序执行相应的计算, 不再赘述。

#### 4 mNR 法的求解过程

考虑(24) 式, 对各单元求和, 便可将系统的非线性平衡方程写成

$$\phi(\delta, \sigma) = \sum_e \int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \sigma dx - \mathbf{R} = 0 \quad (30)$$

的形式, 这里  $\delta$  应理解为系统的结点位移列阵,  $\mathbf{R}$  为系统的等效结点荷载。Newton\_Raphson 法的求解思想是将非线性平衡方程  $\phi(\delta, \sigma) = 0$  在某一近似解  $\delta_k$  处由切线增量方程

$$\phi(\delta_k, \sigma_k) + \mathbf{K}_T(\delta_k, \sigma_k)(\delta - \delta_k) = 0 \quad (31)$$

来近似, 由上式即可写出 NR 法的迭代公式

$$\begin{cases} \Delta \delta_{k+1} = -(\mathbf{K}_T)_k^{-1} \phi_k, \\ \delta_{k+1} = \delta_k + \Delta \delta_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3 \dots, \end{cases} \quad (32)$$

式中  $\phi_k$  即为系统在  $\delta_k$  处所产生的不平衡力

$$\phi_k = \phi(\delta_k, \sigma_k) = \sum_e \int_L (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \sigma_k dx - \mathbf{R} \cdot \quad (33)$$

由(32) 式可知, NR 法每迭代一次均要重新形成  $(\mathbf{K}_T)_k$  并重新计算  $\phi_k$ , 特别是形成  $\mathbf{K}_T$ , 工作量十分浩大, 本文采用修正的 Newton\_Raphson 法(mNR 法), 具体求解步骤如下:

1) 对结构施加全部荷载  $\mathbf{R}$ , 并作线性计算。

2) 由各单元的线性应变  $\epsilon_s$  根据(2) 式求各子层的应变, 并由梁的最大正应变求出梁的最大正应力  $|\sigma_{\max}|$ , 设  $|\sigma_{\max}| > |\sigma_s|$ , 否则取线性解; 令  $L = |\sigma_{\max}| / |\sigma_s|$ , 存贮由荷载  $\mathbf{R}/L$  作线性计算时各子层的应变、应力, 并以

$$\Delta \mathbf{R} = \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{1}{L} \right) \mathbf{R} \quad (34)$$

作为以后每次加载的荷载增量步, 这里  $m$  为加载步数。

3) mNR 法对于每一荷载增量步  $J (J = 1, 2, \dots, m)$ , 形成一次  $\mathbf{K}_T(\delta_J, \sigma_J)$ , 但对该荷载增量步的各次迭代, 均需计算不平衡力  $\phi(\delta_k, \sigma_k)$ , 仍根据(32) 式进行迭代计算, 直至该步收敛。

4) 对于第  $J$  步荷载增量计算得到的  $\delta_J$ , 可由(16) 式计算  $\epsilon_J$ , 由(2) 式计算各子层应变, 由(7) 式计算  $\sigma_J$ , 并由(5) 式调整  $\mathbf{D}_t$ , 便可根据(25)、(33) 式形成  $\mathbf{K}_T(\delta_{J+1}, \sigma_{J+1})$ ,  $\phi_k(\delta_{J+1}, \sigma_{J+1})$ 。重复(32) 式的迭代计算, 直至加载完毕。

5) 对于每一荷载增量步, 收敛判据可取为

$$\max_i \left| \frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} \right| < \epsilon, \quad (35)$$

这里  $\delta_i$  为系统某一自由度方向上的位移,  $i$  为对系统各自由度循环。

## 5 算 例

端点受集中力  $P$  作用的矩形悬臂梁, 设  $M_e = \sigma_s b h^2 / 6$  为梁的弹性极限弯矩,  $\beta = M / EI = 2 \sigma_s / Eh$ ,  $\beta$  是一个反映梁的几何及材料性质的参数, 它等于截面承受弹性极限弯矩时截面的曲率  $d\theta/dx$ , 用以表征梁的柔度。为便于数据分析, 采用量纲为一的荷载参数  $P^* = Pl/M_e$ , 量纲为一的端点位移  $u^* = u/l, w^* = w/l$  (参见图3)。本算例将梁划分为4个单元, 截面分为8层, 二点 Gauss 积分, 分别对  $\beta = 0.5, \beta = 1.0, \beta = 3.0$  的情况进行了计算。由于是静定梁, 初始荷载可取  $P^* = 1$ , 荷载增量取  $\Delta R = P^* / 10$ ,  $P^* \sim u^*, P^* \sim w^*$  曲线分别如图4、图5所示, 与文[9]解析结果基本吻合, 特别是达到一定荷载水平数值计算无法进行时, 正好对应文[9]的开始塑性卸载点。

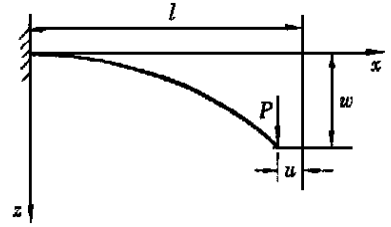
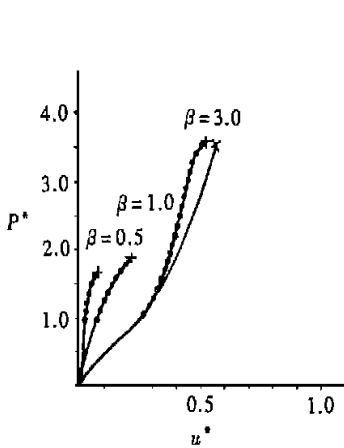
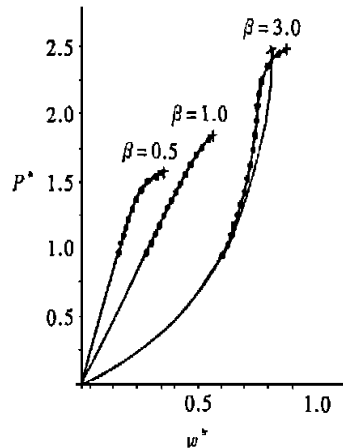


图3 梁的大挠度变形情况



— 文[9]解; · 本文解; × 开始塑性卸载点  
图4 梁端点水平位移与外力的关系



— 文[9]解; · 本文解; × 开始塑性卸载点  
图5 梁端点竖直位移与外力的关系

### [参 考 文 献]

- [1] Frish\_Fay R. Flexible Bars [M]. Washington, D C: Butterworth, 1962.
- [2] Wang C Y, Watson L T. On the large deformations of C-shaped springs[J]. Int J Mech Sci, 1980, 22(7): 395~ 400.
- [3] Wang C Y. Folding of elastica, similarity solutions[J]. J Appl Mech, 1981, 48(1): 199~ 200.
- [4] Wang C Y, Watson L T. The elastic catenary[J]. Int J Mech Sci, 1982, 24(6): 349~ 357.
- [5] 朱菊芬, 周承芳, 吕和祥. 一般杆系结构的非线性数值分析[J]. 应用数学和力学, 1987, 8(12): 1099~ 1109.
- [6] 刘正兴. 基于增量变分原理的柔性梁与柔韧板单元[J]. 计算结构力学及其应, 1984, 1(4): 49~ 59.
- [7] 干洪, 张伟林. 柔性梁的非线性有限元数值分析[J]. 安徽建筑工业学院学报, 1993, 1(2): 68~ 73.
- [8] Owen D R J, Hinton E. Finite Elements in Plasticity [M]. Swansea U K: Pineridge Press Ltd, 1980: 121~ 153.

- [9] 伍小强, 余同希. 悬臂梁弹塑性大挠度全过程的分析, 力学学报, 1986, 18(6): 516~ 527.
- [10] 吕和祥, 蒋和洋. 非线性有限元[M]. 北京: 化学工业出版社, 1992, 308~ 327.

## Numerical Analysis of the Large Deflection of an Elastic Plastic Beam

Gan Hong

( Department of Construction Engineering, Anhui Institute of  
Architecture, Hefei 230022, P R China )

**Abstract:** The layered approach was adopted to study the numerical procedure of the large deflection of an elastic plastic Timoshenko's beam, and the nonlinear equilibrium equation was derived by TL Formula. The solution was conducted by means of mNR method. The tangential stiffness matrix of the beam was introduced, and the solving procedures were presented in detail. The solution of the problem is satisfactory.

**Key words:** elastic plastic; large deflection; layered approach; total Lagrange formula; modified Newton Raphson method